

气体动力学基本原理

C 编

非定常气体动力学的  
一维处理法

〔美〕A. 塔特劳维兹 著

徐华枋 译

科学出版社

1988

## 内 容 简 介

本书是美国 H. W. 埃蒙斯教授主编的《气体动力学基本原理》\*一书的 C 编。它详细地阐述了非定常气体的一维处理法。以连续方程和运动方程作为处理此问题的两个基本方程，先把它们加以简化用于等熵气体小波幅平面波，以说明基本的波的传播特性；再把非线性复原，以显示其在大波幅扰动问题里非线性波的运动特性；以后逐步增多物理因素，对弱激波、激波和很强大的爆炸波做了论述。最后讲述了处理中等强度激波的数值算法。

本书可供高等院校流体力学专业的学生、教师及喷气发动机、高速风洞等方面的科技人员参考。

\* 该书系[美]《高速空气动力学与喷气推进》丛书第 III 卷。

H. W. EMMONS Ed.

FUNDAMENTALS OF GAS DYNAMICS

PRINCETON UNIVERSITY PRESS

1 9 5 8

(SECTION C)

气体动力学基本原理

C 编

非定常气体动力学的一维处理法

[美] A. 堪特劳维兹 著

徐华舫 译

责任编辑 谈德颜

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1988 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1988 年 2 月第一次印刷 印张：2 3/4

印数：0001—2,100 字数：68,000

ISBN 7-03-000271-7/O·72

定价：1.25 元

# 目 录

C.1. 引言 .....	1
C.2. 基本方程 .....	3
C.3. 声波 .....	6
平面声波(6) 球面声波(9) 声波的波幅(10)	
C.4. 大波幅的平面等熵波 .....	11
C.5. 激波 弱激波的近似公式 .....	19
C.6. 包含有弱激波的简单波的传播 .....	26
弱激波的增强与衰减(26) 脉冲面积(28) $N$ 波(30) 包含有 弱激波的脉冲波的其他处理法(32)	
C.7. 在定常的管道流动中正激波的形成及其稳定性 .....	35
引言(35) 叠加在管道流动上的有限的平面扰动(36) 脉冲 面积的守恒律(38) 脉冲波的形状(40) 被扣留的脉冲波(42) 在拉伐尔喷管中激波形成问题上的应用(45) 管道流动中激波 的运动和稳定性(47) 过声速的光滑减速过程的稳定性(48) 管道流动中激波位置的稳定性(49) 在超声速扩压器上的应用 (49)	
C.8. 十分强大的外向爆炸和内向爆炸 .....	51
强波的相似律(51) 外向爆炸(51) 内向爆炸(53)	
C.9. 一般的问题. 沿特征线的数值积分法 .....	59
引言(59) 特征线(59) 变管道截面及变熵值(62) 激波(64) 接触突跃面(65) 激波和激波的碰撞或激波和接触突跃面的碰 撞(66) 边界条件(68) 变热容量和滞后的热容量(70)	
C.10. 压力波在热机中的应用 .....	73
引言(73) 内燃机(73) 气波机(74)	
参考文献 .....	76
名词索引 .....	80

## C.1. 引 言

本编要讲的是这样一类气流问题：气体的流速和热力状况在足够的准确度之内只取决于一个空间坐标  $x$ ，和时间  $t$ 。在一些管道流动问题里，流动的非均一性（在  $y, z$  方向），无论是原有的还是因管壁扩张或弯曲而产生的，或者是因摩擦或传热而产生的，只要这些非均一性可以略去不计，或是可以用修正的办法加以处理，那么，用一维处理法都能得出很有用的结果来。外向的爆炸过程（或是反过来，内向的爆炸过程），凡大致具有轴对称或柱对称性的，也都可以作一维处理。

在本编中，我们将假设状态方程是完全气体的状态方程。这样一来，未包括在内的最重要的问题是在液体和固体中的爆炸现象。在推导基本方程（方程 2.8 和 2.9）时，还假设气体的分子数和热容量都是常数。在处理一些特殊问题时，需要的话，这个假设可以不用。

