生产过程自动化中的
数学模型

潘裕焕 编著

科学出版社

生产过程自动化中的

数学模型

潘裕焕 编著

科学出版社
1977

内 容 简 介

本书介绍生产过程自动化中数学模型的实验研究方法，分静态模型及动态模型两部分。前一部分以因子实验的设计及其数据分析为核心，介绍了静态模型的实验研究方法；后一部分介绍了研究动态模型的时间域方法、频率域方法和统计法。书中还用一定的篇幅介绍了概率统计的基本概念。

本书可供从事仪表、自动化、计算机控制以及大型工业实验等方面的工人、工程技术人员和科学研究工作者参考。

生产过程自动化中的
数 学 模 型
潘 裕 焕 编著

*

科 学 出 版 社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1977 年 4 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
1977 年 4 月第一次印刷　印张：19
印数：0001—10,220　字数：442,000

统一书号：15031·146
本社书号：803·13—8

定 价：1.95 元

前　　言

随着生产过程自动化程度的日益提高，从使用分散回路的模拟式调节器，到集中的数字式直接控制仪；从专用的计算装置，到大型的控制用电子数字计算机，使人们能够不断地提高劳动生产率.

经过史无前例的无产阶级文化大革命，我国的社会主义革命和社会主义建设事业得到了飞速的发展. 在毛主席的革命路线指引下，通过工人阶级创造性的劳动，我国各个工业部门的自动化水平越来越高. 化工、石油、冶金、电业、交通运输、建筑材料等部门不仅普遍地采用仪表和调节器进行集中的自动控制，而且开始采用了电子数字计算机.

在用自动控制装置如调节器和电子计算机等控制生产过程时，通常需要考虑生产过程中某些变量间的关系，这种关系，有静态的，也有动态的，这些关系可以用公式表示，也可以用表格或图形来表示. 所有这些公式、表格、图形等总称为生产过程的数学模型.

求取生产过程数学模型的方法，现有分析法和实验法两种. 对于某些生产过程来讲，通过理论分析以及适当的实验工作，就可以得到它的精确的数学模型，也就是可以完全地描绘出它的静态和动态特性. 但是对大多数的生产过程，尤其是较复杂的生产过程来讲，实际上往往会变得非常烦琐，甚至不可能实现. 因此，通常的办法是作一些简化，即规定变量只在某一小范围内变化，或者把变化范围分成若干个区段，然后求出各个区段内的近似模型.

用分析法研究生产过程的数学模型，主要是考虑研究对象的物理和化学过程以及对象的结构，这一方法实际上反映了相应学科的发展水平. 但是，由分析法所得之数学模型一般讲需要通过实验进行验证，尤其是在实际的生产过程中更需要这样作.

实验法求数学模型可以分为加专门信号及不加专门信号两种. 加专门信号的方法就是在实验过程中改变所研究之对象的输入量，由它引起的对象输出量的变化称为有用信息，对此进行加工处理就可求得对象的特性. 不加专门信号的方法则是利用对象在正常操作时所记录的信息进行加工，在实验过程中不改变对象的运行状态.

在研究静态特性时所加的信号，可用专门的程序设定装置甚至直接利用电子计算机来设置. 实验前将所有输入量的全部各种组合都配备在装置内，实验时它就按要求给出输入量的一定的组合，一直保持到所研究之对象的过渡过程结束，记录所需各个输出量的数值后（这些数值连同输入量乃供分析静态特性时所用），再转入下一个输入量的某种组合状态，如此反复，一直到全部实验做完为止. 实验

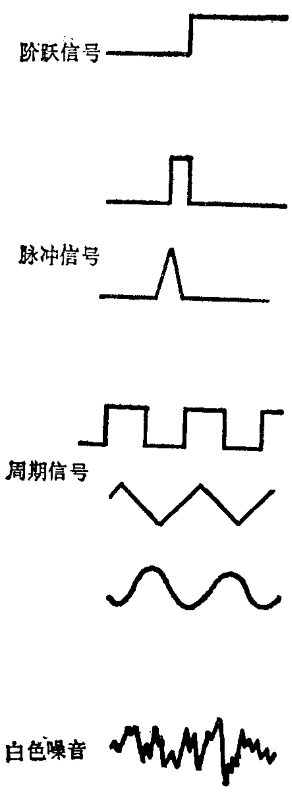

图 1

中，所得结果的精确度在很大程度上取决于输入量的精度．

研究动态特性时所用的信号发生器是多种多样的，它产生的信号可以是阶跃型的、脉冲型的、周期型的、以及在统计研究中采用的白色噪音，大致如图1所示．更详细的将在以后各章中讨论．

一般地讲，分析法和不加专门信号的实验法可用来建立较粗糙的关系式，这些关系式大体上可反映所研究的生产过程，然而，也只是定性的或者精度不够．这时，最好再用加信号的方法来确定上述关系式的系数，或提高精确度．

