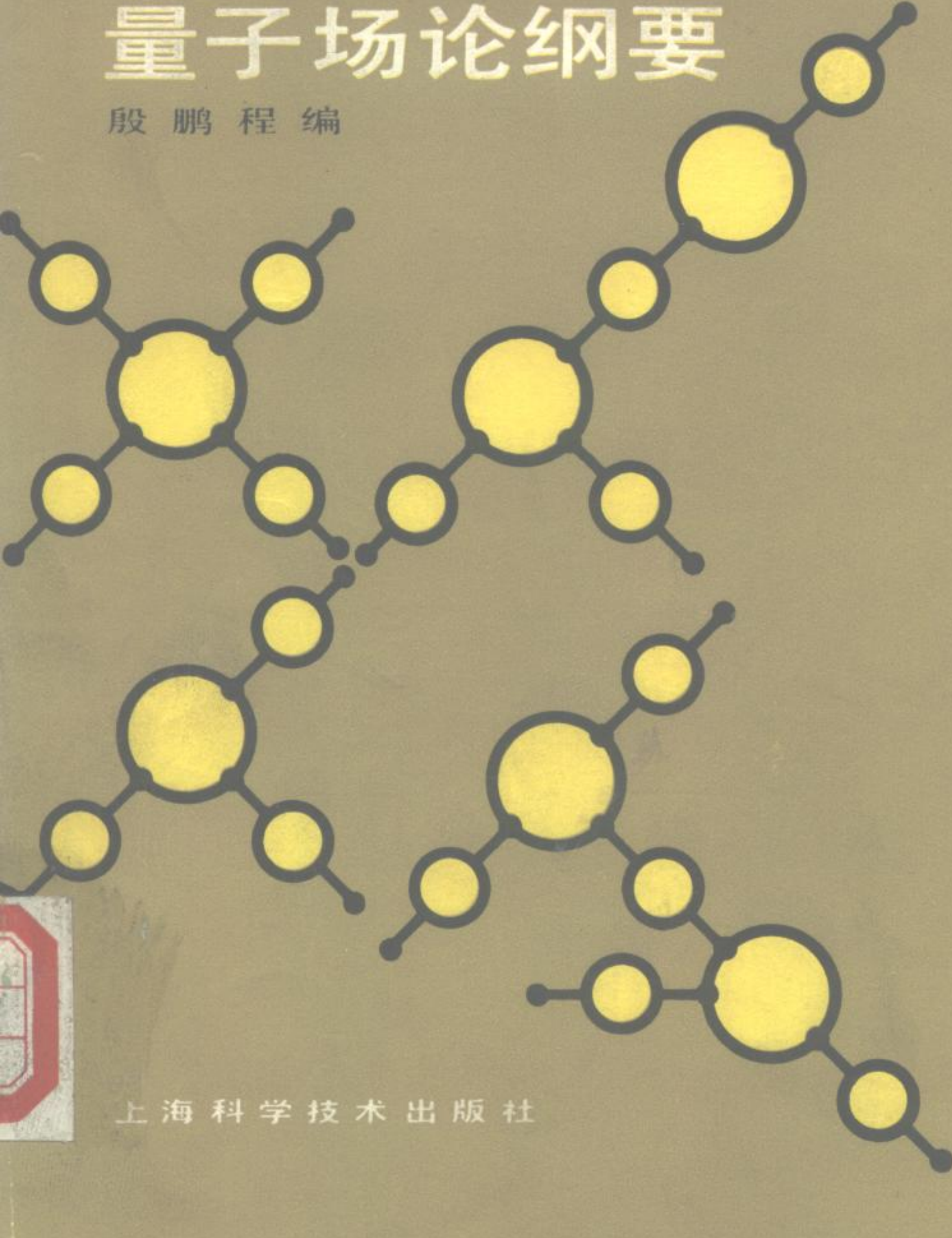
量子场论纲要

殷鹏程 编



上海科学技术出版社

量子场论纲要

殷鹏程 编

上海科学技术出版社

量 子 场 论 纲 要

殷鹏程 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 17 / 字数 448,000

1986 年 9 月第 1 版　1986 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—3,300

统一书号: 13119·1333　定价: 3.75 元

前　言

本书是作者多年来给研究生讲授量子场论课程的系统总结，材料的选择以及讲述的顺序，都适当地考虑了国内学生的实际情况。

量子场论是一门内容丰富而且发展迅速的学科，要想在一本著作中包罗无遗几乎是不可能的；同时，从教学上来看也无此必要。因此本书所选的内容主要在于介绍量子场论中的主干和发展线索，故书名称为“纲要”比较合适。