从历史上来说，这方面的研究是随着早期的声学理论发展起来的。泊松 (Poisson)<sup>[1]</sup>和恩肖 (Earnshaw)<sup>[2]</sup>首先把声学理论推而及于向一个方向传播的有限幅度的扰动问题。黎曼 (Riemann)<sup>[3]</sup>提出一个理论来，适于用来计算向两个方向传播的有限波幅平面波。他看到了压缩波的变陡过程，变到后来终于在完全流体中形成突跃。这类突跃变化用守恒律处理，以及这些突跃和爆炸所产生的激波之间的关系是兰金 (Rankine)<sup>[4]</sup>和雨果纽 (Hugoniot)<sup>[5]</sup>提出来的，这就完成了这一个题目的主要原理。

在第二次世界大战期间，这个题目的研究得到相当大的推动，这有两个原因。首先，人们对于爆炸以及由此而生的压力波有相当大的兴趣。战时在古朗 (Courant) 和弗里德里希斯 (Friedrichs) 领导之下的一批人在这个方面所进行的研究工作，已经总结

在他们合著的那本书<sup>[6]</sup>里了。该书对黎曼的处理法作了相当多的推敲，并包含各种实例的应用。该书对于这些问题还从数学观点作了许多讨论，凡对问题的数学方面特别有兴趣的，会在该书中找到有关特征线法的数学理论更全面得多的讨论，远较此处所要讲到的为丰富。（可以参阅本丛书第六卷第B编）。

对有限波幅的波产生兴趣的第二个原因是在战时德国人造出了脉冲式喷气发动机（什米特（Schmidt）管），这种发动机是用来装备 V-1 飞弹的。为此，发展出来了一套可以作数值积分的特征线法，一如从前普朗特（Prandtl）和布赛曼（Busemann）<sup>[7, 第49-509页]</sup>处理定常二维超声流的特征线法一样。

这种数值积分法（第9节），可以把许多为解析法所不能处理而有实际重要性的因素包括进去，不过也象其他的数值解法一样，所得结果只是一些具体问题的数字答案，不能清晰看出各作用因素的结果，而用解析法处理问题有时是能够看清的。

本编的整个安排如下：在第2节里推导一般的方程，在第3节里把这些方程加以大大的简化，使之显示出波传播的性质来，然后一步步逐渐增多物理因素，使之显示出一维流的其他性质来。

这一方面的参考书，联合飞机公司（United Aircraft Corporation）列出了一张很好的书目表，见文献[8]。

## C.2. 基本方程

我们的基本假设是，气体的速度  $u$  和热力状况都只决定于一个空间坐标  $x$  和时间  $t$ 。也就是说与  $x$  方向垂直的平面（法向平面）必是等速平面，也是状况参数为常数的平面。这个假设还包含着这样一个内容：压力所产生的任何速度变化必是平行于  $x$  方向。所以我们可以再作一个公设：流速到处都是平行于  $x$  轴线的<sup>1)</sup>。

现在可以写出连续方程（质量守恒）。取一块由流线和法向平面围成的体积微元来看，流入的质量流量和流出的质量流量之差等于此体积微元中积存的质量的增加律，这句话可以表为下列算式

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0 \quad (2.1)$$

式中的  $\rho$  和  $u$  分别是气体的密度和速度， $A$  是这块体积微元的法向截面积。注意，我们所考虑的是不随时间变化的流线，所以  $A$  只是  $x$  的函数<sup>2)</sup>。

运动方程也可以很简单地写出来，如果我们考虑只有压力作用在流体上（即如果略去粘性力和彻体力）。随着一个流体微团看去，它的速度随时间的变化率是

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} \quad (2.2)$$

（ $D$  表示随微团的导数，而  $Dx/Dt$  就正是微团的流速）。体积为  $dV$

- 1) 采用这个公设，我们就排除了具有与  $x$  相垂直的流速的那一类一维流，虽然它的速度也可以只是  $x$  和  $t$  的函数。例如从柄的中心向外传播的柱波便不包括在内。
- 2) 这样就不包括弹性管中流体的压力波传播问题。弹性管中波的传播可以沿特征线用数值积分处理（参看古德利 Guderley<sup>17)</sup>）。

的一块微元流体的动量变化是  $\rho(Du/Dt)dV$ 。作用在这块微团上的净压力是  $-(\partial p/\partial x)dV$ 。使作用力等于动量变化,得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