本书专门介绍有关生产过程数学模型的实验研究方法，分两部分，共六章．第一篇为静态模型的研究，包括二章，第一章首先介绍一些有关的概率统计知识，因为考虑到在仪表及自动化、应用电子计算机控制工业生产以及在大规模工业实验等有关领域中从事工作的工人、工程技术人员很需要这方面的基础知识，所以本书花一定的篇幅对此作一些介绍．这也给后面叙述实验设计提供必要的基础．第二章以因子实验的设计及分析为核心，介绍静态模型的实验研究方法．第二篇为动态模型的研究，共分四章．第三章介绍生产过程的动态模型（或通称为动态特性）的意义及各种描述方法，后三章分别叙述实验测定动态特性的时间域方法、频率域方法以及统计方法．

书中还附有各种表格，便于读者查阅．

本书的着眼点在于应用，目的是想通过这些讨论使从事有关工作的同志得到一些帮助和参考，同时也简略地介绍一些数学原理，读者可以根据自己的需要选阅其中部分内容，或在阅读时有所侧重．由于编著者的思想和业务水平低，实践经验少，书中定有许多错误及不当之处，请读者提出宝贵意见．

目　录

前言……………………………………………………………………iii

第一篇　静态模型的实验研究

第一章　概率论与统计学基础知识……………………………………2
§ 1.1　基本概念……………………………………………………2
§ 1.2　频率和概率…………………………………………………4
§ 1.3　随机变量及分布函数………………………………………7
§ 1.4　随机变量的特征数字——数学期望、方差………………10
§ 1.5　数学期望与方差的运算规则………………………………12
§ 1.6　正态分布……………………………………………………13
§ 1.7　大数定律及中心极限定理…………………………………15
§ 1.8　统计分析……………………………………………………17
§ 1.9　χ^2 分布，t 分布和 F 分布……………………22
§ 1.10　χ^2 分布，t 分布和 F 分布的应用举例………26
§ 1.11　方差分析…………………………………………………31
§ 1.12　回归分析…………………………………………………44
§ 1.13　协差分析…………………………………………………57
第二章　静态模型的实验研究——因子实验及分析……………79
§ 2.1　概述——提倡有计划的实验………………………………79
§ 2.2　二水平因子实验及分析……………………………………84
§ 2.3　三水平因子实验及分析……………………………………99
§ 2.4　$2^n\times3^m$ 因子实验及分析……………………………114
§ 2.5　因子实验的混杂(裂区实验)………………………………120
§ 2.6　因子实验的部分实施(部分因子实验)……………………149
§ 2.7　协差分析在因子实验中的应用——存在不可控因子的情况……158
§ 2.8　缺落数据的补救方法………………………………………175
§ 2.9　求静态数学模型的例子……………………………………177

第二篇　动态模型的实验研究

第三章　动态特性……………………………………………………185
§ 3.1　动态特性的各种描述方法…………………………………185
§ 3.2　几种典型环节的动态特性…………………………………193
§ 3.3　测定对象动态特性时应作的实验准备……………………195
§ 3.4　对象的微分方程与频率特性、传递函数之间的关系……198
§ 3.5　复杂对象的传递函数——与它各个组成部分传递函数的关系……199
第四章　测定动态特性的时间域方法………………………………204
§ 4.1　测定对象过渡过程的实验——飞升曲线及方波响应……204
§ 4.2　由飞升曲线或方波响应确定对象微分方程的系数………207

§ 4.3 由飞升曲线求传递函数 …… 217
§ 4.4 利用实验曲线求传递函数的其它方法 …… 229
§ 4.5 结论 …… 235
第五章 测定动态特性的频率域方法 …… 236
§ 5.1 选择进行实验的频率区域 …… 236
§ 5.2 正弦波方法 …… 236
§ 5.3 矩形波方法 …… 247
§ 5.4 由实验频率特性曲线求传递函数 …… 251
第六章 测定动态特性的统计法 …… 264
§ 6.1 引言 …… 264
§ 6.2 随机信号的统计描述 …… 264
§ 6.3 自相关函数、互相关函数、谱密度函数 …… 265
§ 6.4 用互相关函数法测定对象的脉冲反应函数 …… 268
§ 6.5 用白色噪音测定对象的动态特性、相关器 …… 269
§ 6.6 用准随机信号测定对象的动态特性 …… 271
§ 6.7 一种准随机信号——最大长度二位式序列信号——的构成 …… 273
§ 6.8 用M序列信号测定对象的动态特性 …… 280
§ 6.9 结论 …… 286
附录 …… 288
Ⅰ 正态分布的概率密度函数、数学期望以及方差的推导 …… 288
Ⅱ 契贝雪夫不等式和伯努里定理的证明 …… 289
Ⅲ 标准正态变量的概率密度函数及分布函数表 …… 291
Ⅳ χ^2分布的临界值表 …… 292
Ⅴ t分布的临界值表 …… 293
Ⅵ F分布的临界值表 …… 294
Ⅶ 随机数字表 …… 296
参考文献 …… 298
后记 …… 298