为使这门课程所占的学时不致太多，有些重要课题也只好放在其他课程中去讲授，例如规范场理论将在规范场论课程中讲授；有些重要的片段性的理论，例如色散关系、流代数、束缚态场论、QCD 微扰论以及强子结构理论等将在粒子理论课程中讲授。因此本书仅为学习上述后继课程以及研究理论物理特别是基本粒子理论提供了必要的基础。虽然如此，本书内容依然可自成体系独立成册。至于主干外的枝叶、花朵，则在习题中作了适当补充，当然大部分习题是为学生深入理解课程内容和熟练运算技巧而选取的。

本书内容大体上可分前后两大部分：第十章以前的内容，主要是介绍量子场论的基本概念、基本原理、基本运算以及一些有关基本粒子的重要知识，以培养学生的基本运算技巧，使学生初步具备解决基本粒子实际问题的能力。自第十一章以后，我们介绍了重整化理论、量子场论中发散量的处理以及量子场论理论形式的提炼和最新进展。这些内容在后继课程和近代文献中都有着广泛的应用，是研究基础理论的学生所必备的基础知识。原想更多地介绍一些最新成就，然而时间和精力有限，难以求全了，只能做到引导入门而已。

本书比较强调协变的数学形式，对场的量子化、S 矩阵的微扰

展开以及具体问题的运算都是这样强调的。理论形式当然不是本质问题，也许只是个人的爱好，而且在有些场合非协变形式也有其物理图象比较清楚的优点。这时作者常把非协变形式也一并介绍以作比较，在习题中也作了适当的补充。

重要的结论和公式加方框标出，有时也还给出在 Bjorken 度规下的相应表示式以便查考。有些读者想要很快了解本书的概貌，那末初次浏览时，可以忽略那些非重要的计算部分，这时方框标记将起到一定的指导作用。

本书所采用的度规是通常所谓的 pauli 度规($\delta_{\mu\nu}$)，这对国内学生当然并不陌生，不过在国际上目前也通用另一种 Bjorken 度规($g_{\mu\nu}$)。为了便于阅读外国文献和其他专著，在书后附有两种度规的符号和公式的对照表，以备查考。

学海无涯，而个人的才学有限，挂一漏万，在所难免，深望这一方面的专家和广大读者多提宝贵意见，以便今后改进。

本书的逐渐形成同历届选读本课程的同学的努力是分不开的，他们的提问、讨论、对材料的选取以及习题的演算都为本书内容的充实做出了积极的贡献，在此特向他们致以谢意。

殷鹏程

1985年10月

内 容 提 要

本书是作者多年来讲授"量子场论"课程的总结性论著，比较适合国内学生的水平。特点是以相对论协变形式贯彻始终，最后两章是量子场论理论形式的最新进展，内容为国内量子场论书籍中所未涉及过的。

全书共十四章，大体上分前后两部分：第十章以前的内容，主要是介绍量子场论的基本概念、基本原理、基本运算以及一些有关基本粒子的重要知识，以培养学生的基本运算技巧，使学生能初步具备解决基本粒子实际问题的能力。自第十一章以后，介绍了重整化理论、量子场论中发散量的处理、量子场论理论形式的提炼和最新进展。这些内容在后继课程和近代文献中都有广泛的应用，也是研究基本理论必备的基础知识。

本书可作为高等学校物理专业的教材，也可供有关理论物理研究的人员参考。

目　　录

第一章　相对论量子力学

相对论量子力学是 Schrödinger 非相对论量子力学的进一步发展，也是量子理论发展过程中的一个重要标志。Dirac 方程不仅有其直接的重要结论，例如氢原子的精细结构及电子的磁矩等；而且，对于作为 Dirac 粒子的场方程，即 Dirac 方程的研究，在量子场论里也占着极重要的地位。尤其在许多实际问题的计算中，对这方面的了解更不可缺少。为了接近于历史发展的顺序，我们在未讨论场论以前，先在本章里讨论单粒子相对论量子力学。

本章第一、二、三节讨论 Dirac 方程本身及 γ 矩阵的一些性质。第四、五两节讨论 Dirac 方程的变换性质。第六至第十节讨论 Dirac 方程解的一些性质。第十一节讨论 Dirac 方程的非相对论近似。这样，使读者不仅可以对此方程能有较清楚的物理理解而且还可了解在实际计算中经常需要的一些重要结论。第十二节则介绍中微子两分量理论，为以后讨论弱相互作用作一些准备。

§1.1　Dirac　方　程

Schrödinger 方程是非相对论的。这是因为 Schrödinger 方程可由非相对论哈密顿函数，以 $p_\mu \to i\partial_\mu$ 的代换而得到，它是对时间 t 的一次微分方程，另一方面又是对空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 的二次微分方程，显然时间和空间坐标并不处在对称的地位。这样，该方程就不能正确地反映高速（接近光速）微观粒子的行为，也不能自动给出电子的自旋以及自旋与轨道的耦合。虽然 Pauli 在这个方程里唯象地引进了电子自旋，但它依然是非相对论的。