注意,粘性力在这里虽是被略去了,但一般地说来它总是存在的(见第D编和第H编)。不过粘性力总是很小的,除非速度在一个分子平均自由程里有很显著的变化。这样的迅速变化,发生在例如激波的内部,以及稀薄气体的流动问题里。在我们这个分析里,激波将另行处理,此外,我们将只处理平均自由程和问题中的其他尺寸相比较都是十分微小的那些问题。

在一个热力学上可逆的基本过程中,单位质量的熵变量是

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{de + pdv}{T} \quad (2.4)$$

式中  $dq$  是加入的热量,  $de$  是内能的变化,  $dv$  是比容的变化,  $T$  是绝对温度。对于完全气体,此式可以写成

$$\begin{aligned} ds &= c_v d\ln T + \mathcal{R} d\ln v = 2c_v d\ln a - \mathcal{R} d\ln p \\ &= 2c_p d\ln a - \mathcal{R} d\ln p = c_p d\ln p - c_p d\ln p \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中  $a = \sqrt{(c_p/c_v)\mathcal{R}T} = \sqrt{\gamma\mathcal{R}T} = \sqrt{\gamma p/\rho}$  (后面将证明这个  $a$  就是当地声速),  $c_v$ ,  $c_p$  和  $\mathcal{R}$  分别是单位质量的热容量和气体常数。因熵只是热力状况的函数,所以即使变化过程是不可逆的,方程 2.5 (或者该式的积分形式)仍可使用。为使熵变量具有意义,只要初始状况和终了状况都处于平衡状态就行了。(否则,不可逆过程熵的变量就不能按可逆过程去计算。)

最好把连续方程(方程 2.1)和运动方程(方程 2.3)改写成以热力状态参数  $a$  和  $s$  替代  $p$  和  $\rho$  的形式。用上述方程 2.5 的关系,方程 2.1 变成

$$\begin{aligned} n \frac{\partial \ln a}{\partial t} + un \frac{\partial \ln a}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d \ln A}{dx} \\ - \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中的  $n = 2c_v/\mathcal{R}$ ，即气体分子的自由度的经典的数目。方程 2.3 用了完全气体律  $p/\rho = \mathcal{R}T = a^2/\gamma$  之后成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 n \frac{\partial \ln a}{\partial x} - \frac{a^2}{\gamma \mathcal{R}} \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

我们现在假设  $c_v$  和  $c_p$  都是常数，即都与温度无关<sup>1)</sup>。这两个方程还可以用黎曼<sup>[3]</sup>提出的变换法改变成为一种更有用的形式。以  $a$  乘方程 2.6，然后和方程 2.7 相加，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (na + u) + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} (na + u) + ua \frac{d \ln A}{dx} \\ - \frac{a^2}{\gamma \mathcal{R}} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{a}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

以  $a$  乘方程 2.6 然后减去方程 2.7，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (na - u) + (u - a) \frac{\partial}{\partial x} (na - u) + ua \frac{d \ln A}{dx} \\ + \frac{a^2}{\gamma \mathcal{R}} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{a}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

这两个方程用于本编中所要处理的多数问题已经够概括的了。不过，最好先把这两个方程大加简化(用于平面的，小振幅的等熵扰动)以显示其基本的波传播特性(第3节)。然后再把非线性项复原，这些非线性项在大振幅的扰动问题里是重要的，这样以显示出非线性的波运动的特性(第4节)。激波(第5节)是由大振幅的扰动形成的，放在第6,7节中讲，先讲适用于弱激波的近似分析法，然后在第8节里讲很强的激波，再后面讲处理中等强度的激波的数值算法(第9节)。

1) 关于热容量为变数的气体，请参看第9节。



## C.3. 声 波

### 平 面 声 波

方程 2.8 和方程 2.9 最突出的性质是代表波的传播<sup>1)</sup>。这些性质最好用等熵气体中的波幅十分小的平面波来说明。这时  $A$  和  $s$  都与  $x$  或  $t$  无关, 这样方程 2.8 和方程 2.9 的最后三项就都不存在了。小波幅的限制是指流体中各处的速度扰动和  $a_0 = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_0}$  相比都是很微小的。

可以看到  $na$  的变化和  $u$  的变化是同一数量级, 因为这两个变量的变化在方程 2.8 和 2.9 中处于对称的地位(在  $s = \text{const}$  的条件下)。记未经扰动的气体温度为  $T_0$ , 并采用与未扰气流具有同一运动速度的坐标系。略去  $u$ , 并略去  $a$  的变量(和  $a_0 \equiv \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_0}$  对比可以略去), 方程 2.8 和方程 2.9 就变成了<sup>2)</sup>