第一篇　静态模型的实验研究

静态模型是指生产过程的各个有关参数（或称变量）在静态时（也就是它们的各阶导数均为零时）的关系．

在通过实验研究生产过程的数学模型时，大家都有共同的体会，即观测值总要受到实验误差的影响，尤其在大型的生产装置上进行实验更是如此．影响观测值的因素很多，且无法一一由实验人员控制，它与实验室的实验有着基本的差别．在实验室里具有很优越的条件，实验人员可以使所有自变量完全控制在他的要求之内，他可以要求实验原料高度纯净，测量仪器高度准确，实验条件（如温度、湿度、压力等等）控制得高度严格，因而可使实验误差尽可能地减小，从而使实验结果比较容易判断．但是对工业实验来讲，实验人员是无法对所有变量实行控制的，如前所述，工业实验的规模往往是非常之大的，例如要测定原油分馏时的模型，所处理的原油（原料）成分通常不能保持一成不变，它的一个个十几米乃至几十米高的分馏塔，耸立大地，生产中经常要受到自然环境的影响，如炎热的中午和凉爽的半夜相比，气温就有相当大的差别，再加上一般工业生产所用测量仪表的精度也有一定的限制，如热电偶或热电阻大多数的测量误差就为千分之五，这些情况都说明了工业实验总是不可避免地伴随着误差．而且在实际生产装置上进行研究，往往要求尽可能不影响或少影响生产的正常运行．如果称心如意地按照实验者的要求，把生产条件作大幅度的变动，也许可以得到许多组比较离散的数据，在分析处理上比较方便，但是却大大地影响了生产，或许废品增多，或许产量降低，从而使生产遭受严重的损失，这是我们所不希望的．因此就有必要在自变量变化较小的范围内进行实验，然而它又意味着所观察到的效应（因变量的变化）将大大减小，而误差的作用却相对地变得更严重．上述原因使工业实验的结果比实验室实验的结果具有更大的误差．为了准确地判定某个特殊的结果是真正有意义的结果还是由于误差引起的结果，就必须进行显著性检验（关于显著性检验，后面将要介绍）．另外，为了得到显著的结果，还往往要求我们将实验多次重复或采用一些特殊的实验规划使实验的误差尽量缩小．

可以看出，工业实验面对着如此一系列的问题，迫使人们不得不考虑各种各样的实验方案，以尽量减小误差，突出实验的效应，这就是近代飞速发展起来的一门学科——实验设计．（实验设计是数理统计学的一门重要分支，最初是在农业、生物、医学等等方面得到了发展，目前在工业实验求得生产过程的静态模型方面也得到了普遍的应用）实验设计以基本的概率和统计为基础，因此在这一部分我们先介绍概率和统计的一些基本知识，然后再介绍实验设计及其分析．

第一章 概率论与统计学基础知识

§ 1.1 基 本 概 念

自然界中的各种现象存在着一定的规律，这种规律，从数学的观点来看，又可分成两种：一种是确定性的规律，例如欧姆定律 $U=IR$ (电压降＝电流×电阻)反映的是某个电阻上电压降与电流的关系；牛顿第二定律 $F=ma$ (F 为力，m 为质量，a 为加速度)反映的是作用于某物体上的力与其质量及产生的加速度之间的关系，各参量之间都呈现一定的函数关系；另一种是统计性的规律，例如某机械车间生产的一批机械零件，譬如说是一批圆轴，每根圆轴的直径不可能与图纸上所规定的尺寸完全相等，而是有一定的差异，又如某化工厂生产的一批硫酸，其纯度也不可能每瓶（或桶）都相等，经测定，它们之间也是有一定的差异的．乍看起来，似乎毫无规律，但仔细分析研究，人们可以发现也是有一定的规律的，这就是所谓的统计性规律．概率论与数理统计学就是揭示这样一种统计性质的规律的学科．

概率论与数理统计学所研究的问题是相对于某一组条件而言的，只有在这一组条件实现的情况下，我们才能获得有关问题的统计性的材料．对于不同的问题，这组条件有不同的形式．

就拿上面所举的例子来看，在考虑机械加工的时候，应当考虑这一批零件是否是在同一台机床上，由同一名工人加工的，假若加工的条件不同，所呈现的圆轴直径的差异也将不同．生产硫酸的情况也是如此，应当考虑这一批硫酸是否是在同样的工艺条件下生产的，操作人员是否相同，以及原料的情况等等，这些都将影响产品的纯度．

因此，对偶然现象的观测总是在某一种条件实现的情况下进行的，故每次观测可以看作是一个试验(即一个试验就是一组条件的实现)，观测的结果就是试验的结果．

随机试验 对于某些事物来说，在同一组条件实现之下就必然得到同一的试验结果．例如，水在标准大气压下加热到摄氏一百度后必然化为蒸汽；将一枚钱币向上抛，由于受地心引力的作用它必然下落，等等．但是如果要问，抛一枚钱币究竟正面向上还是反面向上，我们就不可能这样肯定了，我们只能说，或者出现正面，或者出现反面．机械加工车间的例子也一样，例如要制造一批某一定直径的圆轴时，不管机器的精密程度多高，我们也无法预先说定某件产品的直径究竟偏大还是偏小．如果在同一组条件(包括操作程序)实现的情况下，不一定得到同一的试验结果，然而每一个可能的试验结果都有一定的出现机会，或者说有一定的可能程度，则我们说，这个试验是一个**随机试验**．在这一部分中谈到的试验都是指的随机试验．

