莫绍揆 著

重庆出版社出版

# 质点几何学

（川）新登字010号

责任编辑　夏树人
封面设计　金乔楠
技术设计　刘黎东

莫绍揆著
质点几何学

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新　华　书　店　经　销　重庆印制一厂印刷
*
开本850×1168　1/32　印张 6　插页 7　字数 140 千
1992年9月第一版　1992年9月第一版第一次印刷
印数：1—3,000
*
ISBN 7-5366-1854-9/O·16
科技新书目　270—380

定价：5.85元

## 内容提要

本书以点矢空间（改进的矢量空间）为基础，而讨论仿射几何与欧氏几何（度量几何）。在绪论中列出质点几何的来源，然后先用公理（避开有理数分划等构造方式）而引入实数，其次引入质量概念，将通常的矢量空间变成点矢空间，用极简洁方式（避开矩阵、行列式及一次方程理论）讨论线性相关性，作为几何讨论的基础。在第三章中详尽讨论仿射几何中各种性质，共线性、平行性、直线上的次序、线段与半线、角及多边形的内部、外部，（平行）矢量比及简单比，平面的平行性，共面性，平面的两侧，外积（即容积），仿射变换与射影变换，等等，在第四章中，将距离公理加强而得出内积空间，以内积为基础而讨论欧氏几何的各种性质，如垂直性，正射影，角与多边形的合同，圆与球，圆弧，切线，多边形的相似，面积体积，相似变换，等距变换，三角函数，等等。纯由点矢空间性质而推导几何的全部性质是本书的基本特点。

## Abstract

In this book we treat the affine and Euclidean geometries based on the theory of particle spaces (an improved form of vector spaces). We introduce real numbers via axioms (without constructing them from rationals) and, by supplying the concept of mass to vector spaces we get the particle spaces, We consider the linearly dependence in a very concise manner without any reference to the theories of matrices, determinants or simultaneous linear equations. In chapter 3 We consider thoroughly the main contents of the affine geometry, such as collinearity, parallelism, orders on a line (and on a plane), segments and half-lines, the inner (and outer) parts of an angle and of a polygon, the simple ratio of two (parallel) vectors, parallelism between planes and lines, the two sides in a plane, outer products, affine and projective transformations etc. In chapter 4 we strengthen the distance axioms to obtain inner product spaces, based on which we discuss the whole contents of Euclidean geometry, such as perpendicularity, projection, congruence between angles and polygons, circles and spheres, (circular) arcs, tangents, similarity between polygons, area and volume, similarity transformations and isometric transformations, the trigonometric functions etc. The whole elementary geometry is treated by the sole means of particle spaces.

# 序　言

从欧几里得的几何公理系统问世以来，已有两千多年了，它经历了长久的演变过程，受到了种种的简化和改进。但总的说来，这种几何的推导过程很少有系统，几乎是每题一法，技巧性极强，初学者望而生畏，每每求助于解析几何。但解析几何的处理方法迥然不同，建立坐标系以后，把一切几何现象、几何关系都化为代数现象代数关系。用代数方法求得答案以后，再改用几何语言而陈述。这样一来整个过程（除头尾两处“翻译”外）可以说与几何无关，更何况计算过程每每繁琐冗赘，极易导人于错误。这种现象是大家有目共睹的了。

自线性代数兴起以来，应用矢量理论于几何，获得极大的成功。可以说它基本上不必借助于坐标制，直接从矢量本身的性质（它可以说是几何性质）来处理问题，可以利用代数方法的长处，而处处符合几何直觉，有几何直觉的帮助。因此现在使用线性代数来讨论几何问题的趋势，可以说是大势所趋无法阻挡的了。

但是，目前的线性代数（目前的矢量理论）要用来处理几何问题，还有种种大缺点很难令人满意，可以摘要列举如下。

使用矢量理论于几何，目前有两种方式。其一是对仿射几何的，其二是对射影几何的。

对仿射几何而言，除矢量空间外，引入一个“原点”，于是几何空间中每一点都对应于以原点为始点而以该点为终点的矢量。

换言之，每一点对应于一个矢量，根据矢量的计算而处理几何问题。这个办法的缺点是：矢量既对应于有向线段，又对应于点，一身而两任，每每左右支绌，力不从心。例如，零矢量是非常特殊的矢量，它所对应的点(即原点)却是可以任意选定的，没有任何特殊性质的；又如矢量的长度、内积、方向以及加减等都只能就有向线段而言，很难把这些概念应用到点去；但是，由两矢量所生成的矢量空间（即直线）却被视为点的集合而不是有向线段的集合；这样矢量时而指有向线段，时而指点，没有任何的标准。在矢量理论中非常重要的“线性子空间”的概念竟然只是一种很特殊的（通过原点的）子空间，而在几何中占极重要地位的子空间（有人叫做仿射子空间）在矢量理论中竟然不成空间，几乎无人提起。这种种怪现象，不正说明目前的处理方式（引入“原点”法）不够理想吗？

