

SHUXUE MOXING YINLUN

数学模型引论

〔美〕E.A.本德 著

科学普及出版社

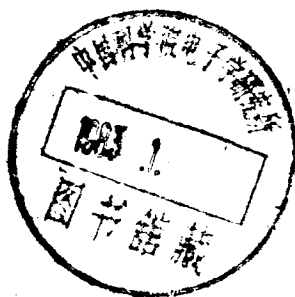
51.33

156

数学模型引论

[美] E. A. 本德 著

朱尧辰 徐伟宣 译



科学普及出版社

1110337

0012 13

内 容 提 要

应用数学知识和电子计算机研究实际问题时，常常要用到数学模型。现在它已广泛应用于各种自然科学，以及工程、交通、商业、环境保护乃至经济、政治等社会科学的研究中。这是一本入门书，其主要目的是介绍如何应用数学工具去建立、分析并评价各种数学模型，以实际问题为例对建立各种数学模型的思想都作了介绍。我国读者所关心的企业管理、价格政策、生态平衡、环境保护、计划生育等方面，在本书论述应用时都有所反映。

本书可供大学生及有关科技人员参考。

E. A. Bender

An introduction to
mathematical modeling

* * *

数 学 模 型 引 论

[美] E. A. 本德 著

朱尧辰 徐伟宣 译

责任编辑：陈金凤

封面设计：窦桂芳

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
河北省固安县印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：9¼ 字数：215 千字

1982 年10月第1版 1982 年10月第1次印刷

印数：1—11,100 册 定价：0.93 元

统一书号：13051·1287 本社书号：0401

目 录

第一章 什么叫建立模型	1
§ 1.1 模型与现实	1
§ 1.2 模型的性质	2
§ 1.3 建立模型	8
§ 1.4 一个例子	10
§ 1.5 另一个例子	13
问题	16
§ 1.6 为什么要研究模型的建立	19

第一部分 初 等 方 法

第二章 由比例论证	21
§ 2.1 尺寸大小的影响	21
包装成本	21
赛艇的速度	25
动物身材大小的影响	30
问题	35
§ 2.2 量纲分析	41
理论背景	42
理想单摆的周期	45
结构的比例模型	46
问题	48
第三章 图解法	53
§ 3.1 利用图形建立模型	53
§ 3.2 相对静力学	55
导弹核武器竞赛	55

生物地理学：海岛上的物种多样性	59
公司理论	64
问题	68
§ 3.3 稳定性问题	70
经济学中的蛛网模型	70
相位平面	73
小团体动力学	74
问题	78
第四章 最优化方法基础	80
§ 4.1 用微分法最优化	80
保持库存	80
血管的几何学	86
森林防火	89
问题	93
§ 4.2 图解法	99
实物交换模型	99
变化着的环境与最优表现型	103
问题	108
第五章 概率方法基础	111
§ 5.1 解析模型	111
性别偏爱与性别比例	111
作出简单选择	115
问题	121
§ 5.2 蒙特卡罗模拟	127
医生的候诊室	131
沉淀物体积	134
河流网	137
问题	143
3000 个随机数字表	147

第六章 杂例	151
沙漠蜥蜴和辐射能	151
公平的选举程序是可能的吗?	154
二氧化碳排出量的减少	158
问题	163

第二部分 高等方法

第七章 微分方程方法	170
§ 7.1 一般讨论	170
§ 7.2 解析解的局限性	171
§ 7.3 另一种方法	171
§ 7.4 不讨论的问题	173
第八章 定量的微分方程	176
§ 8.1 解析方法	176
北美五大湖的污染	176
左转弯挤压	181
长链聚合物	186
问题	189
§ 8.2 数值方法	195
滑水橇的牵引	195
弹道学问题	199
问题	201
Heun 方法	208
第九章 局部稳定性理论	210
§ 9.1 自控系统	210
§ 9.2 微分方程	212
理论背景	212
摆的摩擦阻尼	215
物种相互作用与群体大小	218

Keynes 经济学	224
更复杂的情况	229
问题	229
§ 9.3 微分差分方程	235
车辆流动的动力学	236
问题	241
§ 9.4 对整体方法的评注	243
问题	245
第十章 再谈概率(随机模型)	246
放射衰变	246
最优设备定位	249
微粒大小的分布	253
问题	259
附 录 概率论概要	265
A.1. 概率的概念	265
A.2. 随机变量	268
A.3. 伯努利试验	273
A.4. 无穷事件集	276
A.5. 正态分布	281
A.6. 随机数的生成	284
A.7. 最小二乘法	286
A.8. 泊松分布和指数分布	290
参考文献	292
模型分类索引	302
译后记	305