事件 随机试验的结果叫做**事件**，或称随机事件．

事件可以是数量性质的，即试验结果可直接由测量或计数而得，例如硫酸的纯度、圆柱的直径等等；但也可能是属性性质的，例如某种材料的牌号，某种东西的颜色，等等．

事件可以是单一性质的，也可以是多重性质的．单一性质的：例如我们只考虑圆柱

体直径而说某圆柱体的直径是 2 厘米；多重性质的：例如我们同时考虑圆柱体的直径和高度而说某圆柱体的直径为 2.1 厘米，高度为 3.2 厘米，等等.

事件有简单的，也有复合的. 简单事件指不能再行分割的事件；复合事件则是指由简单事件复合而成的事件. 例如当我们考虑一批圆柱体的直径时，“某圆柱体的直径是 2 厘米”为一简单事件，而“某圆柱体的直径在 2 到 2.1 厘米之间”则为一复合事件，因后者由圆柱体直径为 2 厘米，2.01 厘米，2.02 厘米，……等一系列事件复合而成. 又当我们观察某公共汽车站排队人数时，“有 4 人在排队”为一简单事件，而“有不多于 4 人在排队”则为一复合事件.

前面说，随机试验的结果叫做事件，这只是一种简单笼统的说法. 因为同一试验结果可以有不同的说法. 例如“圆柱体直径为 2 厘米”，既可以说成“等于 2 厘米”，也可以说成“小于 3 厘米”；“3 人排队”也可以说成“排队人数不多于 5 人”；等等. 确切地说，事件是随机试验的所有可能结果里面的一个集合. 例如“有不多于 4 人在排队”这个事件是 0,1,2,3 或 4 个人在排队等 5 个可能结果(也称为事件)的集合. 这里每一个可能结果相当于一个简单事件. 注意，只要集合中的任意一个结果出现，代表此集合的事件即发生. 例如“3 人在排队”意味着“有不多于 4 人在排队”这一事件的发生.

事件是概率论与数理统计中的最基本的概念. 这个概念是与一个随机试验以及它所有可能的结果联系在一起的. 只有明确了随机试验及其全部可能结果，我们才能确定事件的可能程度(以后我们称之为确定或找到事件的概率).

随机变量 表示随机试验的结果的一个数量叫做**随机变量**. 随机变量取什么值是不能在试验前得知的，它决定于试验的结果. 例如，在一定的气候和测量技术的条件下，重复测量地球和某星球的距离所得到的测量值是一个随机变量；在某一个小时内，电话总机所接到的电话呼唤次数是一个随机变量；等等. 如果试验结果不是一个数量，则随机变量取什么值，可按适当的惯例，或自行规定. 例如在产品的质量检查中，记废品为 1、正品为 0. 这样，随机变量取什么值就可视出现废品或出现正品而定了.

不言而喻，随机变量取什么值也都有一定的机会或可能程度，而每次试验事实上就是对随机变量的一次观测.

统计总体与随机子样 在统计学中，把我们准备加以观测的一个满足指定条件的元素（或称个体）的集合叫做**统计总体**. 例如在某一稳定条件下的产品，在正常情况下发射的炮弹，等等，都是统计总体的例子. 然而，我们感兴趣的并不是这些元素本身，而是这些元素的某种性质. 因此，统计总体又可理解为表征这些元素的某种性质(例如产品的某个尺寸，炮弹的射程)的数值的一个集合. 统计总体(以下或简称总体)的内容究竟是什么，不仅要看所指的条件是什么，而且要看所考虑的是这些元素的什么性质. 例如，我们既可以观测某车间某班所生产的一批圆柱体直径的尺寸大小，也可以只观测这些直径是否落在某个尺寸范围以内. 此外，我们既可以观测元素（或个体）的一种性质，例如圆柱体的直径；也可以同时观测多种性质，例如圆柱体的直径及高度.

若总体中的元素有限，则称总体是有限的. 例如，某工厂自开工以来若干年某种产品每月的产量就构成一个有限总体. 若总体的元素是无穷的，则称总体是无穷的. 例如，某工厂在将来无限多年分里某种产品的月产量就构成一个无穷总体. 统计总体形形色色，下面再举一些统计总体的例子：

(1) 一批圆柱体的椭圆度.

(2) 某种牌号电池的放电时数.

(3) 某厂产钢的硬度、韧度、含碳、含硫及含磷量.

这些统计总体到底是无穷的或是有限的，还不是完全明确的. 例如，总体(2)和(3)在一定时期内是有限的；但若把某牌某厂看作一定的生产条件，则任何一个时期的产品都不过是这个生产条件下所生产的产品的一部分，因而总体是无穷的.