对射影几何而言，使用齐次矢量，凡互为非零倍量的两矢量对应于同一个点（零矢量不对应于任何点），这样，上述的各种怪现象基本上可以克服了。但又引起一个新问题，那就是：矢量$\boldsymbol{a}$与$2\boldsymbol{a}$对应于同一个点，矢量$\boldsymbol{b}$与$3\boldsymbol{b}$也对应于同一个点，但$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$却对应于不同的点（因这两矢量并不互为倍量）。这种怪现象是无法令人接受的。

本书引入质点几何便是想继承并扩大线性代数（尤其是矢量理论）的优点而克服上面所提到的（以及另外一些尚未提到的）各种缺点。值得指出，这种尝试本书并非首创，格拉斯曼(Grassmann)的Calculus of Extension(伸量演算)便已做了很多工作，最近有若干本书也朝相同的方向加以尝试，本书可以说是在他们工作基础之上加以总结的。但可以说一句，总结成目前的形式的，本书当属首创，作者并未见有别的书给出过同样的发展形式。

本书所论的几何内容限于初等几何（而且主要是初等平面几

何），比较高深一些的理论，例如一般的二次曲线与二次曲面（除圆与球以外）理论，线性变换的标准表示及其分类，等等，本书全未涉及. 目的是想用质点几何比较系统而全面地开展初等几何，比较它与旧体系（欧几里得体系）的优劣，以使初学者能够很快地懂得并熟悉质点几何，用以代替旧系统.

本书的论述以及推导，力求浅近明白，不作繁琐计算，以便处处可以得到直觉的帮助. 例如在讨论线性相关性时，一般线性代数的书都须利用一次方程组有解的条件，我们完全避免了，又如讨论线性变换时，一般线性代数的书都离不开坐标变换从而都须利用矩阵，我们也完全避免了. 一般书先引入矢量的内积再讨论长度，看来似乎方便一些，但内积概念很难直接由直觉掌握，先引进它无异天外飞来，我们则先引入长度再讨论内积，便很容易接受了. 凡此等等，都是本书极力注意的. 容积比一节也是别的书所未重视的，而在本书中它起了极大作用.

另外，由于质点几何的引入，很多记号可以改进. 例如矢量$AB$将记为$B—A$（不再用记号 $\boldsymbol{AB}$），又如半线$AB$将记为$\vec{A}B$（也废除$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$记号），而除去$\vec{A}B$后剩下的半线将记为$\overleftarrow{A}B$，凡此都既方便也易于记忆和运用，我们特向读者推荐.

以上各点，如有不当敬请读者批评.

莫绍揆　1990年6月

# Particle Geometry

Mo Shaokui

Chongqing Publishing House

莫绍揆，广西桂平人，1917年8月生。1939年7月在中央大学理学院数学系毕业，后在中央大学、中山大学等校任助教与讲师，1947年留学瑞士，入联邦高级工业大学就读，1950年回国，在南京大学数学系任副教授与教授至今。主要著作有：《数理逻辑导论》、《递归函数论》（上海科技出版社）、《数理逻辑教程》(华中理工大学出版社)、《递归论》、《算法论》（科学出版社)、《数学基础》(高等教育出版社) 等。

# 目　　录

# Contents

# 绪　论

数学经常要从自然科学吸收其养分来壮大自己．不但在古代如此，在近代亦如此；在近代不但高等的新学科如此，连初等的早已成熟的古老学科亦如此．例如，最古老的初等几何学便可以从力学中的"质点"理论得到极大的启发，从而使自己的面貌为之一新．

在力学中，我们经常讨论质点．所谓质点是只有位置但不讨论（从而认为它没有）其大小（长短、面积、体积）的东西，因此可把它看成一"点"．但它又有质量，从而叫做质点．

对一个质点，可用一实数 $k$ 乘它（这叫做倍法），其结果(当 $k\neq 0$时)仍是一质点，位置与原质点同，但质量则倍大为$k$倍．

如果一系统中有$P,Q$两质点，其质量分别为$m,n$．则这系统(当$m+n\neq 0$时)等于一个新质点$R$，其质量为$m+n$，其位置则在$PQ$连线上，满足下条件：$\overline{PR}:\overline{RQ}=n:m$．这个$R$所在的位置叫做$P,Q$的重心的所在位置．