第一章 什么叫建立模型

§ 1.1 模型与现实

对某一情况所作的理论的和科学的研究，是集中在一个所谓模型上进行的，（模型就是所研究情况的有关性质的模拟物）例如公路图、地质图和植物收集品都是模型，它们分别模拟一部分地球表面的不同侧面。

（检验一个模型，最根本的是看它用在所要处理的问题上时，它的作用如何。）（如果一张地质图没有标出一条主要公路，你没有理由去批评它；但如果是发生在一张公路图上，这就是一个严重的缺陷了。）在使用模型时，它可能导致不正确的预测。模型常常被修改，被废弃，有时被马马虎虎地用，因为有总比没有好。这是科学发展的途径。

在这里，我们只关心数学模型，（这就是那些利用数学语言来模拟现实的模型。）今后每当我们使用“模型”这个词而不加修饰语时，我们总是指“数学模型”。是什么原因使得数学模型这样有用呢？如果“从数学的角度来讲”，就是：

1. 我们必须精确地用公式表示我们的想法，这样可以较少地漏掉某些暗含的假定。

2. 我们有能促进问题处理的精练“语言”。

3. 我们有大量的定理可供使用。

4. 我们可以用高速计算机进行计算。

第3项和第4项往往交替使用：理论对于从简单模型作

1110337

出普遍结论是有用的，而计算机则对于从复杂模型作出特殊结论有用处。因为建立模型所需要的思维习惯在这两种情况下十分相似，所以我们用哪一类模型都没什么关系。因此，我也就放心地略而不谈面向计算机的模型，这纯粹是由于个人教学上的原因。在 § 5.2 中讨论蒙特卡罗模拟时提到计算机，在 § 8.2 中讨论微分方程数值解时也提到一些。

在数学和物理学的发展过程中，相互之间有着重要的影响。在生命科学和社会科学的发展中，数学正开始起着日益重要的作用，而这些科学也开始影响数学的发展。如果要为各种科学去发展合适的数学工具，这种相互影响极为重要。S. Bochner(1966) 讨论了数学与物理学并肩发展的问题。一些人还意识到，除了导致适当的数学概念和物理概念的阐述这类简单相互影响外，还有更为深刻的东西在起作用。E. P. Wigner(1960) 对此有过讨论。

§ 1.2 模型的性质

根据上一节的讨论，我们首先给出模型的定义：“数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而作的一个抽象的、简化的数学结构。”可是，因为十个人就大概会给出十个不同的定义，所以你不必对这定义过于认真，不妨把它当作原始的出发点，由此形成你自己对于数学模型的理解。

现在面临一个问题：要想充分理解下面两节的内容，你就得参阅 § 1.4 和 § 1.5 中那样的一些具体例子；但是，你想充分理解这些例子，又需要了解一些抽象背景。我建议先浏览一下本章的其他几节，然后再返回这里更细致地看下去。

就一个模型而论，现实世界的事物可划分为三部分：

1. 其影响微不足道的事物；
2. 可以影响模型、但其性状不是该模型所要研究的那些事物；
3. 其性状是这模型打算研究的那些事物。

数学模型完全不考虑第一种事物。对于第二类以常数、函数等表达，是外部的，称作局外变量（也称参数、输入或自变量）。对于第三类即模型要解释的事物称作局内变量（也称输出或因变量）。在模型的某些领域中使用局外-局内变量这一术语。当把模型看作一个箱子，向它馈入信息并从中获得信息时，我们就在模型范围里使用术语“输入-输出”。术语“参数-自变量-因变量”则是标准的数学用语。

假定我们受雇于一个公司，要我们去决定怎样的生产水平才能获得最大利润。我们就应该构造一个模型，用生产水平、市场情况以及其他我们认为有关的因素（自变量）来表示利润（因变量）。然后测定除生产水平以外的所有自变量，并用模型去确定给出最大利润的生产水平的值。

现在让我们从力图解释各公司生产货物总量的经济学家的观点来观察事物。我们可以构造出一个分为两部分的模型：各公司追求最大的利润，而利润可象前段所概述的那样来确定。在这模型中利润成为局内变量（除了用于构成模型外我们对它别无兴趣），而生产水平则由自变量变为因变量。