Klein-Gordon 于 1927 年把自由单粒子的 Schrödinger 方程推广到相对论情况，而使其在 Lorentz 变换下，保持协变性质。

他们由相对论自由粒子的动量能量关系式*

$$\boldsymbol{p}^2+m^2=E^2$$

(其中 $\boldsymbol{p}$, m 和 E 分别为粒子的动量、质量和能量)出发,利用对应关系

$$p_\mu\to -i\partial_\mu=-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

就得到

$$(\Box-m^2)\psi=0。\tag{1.1$_1$}$$

其中 $\Box\equiv\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$。$(1.1)_1$ 式即为 Klein-Gordan 方程(以后简称 K-G 方程)。

如果以 K-G 方程作为 Schrödinger 方程在相对论情况下的推广,人们自然希望能用它来描写自由电子的一般行为,可是却遇到了以下的困难。在$(1.1)_1$式的基础上,如果引进

$$\boldsymbol{j}=\frac{1}{2m_i}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*),\tag{1.2$_1$}$$

$$\rho=\frac{i}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)。\tag{1.3$_1$}$$

分别作为粒子流密度和粒子密度的表达式(注意,以上 $\boldsymbol{j}$ 的表达式和 Schrödinger 方程的 $\boldsymbol{j}$ 的表达式是一样的,但 ρ 的表达式却不相同),就可以证明二者满足粒子守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0。$$

由于 K-G 方程是二阶微分方程,ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 在初始时刻的数值是可以任意给定的,这样,由$(1.3)_1$式所表示的粒子密度既可取正值也可取负值,也就是说$(1.3)_1$式并不能满足在某处找到粒子的几率是恒正的要求。这个困难,不能通过修改 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 的表达式而加以消除。因此,虽然 K-G 方程满足相对论的要求,却不能用来圆满地描写自由单电子的行为,故而 K-G 方程被人们忽视了很久。直到后来,在场的量子理论里,把 K-G 方程加以量子化用来作为

* 以后除特别说明外,一般都取所谓自然单位,即 $\hbar=1$, $c=1$。

自旋为零的粒子(例如 π 介子) 的场方程，它才重新被人们重视起来。这个问题以后我们还要讨论到。

在微分方程运算中，我们常常用增加变量的办法，使得原方程的阶数下降。这种方法也可以用来降低 K-G 方程的阶数从而使 ρ 成为恒正的，因而也就消除上述困难。

Dirac 用增加 ψ 的分量方法，并根据一些原则改进了 K-G 方程。他于 1928 年提出了电子的 Dirac 方程。这些原则是：

(1) 因为自由粒子的能量、动量满足关系 $|\boldsymbol{p}|^2+m^2=E^2$，所以正确波函数的任一分量都应满足 K-G 方程，这一点我们以后简称为 K-G 条件；

(2) 为保证 ρ 的数值恒正，要设法消除 ρ 表式中的对时间的微商项，这将要求波函数的方程中只有对时间的一次微商出现。除了上述的 K-G 条件外，设想 ψ 各分量之间还满足一阶微分方程组(由于相对论)的要求，时间和空间具有同等地位，因而方程组中对空间和对时间都应只有一阶微商出现；

(3) 由于态迭加原理要求，所得方程应该是线性的。

Dirac 设想，电子波函数有 n 个分量，它们满足一阶线性方程组：

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)\psi_\beta(x)=0 \quad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots n), \qquad (1.4)_1$$

式中 $\psi_\beta(x)$ 为电子波函数，$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$ 为一 $n\times n$ 的矩阵，n 应为多少，暂且不必固定。为使 $(1.4)_1$ 式为一阶微分方程组，Λ 应为时间、空间微分算符 ∂ 的线性函数，也就是说 $\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$ 一般可写成 (这里省掉矩阵指标 $\alpha,\ \beta$)

$$\Lambda(\partial)=\rho_\mu\partial_\mu+\rho m, \qquad (1.5)_1$$

其中 ρ_μ，ρ 均为常数矩阵。

由于 K-G 条件的要求，假定存在微分算符矩阵 $d(\partial)$ 使得

$$d_{\alpha\gamma}(\partial)\Lambda_{\gamma\beta}(\partial)=(\Box-m^2)\delta_{\alpha\beta}。 \qquad (1.6)_1$$