现在我们从一个总体中抽取一些元素作为代表这个总体的样本. 如果我们抽取元素的方法是使总体中的每一元素都有同等的机会被抽取，且每次抽取时总体中的元素成分不改变，那末我们所得的样本称为**简单随机子样**. 取得简单随机子样的过程或手续叫做**简单随机抽样**. 显然，简单随机抽样就是重复地进行同一随机试验. 因此，当我们从一个总体中抽取一个随机子样时，我们是在重复观测同一个随机变量. 随机变量的具体意义就是一个统计总体.

为了保证抽样的随机性，往往需要采取一些具体措施(例如使用随机数字表以保证总体中每一元素有同等被抽取的机会，舍弃不合手续的观测值，等等)，以防止抽取时的人为偏见. 虽然如此，完全随机的子样实际上还是很少的，因为每一次抽取都要直接或间接通过人的判断来执行；也就是说，随机抽样毕竟是一种理想的情况. 况且，有时考虑到具体情况(例如经济性)，也可能有意识地不采取随机抽样的方法. 但一般说来，随机子样最足以代表统计总体. 在概率论与数理统计中，随机抽样的概念是最基本而又重要的. 本书只考虑随机子样，特别是简单随机子样. 一般简称为子样.

数理统计的中心问题就是如何根据子样探求有关总体的种种知识，以及利用子样的随机性来检验关于总体的种种假设.

§ 1.2 频 率 和 概 率

就个别的试验而言，我们很难预料其结果. 但当我们进行大量的重复试验时，情形就根本改观. 我们将会发现一种“大量现象”的规律. 以某种产品的生产废品率为例. 可把一定时期内在稳定生产条件下所生产的产品的全体看作一统计总体. 现从中任取 n 件，由于生产条件稳定，每取一件时，出现废品或正品的可能性都可看作是不变的，也就是说，这 n 次抽取是一个 n 次的重复试验. 所抽取的 n 件产品构成一个容量为 n 的随机子样. 若记废品为 0，正品为 1，则对应着出现废品和出现正品这两个事件，随机变量 ξ 分别取值为 0 和 1. 设在 n 次试验中，有 m 次得废品，则比率 $\frac{m}{n}$ $(0\leqslant m\leqslant n)$ 叫做事件“$\xi=0$”(即出现废品)的相对频率，或简称频率. 完全可以想象，对于不同的随机子样，事件“$\xi=0$”的频率可以不同，并且，随着子样容量 n 的改变，这个频率也会起一定的波动. 但是，只要样本是随机的，我们将会发现，随着 n 的增大，频率 $\frac{m}{n}$ 将围绕着某一确定的常数 p 作平均幅度愈来愈小的波动. 这就是所谓的**频率的稳定性**. 如表 1.2.1 所示，我们可以看出，在此例中这个常数 p 大约是 6%.

可以理解，事件的可能程度与它的出现频率是有一定的联系的；事件的可能程度越大，它的出现频率平均地说也越大。因此事件“$\xi=0$”的可能程度可以很自然地用数 p 来

表 1.2.1 对于不同的样本容量 (n) 各次抽样得到的废品次数(m)和频率

抽样序号	$n=25$		$n=250$		$n=2500$	
	m	$100\times\frac{m}{n}$	m	$100\times\frac{m}{n}$	m	$100\times\frac{m}{n}$
1	1	4	12	4.8	157	6.28
2	4	16	14	5.6	152	6.08
3	0	0	17	6.8	157	6.28
4	0	0	11	4.4	136	5.44
5	1	4	22	8.8	152	6.08
6	1	4	9	3.6	135	5.40
7	2	8	15	6.0	143	5.72
8	0	0	14	5.6	160	6.40
9	1	4	21	8.4	149	5.96
10	1	4	8	3.2	153	6.12

表示，并称数 p 为事件“$\xi=0$”的概率，这样一来，当 n 很大时，就能由频率得到概率的近似值.

应当注意，以上我们并没有直接定义概率，而只是说，当试验次数很大时，频率接近于概率. 本书不打算详细介绍概率的严格定义，因为这超出了本书的讨论范围. 在此我们仅指出，概率的初步意义如下：

“我们断言在一组条件 S 实现之下，事件 A 出现的概率 p，是指在各组试验（即一组条件 S 实现之下）中（每组试验中的试验次数充分地多），与所得到的事件 A 出现的频率

$$\nu_r=\frac{m_r}{n_r} \tag{1.2.1}$$

大致相同，且接近于 p”.（n_r 是第 r 组试验中之试验次数，m_r 是这 n_r 次试验中事件 A 出现的次数）

对上述概率的意义，应该注意，概率是由事件 A 和一组条件 S 之间的关系的特性所决定的，它是客观存在的数值. 我们又可将此写成 $P(A|S)$，即

$$p=P(A|S) \tag{1.2.2}$$

当不必特别申明 S 这组条件时，可将 $P(A|S)$ 简写为 $P(A)$，即 $p=P(A)$.