在设计模型时，可忽略的、输入和输出这三种类型的量是重要的。如果不应忽略的事物被忽略了，这模型就无用。如果考虑的事物太多，得到的模型将会复杂得使人失望。并

可能需要多得难以置信的数据。有时模型设计者担着风险忽略掉一些事物，那并非因为他认为这些事物无足轻重，而是因为他不能处理它们，并希望略去之后不会使结果失效。

A. Jensen(1966)探讨过关于海上安全问题的模型。在阐述模型时，主要困难在于：确定船只间什么类型的相遇是危险的。这就是要将第1项与第2项区别开来。他发现，即使有航海专家的帮助，这也是困难的事（如果你想知道答案，必须读这篇文章）。

恰当地选择因变量（即输出）是很重要的，我们必须力图解释我们所能解释的事物。通常这样的选择是比较清楚的，就象在经济学家要去解释一家公司生产水平的例子中那样。但有时必须小心，举例来说，我们可借助于生产水平来说明利润，但不能反过来天真地想用利润去解释生产水平，因为要求我们做的是去确定最佳生产水平。

因为不同的模型作了不同类型的简化假设，所以描述一种情况的最佳模型通常不止一个。R. Lerins(1968, 第7页)注意到“不可能同时使普遍性、现实性和精确性都最佳。”在社会科学中，只要能断言某些东西将会增加，通常就很满足了，这时为了现实性和普遍性就牺牲了精确性。模拟模型则往往力求精确和现实，宁可不要普遍性。当你研究过一些实际模型以后，就会更明白这三者的取舍。

变量的定义及其相互关系构成了模型的假设，然后我们利用模型作出结论（也就是作出预测）。这是演绎过程：如果假设正确，结论必定也是正确的。所以，一项错误的预测意味着这模型在某些方面是不正确的。遗憾的是事情往往不是这么界限分明。我们知道，模型仅仅是一种近似，所以我们不能期望完美的预测。在这情况下我们如何评价一个模

型呢？

从粗糙的模型得出的结论是不太可信的，尤其是当别的模型作出相反的预测时。如果从同一情况的不同模型可以作出同样的结论，或者结论是从一个比较普遍的模型推出的，那么这结论是可靠的。如果一项预测要在非常特殊的假设下才有效，那么它是脆弱的。模型愈粗糙，它那脆弱的预测愈不可信。

你也许注意到，我们一直是说结论，而不是说的解释。模型能够提供解释吗？这是一个有点哲学味道的问题，一项解释是由什么东西构成的，不同的人有着不同的见解。我们假定在某些意义下，模型能够提供解释。对一个模型有效性的判定，通常是以它所作预测的精确程度为根据的。很遗憾，两个不同的模型可能作出相同的预测，但却给出不同的解释。这是怎么一回事呢？

我们可以把我们模拟的情况当作一个“黑箱”，对于每一个输入，它都输出某些东西。（“某些东西”也可以是没有输出。）如果每当等价于黑箱输入的模拟物被馈入时，它都会输出等价于黑箱输出的模拟物，那么这模型就作出了正确的预测。讨论预测时是不涉及机理的，但机理的性质却是解释的核心。常有一种情况是两种不同的模型导致不同的预测，而我们不能确定哪种预测是正确的。举例来说，一位政治家的模型可以通过对他的行为作下述两种假设来构成，（1）出于关心他的同伴，或者（2）出于公众事务的需要。在许多情况下这两种模型导致相同的或十分相似的预测。要作出可被检验的相反的预测也许是困难的。对于熟悉简单电路的人来说，另一个例子是在理想弹簧和理想 LC 电路之间的数学等价性。虽然作为基础的数学原理相同，但没有人会真的建议用

弹簧的虎克(Hooke)定律去“解释”电路的性状。

我们已谈到的是理想的模型设计者。任何人研究问题时，总带有局限性与偏见。我们越是思想开阔，越是广泛交流和富于创造性，我们的模型就越是符合实际。下面这首诗形象地说明了可能会出现的问题。

瞎子和大象

印度斯坦有六个人，
很想多学点东西。
他们走去参观大象，
虽然他们全是瞎子。
都想凭感觉“观察”，
这怪物到底有啥稀奇？

第一个人走向前去，
恰好摸着大象的身躯。
他随即高声叫喊：
“唉呀，我的上帝！
它是那么宽阔坚硬，
可真象一堵墙壁！”

第二个人摸着象牙大叫：
“哈，这家伙真妙！
它是那么圆滑锋利，
我已经清楚明了。
这奇怪的大象，
很象一支长矛！”

第三个人走近巨兽身旁，

象鼻正好落在他的手上。

他感到柔软的东西在蠕动，

激动地高声叫嚷：

“我看这头大象，

跟蛇完全一样！”

第四个人连忙伸手，

刚好摸着膝部。

“大象最象什么？

你们都没我清楚！

显然这头怪物，

最象一棵大树！”

第五个人凑巧摸着耳朵，

于是他激昂地说：

“就是最瞎的人，

也能分清楚它象什么！

我看这神奇的大象，

确实跟大蒲扇差不多！”

第六个人摸索了一会，

抓住摆动着的尾巴。

他理直气壮地高喊，

声音比谁都大：

“大象明明象根绳子，

你们的观察力真差！”