对于自旋为 1/2 的粒子，可以证明 $d(\partial)$ 只是时空的一阶微商的函数，我们把它写成：

$$d(\partial)=a_\mu\partial_\mu+am, \qquad (1.7)_1$$

式中 a_μ 和 a 均为常数矩阵。

把$(1.7)_1$式和$(1.5)_1$式代入$(1.6)_1$式，比较两边常数项得到

$$m^2 a\rho = -m^2$$

即
$$a\rho = -1。$$

因而矩阵ρ的行列式$\|\rho\| \neq 0$，即有ρ^{-1}存在。把$(1.5)_1$式代入$(1.4)_1$式并乘以ρ^{-1}得到：

$$\boxed{(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = (\gamma \cdot \partial + m)\psi = 0} \tag{1.8$_1$}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\psi = (\gamma \cdot \partial + im)\psi = 0} \tag{1.8$'_1$}$$

其中$\gamma_\mu = \rho^{-1}\rho_\mu$。因为$\rho^{-1}$经常存在，我们以后限于讨论$(1.8)_1$式以代替$(1.4)_1$并不丧失其一般性。把$(1.7)_1$式和$(1.8)_1$式代入$(1.6)_1$式并比较两边系数，容易看出

$$\begin{gathered} am^2 = -m^2, \\ a\gamma_\mu \partial_\mu + a_\nu \partial_\nu = 0, \\ a_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \partial_\nu = \Box。\end{gathered} \tag{1.9$_1$}$$

解上式得到：
$$a = -1 \quad a_\mu = \gamma_\mu$$

$$\boxed{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}} \tag{1.10$_1$}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}} \tag{1.10$'_1$}$$

对应$(1.8)_1$式有

$$d(\partial) = (\gamma_\mu \partial_\mu - m)。$$

$(1.8)_1$式即所谓 Dirac 方程，其中γ_μ满足$(1.10)_1$式的对易关系。事实上$d(\partial)$和$\Lambda(\partial)$的地位互换，并不影响上述全部讨论过程。这一点也反映在满足$(1.10)_1$式的γ矩阵并非是唯一的这一事实中。例如，将所有的γ_μ换成$-\gamma_\mu$，$(1.10)_1$式仍然被满足。甚至我们还可经常对γ_μ加以附加限制$\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$，即限取$\gamma_\mu$是自厄密的。在本书里除特别说明外都是如此选取的。

波函数$\psi(x)$一般为复量，我们可找出ψ^+所满足的方程。由

$(1.8)_1$ 式取厄密共轭可得

$$(\partial_\mu^*\psi^+)\gamma_\mu^+ + m\psi^+ = 0。$$

由于我们采取了 $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$，所以上式可写成

$$(\partial_\mu^*\psi^+)\gamma_\mu + m\psi^+ = 0。$$

应该指出 $\partial_4 = \dfrac{\partial}{i\partial t} = -i\dfrac{\partial}{\partial t} = -i\partial$。所以 $\partial_4^* = -\partial_4$；而 $\partial_i^* = \partial_i(i=1, 2, 3)$，所以上式具体展开就成为

$$-\partial_4\psi^+\cdot\gamma_4 + \partial_i\psi^+\cdot\gamma_i + m\psi^+ = 0。$$

这个方程与 $(1.8)_1$ 式相比，形式并不对称，但如果在上式乘以 γ_4 则可得：

$$\boxed{(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma_\mu - m\bar{\psi} = \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}\cdot\gamma - m) = 0} \qquad (1.11)_1$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu - im\bar{\psi} = \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}\cdot\gamma - im) = 0} \qquad (1.11')_1$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_4$ 称为 ψ 的 Dirac 共轭。引进 $\bar{\psi}$ 以代替 ψ^+ 不仅使方程具有对称的形式，而且在以后讨论其协变性质时也比较方便。

§1.2 Dirac 的 γ_μ 矩阵

上节已经提到过满足 $(1.10)_1$ 式对易关系的 γ_μ 矩阵，其具体形式是可以多种多样的。不过 γ_μ 矩阵的一些一般性质，与它的具体表示无关，只需由 $(1.10)_1$ 式关系便可直接导出。本节就来讨论 γ 矩阵的一般性质。

当 $\mu \neq \nu$ 时，由 $(1.10)_1$ 式得

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu = -I\gamma_\nu\gamma_\mu,$$

两边取行列式：

$$\|\gamma_\mu\|\cdot\|\gamma_\nu\| = (-1)^n\cdot\|\gamma_\nu\|\cdot\|\gamma_\mu\|\cdots\cdots, \qquad (2.1)_1$$

式中 n 为 γ 矩阵的阶数，由上式可知 n 应为偶数。但 $n=2$ 时，并不存在四个相互独立的 γ_μ 矩阵满足 $(1.10)_1$ 式，最多只能有三个相互独立的 γ_μ（例如 Pauli 的三个自旋矩阵）满足 $(1.10)_1$ 式，因