关于概率的某些性质，我们叙述如下：

事件 A 的概率是个非负的数，即

$$P(A)\geqslant 0 \tag{1.2.3}$$

若在某条件下（即对于某个试验来讲），事件 A 不会发生，则称 A 为**不可能事件**. 若 A 为不可能事件，则 $P(A)=0$.

事件 A 的概率不大于 1，即

$$P(A)\leqslant 1 \tag{1.2.4}$$

若在某条件下（即对于某个试验来讲），事件 A 必定发生，则称 A 为**必然事件**. 若 A 为必然事件，则 $P(A)=1$.

A 的**对立事件**是指与 A 性质相反的事件，记作 $\bar{A}$，读如“非 A”. 对于 A 和 $\bar{A}$，恒有

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \tag{1.2.5}$$

对于任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我们用下述和式

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \tag{1.2.6}$$

表示至少发生 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一，读作"事件 A_1 或 A_2 或…或 A_n"．这个总和叫做事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的**事件和**．事件和本身为一事件．事件和可以看作一个具有 n 个事件性质中的任一个或一个以上的性质的事件．

对于任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我们用下述乘积

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i \tag{1.2.7}$$

表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 全部同时发生，读作"事件 A_1 与 A_2 与…与 A_n"，这个乘积叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的事件积．事件积本身为一事件．事件积可看作一个同时具有 n 个事件的性质的事件．

若在一次随机试验中，事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称 A 与 B 为**互斥事件**或**互不相容事件**．对于互斥事件 A 和 B，有 $P(AB)=0$．

概率的加法定理 无论事件 A 和事件 B 是什么性质，"A 或 B"的概率等于 A 的概率加上 B 的概率再减去"A 与 B"的概率：

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.2.8}$$

若 A, B 为互斥事件，则可得

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{1.2.9}$$

推广到 n 个互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{1.2.10}$$

即

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.2.10$'$}$$

条件概率 在事件 A 出现的条件下，事件 B 出现的概率叫做 B 在给定 A 条件下的**条件概率**，记为

$$P(B|A)$$

易知

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.2.11}$$

此处假定 A 不是不可能事件，即 $P(A) \neq 0$．

概率的乘法定理 事件 A 和事件 B 同时出现(即事件"A 与 B")的概率等于事件 A 的概率乘以事件 B 在给定 A 下的条件概率：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \tag{1.2.12}$$

考虑到 A 和 B 的对称性，则同样有

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \tag{1.2.13}$$

概率性独立 若 B 在给定 A 下的条件概率等于 B 自身的概率：

$$P(B|A) = P(B) \tag{1.2.14}$$

即称 B 独立于 A．概率性独立的意义即是说，一事件的概率不受另一事件发生与否的影

响.

根据前面概率的乘法定理得知,若事件 B 独立于 A,则事件"A 与 B"的概率等于事件 A 的概率乘以事件 B 概率:

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.2.15}$$

设 A,B 皆非不可能事件,若 B 独立于 A,则必然 A 独立于 B,也就是说,A,B 互相独立. 其次,若 A,B 互相独立,则 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 也互相独立.

§ 1.3 随机变量及分布函数

前面叙述了事件、概率等一些基本概念，这里还要进一步谈谈前面介绍过的随机变量. 如前所述,随机变量是随机试验的结果(也称随机事件)的一个数量性表征,是概率论中的一个重要概念. 我们用 ξ,η,ζ 等符号来表示随机变量. 下面举例说明随机变量的意义.

先看一个机器零件抽样检查的例子，某工厂质量检查员每天从大量生产的零件中任抽二件,进行废品检查. 如果该机器零件可分为废品与正品两类,分别以 A 和 B 表示,将这种抽取二件产品进行检查的结果,视为随机事件 e,那末它必定是下述 e_1,e_2,e_3,e_4四个基本事件之一:

$$e_1=AA$$
$$e_2=AB$$
$$e_3=BA$$
$$e_4=BB$$

其中等式右边的意义是:第一个字母表示第一个零件的状态,废品为 A,正品为 B;第二个字母表示第二个零件的状态,同样也是废品为 A,正品为 B. 如 e_3 表示第一个抽得为正品第二个抽得为废品,余下类推.

若用 p 表示一个零件为废品的概率,$q=1-p$ 表示为正品的概率,那末因为被抽到的第一个零件是废品与否并不影响第二个的状态,所以可以由概率的乘法规则得各事件 e_1, e_2,e_3,e_4 的概率:

$$P(e_1)=p^2$$
$$P(e_2)=pq$$
$$P(e_3)=qp$$
$$P(e_4)=q^2 \tag{1.3.1}$$

今以 ξ 表示每一种检查结果中所含废品件数,譬如当检查结果为 e_2 时,ξ 等于 1,因为事件 e_2 出现时,被抽到的二个零件有一个是废品. 由此可知变量 ξ 是事件 e 的函数,即 $\xi=f(e)$. ξ 的数值如下:

$$\xi_1=f(e_1)=2$$
$$\xi_2=f(e_2)=1$$
$$\xi_3=f(e_3)=1$$
$$\xi_4=f(e_4)=0$$

上面 ξ_1 至 ξ_4 是变量 ξ 所能取的四个数值.