六个人就这样争吵，
声音越来越高。
谁都坚持己见，
不肯退让分毫。
每人虽讲对了一小部分，
但全都错得可笑！

——J. G. 萨克斯(1816~1887)

§ 1.3 建 立 模 型

建立模型需要想象力和技巧。给出建立模型的法则，就象列出做一名艺术家的准则一样，充其量只能提供一个获得技巧和发展想象力的纲要。要教会人想象，是不可能的事。我不去作这样的尝试，但我希望本书能提供你们一个增进技巧和想象力的机会。在作了这些预先的说明之后，我介绍一个模型建立过程的梗概。

1. 阐述问题。 你想知道的是什么？你所选择的模型的性质，高度依赖于你想要利用这个模型解决什么问题。

2. 提出模型的要点。 在这阶段中，你必须将周围的种种事物区分为不重要的、局外的和局内的三部分。还必须详细说明变量间的相互关系。

3. 模型可用吗？ 现在掉过头来检查已建立的东西。你能取得所必需的数据吗？能在模型中用它来作出你要的预测吗？如果不能，那么你必须重新提出模型的要点(第2步)，也许还要重新阐述问题(第1步)。请注意，“可用”并不是指合理或精确，那是第4步的事情了，而是指，如果模型符合情况，我们能否使用它？

4. 检验模型。 用这模型作出能经得起数据或常识检验的预测。完全依赖常识是不妥当的，因为常识可能恰好是错的。从容易的预测做起——不要把时间花费在对一个也许不太好的模型作繁杂的计算上。如果这些预测不好，而又没有数学上的错误，退回到第2步或第1步。如果这些预测还可以接受，那么它们应该给你一些关于这模型的精确度和适用范围的感性知识。要是它们不如你预期的那样精确，最好试着去弄清原因，因为这样可以揭露出隐蔽的或者错误的假设。

到此，这模型就可以备用了。可是别走得太远：要是盲目地把这模型用于同检验时所用的迥然不同的问题上，那是危险的。每一次应用都应看作是对模型的一次检验。

你也许不能立即进行第2步，因为还不清楚什么因素是可以忽略的。其次，也许还弄不清局外变量应该被精确地确定到什么程度。通常的习惯是从粗糙的模型和粗略的数据估计出发，以便知道在这模型中需要考虑什么因素，以及局外变量必须被确定到什么样的精确度。

某些模型可能不需要数据。要是是一个模型不需要数据也同样能作出预测，我们也并不是得到一些无用的东西，因为这预测还是在模型的假设下做出的，在某种程度上，数据与假设之间的区别只是人为的。在极端情形中，一个模型可以如此特殊，以致它的数据都放进假设中了。

有时第4步实际上是不可能进行的。例如，我们怎样去检验一次核战争的模型呢？如果我们有二个核战争模型，它们作出不同的预测，我们该怎么办？在研究物理科学中那些没有精确列成公式的定律时，这种情况是很容易发生的。在这种时候经验是基本的——不是数学上的经验，而是在被模

拟的领域内的经验。有时即使预测是可以检验的，但是进行检验花费昂贵，而且也许还需要有某种实验科学领域的训练。因为缺乏实验的验证会使模型建立过程不完整，所以只要是我能取得的验证结果，我总把它给出。

§ 1.4 一个例子

为了说明前两节中的一些概念，我们来讨论人口长期增长的模型。我们想预测经过几代以后，人口在数值上是如何增长的。这就是要研究的问题(§ 1.3 的第 1 步)。

设局外变量(自变量)为每个人的净生殖率 r 、时间 t 、 $t=0$ 时的人口数。净生殖率等于出生率减去死亡率。换句话说，它是人口变化的比率： $r=(dN/dt)/N$ 。这例子只有一个局内变量(因变量)，即在时间 t 的人口数，记为 $N(t)$ 。我们也称 r 为净增长率。

为了得到一个简单模型，我们不考虑时滞的影响，也就是说，我们假定在确定 N 的未来值时，有关系的只是 N 的现值和它的导数(这就导致一个微分方程)。如果处在生殖年龄的人口比例随 t 而变化，那这项假设就很差了。我们还假定净生殖率 r 是常数。基本关系式

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r. \quad (1)$$

就给出一个相当粗的模型。如果这模型适合实际的话，那它肯定是可用的(第 3 步)。(1)的解是 $N(t)=N(0)e^{rt}$ 。除非 $r=0$ ，最后是人口全部死亡(r 为负时)或增加到充满全宇宙(r 为正时)。在这个模型下，合理的人口情况是一个很脆弱的预测。这就带来一个极大的疑点，利用恒定净生殖率来预