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

及

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - a_0 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

这里我们用的符号是  $P = na + u$ ,  $Q = na - u$ 。

- 1) 这一节并不想处理声波问题, 只是想说明一下波的传播。关于声波的研究请参看瑞利 (Rayleigh) 著的书<sup>[10]</sup>或毛斯 (Morse) 著的书<sup>[11]</sup>。
- 2) 这两个方程分别对  $x$  微分(并乘以  $a$ )和对  $t$  微分, 便可得到通常形式的波动方程。如将得出来的方程加一加, 减一减, 以消去混合偏导数, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

这些就是波动方程。  $u$ ,  $a$  或  $\rho$  也可以得到类此的方程。

方程 3.1 和方程 3.2 的通解可以这样求得：有一点以  $+a_0$  速度运动的话，方程 3.1 得出  $P = \text{const}$  的结果来。故

$$P = P(x - a_0 t) \quad (3.4)$$

同理，有一点以  $-a_0$  速度运动的话，方程 3.2 得出  $Q = \text{const}$  的结果来。故

$$Q = Q(x + a_0 t) \quad (3.5)$$

图 C.3 说明了这一特性。这里我们考虑一小块初始 ( $t = 0$  时) 已经扰动的气体，其周围是未经扰动的介质。注意，我们需要对速度和热力变数之一作个规定。而热力参数通过方程 2.5 很容易变成  $a$  的变量，因为  $s = \text{const}$ 。现在根据  $P$  和  $Q$  的意义，可以按给定的初始条件，把这两个量在扰动区 (在扰动区之外  $P = Q = n a_0$ ) 中在  $t = 0$  时的值求出来。然后在以后全部的时间，从我们的解 (方程 3.4 和 3.5) 上可以求得任何一点的  $P$  和  $Q$  值。由此可以算出一切  $x$  和  $t$  之下的  $u$  和  $a$  来，因

$$u = \frac{P - Q}{2}, \quad a = \frac{P + Q}{2n}$$

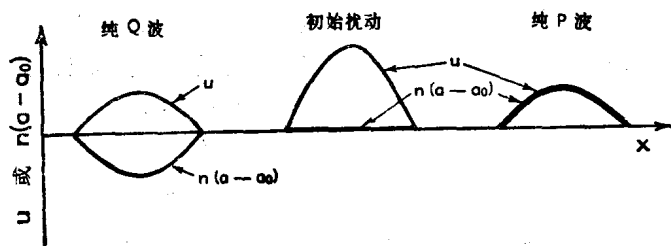


图 C.3. 表示从一块有限的初始扰动区 (中间) 声波的传播情况。该初始扰动只是一个简单的速度  $u$  的扰动，温度没有扰动 (即  $a$  没有扰动)。经过时间  $t$  后扰动的情况画在两侧。这时中间已没有扰动。

$u$  和  $a$  的一般扰动会造成  $P$  值和  $Q$  值二者的扰动。不过，如果  $u = n(a - a_0)$  的话，那末  $Q$  是不受扰动的；同理，如果  $-u = n(a - a_0)$ ，那末  $P$  是不受扰动的。在这两种场合，我们说这是简单波，分别称为纯  $P$  波和纯  $Q$  波。从图 C.3 推广开来，我们看到，

一个有限的任意扰动区终于分为一个以声速  $a_0$  向  $+x$  方向运动的纯  $P$  脉冲波<sup>1)</sup>，和一个向  $-x$  方向运动的纯  $Q$  脉冲波。

在简单波里，压强的变化和速度是唯一地关连着的，因为按热力学关系(方程 2.5)， $u = \pm n(a - a_0) \cong \pm (a_0/\gamma p_0)(p - p_0) = \pm (p - p_0)/\rho_0 a_0$  (式中的  $\gamma = c_p/c_v$ )。 (+) 号用于纯  $P$  波，(-) 号用于纯  $Q$  波。注意，即使解简单波的问题也需要同时使用方程 3.4 和方程 3.5。不过，这时不是方程 3.5 变成  $Q = Q_0$  (纯  $P$  波)，就是方程 3.4 变成  $P = P_0$  (纯  $Q$  波)。