在统计学问题中经常考虑变量 ξ 小于某一定值 x 的概率．例如，$x=1.5$，从 ξ_1 至 ξ_4 四个数值可以看出，小于 1.5 的只有 ξ_2,ξ_3,ξ_4 三个，换句话说，要 $\xi<x$ 这个复合事件出现，只要基本事件 e_2,e_3,e_4 三个之中有一个出现即可．因为 e_2,e_3,e_4 是互斥事件，由概率的加法规则可得 $\xi<x$ 这个事件出现的概率：

$$\begin{aligned}P(\xi<x)&=P(\xi<1.5)\\&=P(e_2+e_3+e_4)\\&=P(e_2)+P(e_3)+P(e_4)\\&=pq+qp+qq\\&=2pq+q^2\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

值得注意的是 x 若为 1.6，则 $P(\xi<1.6)$ 之值与 $P(\xi<1.5)$ 之值是相同的，因为使 $\xi<1.6$ 这个复合事件出现的仍只有 e_2,e_3,e_4 三个．反之，若是 $x=2.1$，则

$$\begin{aligned}P(\xi<x)&=P(\xi<2.1)\\&=P(e_1+e_2+e_3+e_4)\\&=pp+pq+qp+qq\\&=(p+q)^2\\&=1\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

从以上的讨论知道 $P(\xi<x)$ 之值完全由 x 之值所决定，所以 $P(\xi<x)$ 可以看成是 x 的函数，这个函数以 $F(x)$ 表示，即

$$P(\xi<x)=F(x)\tag{1.3.4}$$

这个函数中的 x 可以是任何实数．显然，若 x 为小于或等于 0 的实数，则 $F(x)$ 之值为 0，因为此时 $\xi<x$ 是不可能事件．x 大于 2 时，$F(x)$ 之值为 1，因为此时 $\xi<x$ 是必然事件．图 1.3.1 画出了函数 $F(x)$ 的图形．图上各线段的实心点表示该点属于函数 $F(x)$ 的图形，空心点表示该点不属于函数 $F(x)$ 的图形．如 $x=2$ 时，$F(x)$ 之值应由 $x=2$ 上面的实心点的高度来表示，而不是由空心点的高度来表示．此图中采用 $p=\frac{1}{2}$．若 $p\neq\frac{1}{2}$，则图形稍有差别，读者可根据 (1.3.2) 式画出来．

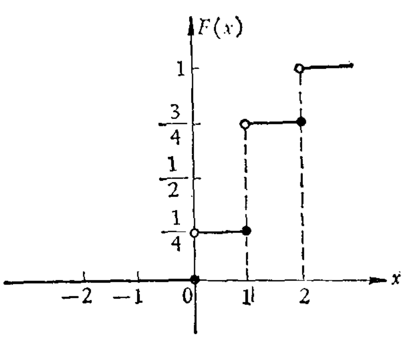

图 1.3.1

在工程问题中，函数 $F(x)$ 还有另一种情况．例如，以变量 ξ 表示某种机器零件的口径．在一定的生产条件下，所加工的该种零件的口径并不是固定不变的，而随着偶然性因素的瞬息变化每个零件的口径也有波动．根据对于工程问题的经验，在一定的生产条件下，口径 ξ 小于某一实数 x 的概率 $P(\xi<x)$ 可由下列积分公式表示：

$$P(\xi<x)=F(x)=c\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\,dz\tag{1.3.5}$$

其中 $c>0,\sigma>0$ 及 a 都是常数．这种函数的图形就与图 1.3.1 很不相同．图 1.3.2 是其中的一种形状(对应于某一组 a,σ)．这种函数在工程问题中占特别重要的地位，称为正态分布函数，§ 1.6 中将作进一步的介绍．

由上面两个例子我们应指出：作为随机事件之数量性表征的变量ξ称为随机变量，而函数$F(x)$则称为随机变量ξ的概率分布函数，或简称分布函数．分布函数的意义就是“ξ取小于x之值”的事件的概率，用公式表示为

$$F(x)=P(\xi<x) \tag{1.3.6}$$

用一句话来概括，则可以说：随机变量就是一个其数值随着机会而改变，并且具有一定的概率分布函数的变量．

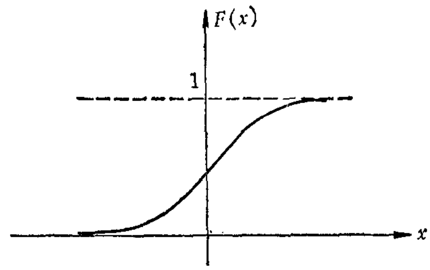

图 1.3.2

从上面引入的分布函数的定义，容易看出任何随机变量的分布函数具有如下几个性质：

(1) 若$x_1<x_2$，必有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$．即$F(x)$为单调非降函数．