我们完全有理由认为质点$R$是由质点$P,Q$经过一种运算而得的结果．这个运算可以叫做加法，写为$+$．因此我们有：当$R$为$P,Q$的重心时，$R=P+Q$．

由于任意两质点必有一重心，故任两质点相加必有一和作为其结果．另外我们显然有：$P+Q=Q+P$(可换律)以及$(P+Q)+R=P+(Q+R)$(结合律)．

经过实验总结成的力学的定律还可得：如果$P$的质量大于$Q$

的质量，恒有质点$R$使得$P=Q+R$，可记为$R=P-Q$，读为“$P$减$Q$”，而由$P,Q$求得$R$的运算可叫做减法．显然它是加法的逆运算．由于相加时质量须相加，故相减时质量亦应相减．

我们能否把减法看作加法呢？即把$P-Q$看作$P+(-Q)$？这时必须把$-Q$看作具有负质量的质点．在力学中我们只有正质量而没有负质量，所以这样看是不成的．但是近代物理学已经发现有“反物质”，反物质的质量完全可以看作负质量．我们还可以不必拉扯到反物质，即在初等力学中亦可以考虑负质量的引入．

在力学中，对质点的质量所作的考虑，不外是考虑地球对它的引力(所谓重力)．质量大的重力亦大．如果我们设法对某个质点赋以“浮力”，那末该质点的重力（从而质量）便相应减少．当浮力大到与重力相等时，该质点实际上便没有重力，等于具有质量0．当浮力大于其重力时，该质点实际上便具有负质量了．要安置浮力于一质点上，这是极易办到的．因此我们没有理由限于只讨论正质量的质点，而可以讨论其质量为任意实数（可正可负可0）的质点，这对今后的讨论有极大的方便．

由于负质量的引入，出现了一个新情况．即当$P,Q$的质量互为反号数时，$P+Q$是什么？当然，$P+(-P)=O$（零质点）．但$P,Q$不同位置（而质量之和为零）时，$P+Q$是什么？

在力学上，如果在同一处放一质点以及质量相反的另一质点，其结果当然是平衡（亦即$P+(-P)=O$）．但在不同位置处各放一个（质量彼此相反的）点，其结果绝非平衡而是组成一个力偶．力偶与一质点相加，结果相当于在另一位置上的（同质量的）质点，力偶与力偶相加，结果（基本上）是按平行四边形规律而合成的新力偶．总之，质点与力偶是紧密相关的两个概念，可以而且应该合起来，一起研究．

当我们把质点用点表示，把力偶用矢量表示时，这些运算的研究恰巧便把整个初等几何的内容都表示出来了．按这种方式而

研究的几何便叫做质点几何．本书的目的便在于从头地而且有系统地介绍质点几何．

由上面的简单介绍，可以看到在质点几何中，实数是不可缺少的．因此我们先有系统地介绍（或总结）实数的性质，其次介绍质点的运算，用公理刻画它，并系统地介绍一个非常重要的概念（线性相关性）．这两者介绍完毕以后，我们便开始研究几何学本身了．我们不限于平面几何，但却以平面几何为主，对立体几何只简单地介绍点滴结果．

上面我们“把力偶用矢量表示”，这比较欠缺直观性，初学者比较难于理解，为此这里再用另法作出阐释．

虽然本书并不假定读者已经知道矢量的运算，但为了说明为什么要发展质点几何，我们仍从矢量的运算开始．

我们现在总是把矢量理论应用到仿射（及欧氏）几何去．先固定一个原点$O$，然后把点$P$对应于位置矢量$oP$，而原点对应于零矢量．然后把问题中凡牵涉到“点”的都换写为其对应的位置矢量，利用矢量运算得到结果后，把有关矢量的始点移到原点去写下其相应的终点作为解答．这样，矢量既对应于有向线段，又对应于点，很不妥当．何况这时“点”根本不是研究的对象，不过由于别人提问时用到“点”字，答案中也要求用“点”来回答，所以才写出“点”字罢了．显然这种作法值得考虑．既然已经把“点”与“矢量”一一对应了，为什么不把“矢量”的运算改为“点”的运算呢？

有一个现象非常突出，值得人们注意，即：在矢量运算中，各位置矢量的“终点”有时与原点的选择有关，有时则否．例如在(1) $OC=OA+OB$中，$C$点与原点$O$的选择有关，改取别的原点$o'$后，我们没有$O'C=O'A+O'B$，而只能有(1′) $O'C'=O'A+o'B$($c'$与$c$不同)．但如果我们写成 (2) $2OD=OA+OB$后，即使换成别的原点$O'$，我们仍有(2′) $2O'D=O'A+'OB$，这是因为我们有：(3) $2O'O=O'O+O'O$，由(2)(3)相加即可得(2′)．一般