利用  $P$  和  $Q$  两个量(有时称之为黎曼不变量)的好处在于，即使在任意的非简单波场合，这两个量也是代表在正  $x$  方向和负  $x$  方向运动的扰动。所以， $P$  和  $Q$  在传播中不改变，那是十分普遍的情况，但  $u$  或  $a$  不是不变的，除非是简单波。本编中将充分利用这两个量。

一个声波所传输的功率很容易计算出来。单位时间内一个微团对于邻微团所做的功等于力和速度的乘积。所以在  $+x$  方向经单位面积传输的功率是  $pu$ 。我们把这些功率分成  $(p - p_0)u$  和  $p_0u$  两部分，这里的  $p_0$  是未扰压强。 $p_0u$  项代表净传输的流动功。在流体微团没有净位移的过程里(例如循环的现象)，这一项为零。 $(p - p_0)u$  项称为波的传输能量。对于小振幅的等熵波，有

$$\frac{(p - p_0)u}{p_0} \cong (n + 2) \frac{(a - a_0)u}{a_0}$$

和

$$(p - p_0)u = \frac{\gamma}{4} \frac{p_0}{a_0} [(P - P_0)^2 - (Q - Q_0)^2]$$

于是很清楚了，即使在一般的扰动区里，波的净传输能量也可以分解成两部分：

$$\frac{\gamma}{4} \frac{p_0}{a_0} (P - P_0)^2 \text{ 和 } \frac{\gamma}{4} \frac{p_0}{a_0} (Q - Q_0)^2,$$

1) 脉冲波这个词用来表示空间扰动范围有限的那种传播着的扰动，其邻区都是未受扰动的。

一个向正  $x$  方向运动, 一个向负  $x$  方向运动。

## 球 面 声 波

球面波的声学近似处理可以很容易地用位函数做出来。从位函数的方程开始(见第 A 编的方程 9.8)。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{a^2} u_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{a^2} u_i u_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{A}, 9.8)$$

式中的  $\phi$  是速度位。略去  $u_i \ll a^2$ , 这就变成了声波的方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

用于具有球对称的问题,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2}$$

式中的  $r$  是半径。这个方程的通解可以写为

$$r\phi = f(at - r) + f(at + r)$$

由此得外向波的

$$u = -\frac{f(at - r)}{r^2} - \frac{f'(at - r)}{r}$$

压强可以根据位函数用下式求:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (\text{A}, 9.3)$$

如  $u^2/2$  和其他各项相比较可以略去的话, 则得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{af'(at - r)}{r} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)$$

略去上面  $u$  的方程中的  $1/r^2$  项, 我们可以看到在离开球对称扰源很远的地方, 扰动变成一种简单的前进波, 波所产生的压强和流速都按  $1/r$  衰减。显然这个近似式只能用于十分微弱的爆炸波。维坦姆 (Whitham)<sup>[22]</sup> 做过较好的近似处理, 他把沿每条特征线的流速和压强都展为  $r$  的负升幂序的级数。这样他得到了一个可以用

于在激波上熵增量可不计的那些爆炸波的解。他的处理法和后面第6节要讲的很类似,这里就不细说了。

## 声波的波幅

在结束小振幅扰动的讨论之前,最好举出些声波的波幅的数字。人耳所能听到的最小的周期性的压强变化幅度约是  $10^{-3}$  达因/厘米<sup>2</sup> (频率约为 2000 周)。另一方面人能感觉到的上限压力幅度约  $10^6$  倍于此值。所以通常所说的声音是相当于压强变化在  $10^{-3}$  至  $10^{-3}$  大气压之间的,这就完全肯定了声波理论用小振幅的假设了。

## C.4. 大波幅的平面等熵波

现在我们来考虑流速和声速相比较不是小到可以略去的一些问题。这时，一般地说热力参数 ( $p, T, a, s$ ) 的变化成为很重要的了。我们暂且限于考虑平面等熵扰动。方程 2.8 和方程 2.9 变成

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

和

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

这两个方程和声波方程 (方程 3.1 和方程 3.2) 不同之处在于我们没有略去  $u$  也没有略去  $a$  的变化 (和声速比较)。方程 4.1 和方程 4.2 是非线性方程，因为每个方程的第二项都是因变量的二次方。这两个非线性方程的解也代表波的传播，但与声波不同，现在波形 (即使是简单波) 是在连续变化的。