因为

$$(x_1\leqslant\xi<x_2)+(\xi<x_1)=(\xi<x_2) \tag{1.3.7}$$

且事件$(x_1\leqslant\xi<x_2)$与$(\xi<x_1)$互不相容，应用概率加法定理，有

$$P(x_1\leqslant\xi<x_2)+P(\xi<x_1)=P(\xi<x_2) \tag{1.3.8}$$

由此得

$$P(x_1\leqslant\xi<x_2)=P(\xi<x_2)-P(\xi<x_1)=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.3.9}$$

因$P(x_1\leqslant\xi<x_2)\geqslant 0$，故$F(x_2)\geqslant F(x_1)$．

(2)
$$0\leqslant F(x)\leqslant 1 \tag{1.3.10}$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1 \tag{1.3.11}$$

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0 \tag{1.3.12}$$

(3)
$$F(x)=F(x-0) \tag{1.3.13}$$

这里$F(x-0)$表示函数$F(x)$在点x处的左极限．即$F(x)$是个左连续函数．其说明如下：

固定(1.3.9)式中的x_1，令x_2趋向于x_1，得

$$F(x+0)-F(x)=P(\xi=x) \tag{1.3.14}$$

然后再固定x_2，令x_1趋向于x_2，得

$$F(x)-F(x-0)=0 \tag{1.3.15}$$

(1.3.15)式说明分布函数$F(x)$对于每个x值都是左连续的．而(1.3.14)式说明每当$P(\xi=x)>0$时，$F(x)$在点x处右不连续，且在该处有一个高度等于$P(\xi=x)$的跳跃；反之，若$F(x)$在x处连续，则$P(\xi=x)=0$．

在大多数工程应用问题中，我们只遇到离散型和连续型两类分布函数，下面作一简单的说明．

若随机变量ξ只能取有限多个数值或可数无穷多个数值，并且对应于这些值有确定的概率$p_1, p_2, \cdots$，即

$$P(\xi=x_k)=p_k \qquad i=1,2,\cdots \tag{1.3.16}$$

则称随机变量ξ是离散分布的．例如上面所述机器零件废品检查的例子中，ξ代表二个

零件中所含废品件数．因为每次抽样只检查二个零件，那末 ξ 至多等于 2．此外，ξ 也可以等于 0 或 1．就是说，ξ 只能取 0，1，2 这三个数值．这样的随机变量就属于离散型的．

一个离散型随机变量 ξ 所能取的值设以 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 来表示，那末对 ξ 的完全的概率描述只要知道 $p_k = P(\xi = x_k)$ 就够了．因为此时 ξ 的分布函数便可由下式给出：

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum p_k \tag{1.3.17}$$

其中求和范围遍及所有使 $x_k < x$ 的那些 k 上．

离散型随机变量的分布函数是不连续的．在 ξ 所能取的值 x_k 上跳跃上升，跳跃的值等于 p_k．在其余的 x 处则为连续函数，即跳跃值为 0．

再考虑前面所谈机器零件口径检查的例子，ξ 代表零件的口径．这是另一种随机变量，与上述离散型随机变量不同，称为连续型随机变量．正如例中所表明的那样，对这种随机变量存在着一个非负函数 p，使对任何实数 x，恒满足下述等式：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du \tag{1.3.18}$$

这里 $p(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$F(x)$ 是一个分布函数，函数 $p(x)$ 称为连续型随机变量 ξ 的概率密度函数．

在有关的工程技术问题中，$p(x)$ 通常是连续函数，较少碰到 $p(x)$ 在其定义域内有不连续点的情形．但从连续型随机变量的定义来看，则只要求 ξ 的分布函数 $F(x)$ 能够表示为上述积分，那末 ξ 便是一个连续型随机变量，并没有要求在 $p(x)$ 的定义域内不能有一个不连续点．

概率密度函数 $p(x)$ 具有下列性质：

(1)
$$p(x) \geqslant 0 \tag{1.3.19}$$

(2) 对任何二实数 $x_1 < x_2$，恒有

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \tag{1.3.20}$$

特别应当指出，如果 $p(x)$ 在点 x 处连续，则略去高阶无穷小后，有

$$P(x \leqslant \xi < x + dx) = p(x)\,dx \tag{1.3.21}$$

(3)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 \tag{1.3.22}$$

除了离散型和连续型随机变量外，还有其他类型的随机变量，此处不讨论了．

§ 1.4 随机变量的特征数字——数学期望、方差

上节介绍了随机变量的意义及其在工程技术中经常出现的两种类型：离散型及连续型．对于一个随机变量来说，分布函数是它最完善的描述．当人们知道一个随机变量的分布函数时，不仅能知道该随机变量取哪些值，还能知道它以什么概率取那些值．但在许多工程技术问题中，往往只需要知道这个随机变量的几个特征数字，能反映该随机变量的变化值的集中位置及离散程度就够了，在求取生产过程的数学模型时，最常用的特征数字是数学期望和方差．

数学期望 数学期望表示随机变量的数值大小，也就是说明它在数值坐标轴上的集