因  $P$  和  $Q$  都只是  $x$  和  $t$  的函数，我们可以写为

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt \quad (4.3)$$

和

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \quad (4.4)$$

现在我们取一点来看，这一点以速度  $u + a$  在运动，至使方程 (4.3) 中的  $dx$  与  $dt$  之比恰为  $u + a$ ，则从方程 4.1 得到  $P$  的增量为零。同理，以速度  $u - a$  运动，则  $Q$  是不变量。

这些结论可以用一个推进的  $P$  波为例从物理上去理解它。设有一个主要的  $P$  波，在这个波上加一些微小的标记“小花”，即微小

的扰动，这些小花可以用来追踪波的传播情况。因为这些标记小花都是微小的扰动，它们必以相对于当地流体的当地声速（此值和未扰声速有显著的差别）而传播。这些微小扰动是在以不可忽略的流速  $u$  运动着的流体中传播，也就是说，速度  $u$  是主要波  $P$  在小花附近所产生的流速。所以总的传播速度是  $u + a$ 。注意，我们假设标记小花都是纯  $P$  扰动，所以他们是作同方向的运动。于是方程 4.1 和方程 4.2 的结论可以说成这样：当我们以当地的传播速度运动时，黎曼不变量的值是保持不变的。

当考虑一点以速度  $u + a$  运动时，应用方程 4.1（或者更概括一些，用方程 2.8）处理问题，以符号  $\delta^+/\delta t$  表示对时间的变化。而当考虑一点以速度  $u - a$  运动时，应用方程 4.2（或方程 2.9）处理问题，以符号  $\delta^-/\delta t$  表示随该点运动对时间的变化。于是方程 4.1 和方程 4.2 可以写为

$$\frac{\delta^+ P}{\delta t} = 0, \quad (4.5)$$

和

$$\frac{\delta^- Q}{\delta t} = 0. \quad (4.6)$$

处理波传播的问题最方便的办法是把它画在一个  $x, t$  图线上， $x$  为横坐标， $t$  为纵坐标，如图 C, 4a 示。在  $x, t$  图上，具有斜率为  $dt/dx = 1/(u + a)$  的曲线连结  $P = \text{const}$  的点子。这些曲线就称为  $P$  波。同理，具有斜率为  $1/(u - a)$  的曲线是连结  $Q = \text{const}$  的点子，称为  $Q$  波。

注意，

$$u + a = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (4.7)$$

$$u - a = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{Q}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (4.8)$$

借助图 C, 4a，我们用 4.5, 4.6, 及 4.7 诸关系式来解一个简单的推进  $P$  脉冲波的问题。从给定的  $t = 0$  时初始的  $P$  分布以及各

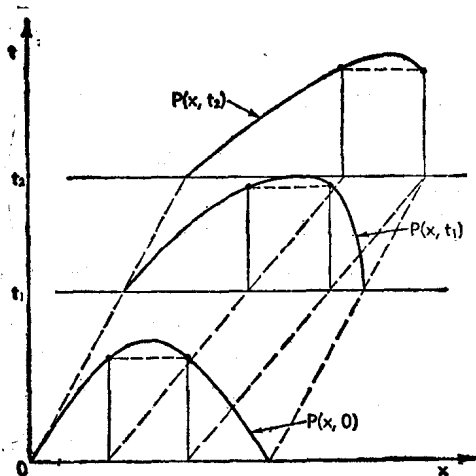


图 C.4a. 表示一个有限振幅的纯等熵  $P$  脉冲波的传播情形. 为方程 4.5 和 4.7 所决定的  $P$  波的形状, 图上画出了  $t=0$ ,  $t=t_1$  及  $t=t_2$  三个时间的曲线. 每一标记小花 (图上用虚线表示的) 所走过的距离是  $(u+a)t$ , 这里的  $u$  和  $a$  是每一小花的当地值. 注意, 初始的和终了的标记都以未扰速度  $u_0$  运动, 所以二者之间的距离保持不变.

点的  $Q - Q_0$  的事实出发, 我们可以追踪脉冲波的以后发展史. 只画出  $P$  波各部分所走过的径线, 问题就可以解出来了.  $P$  波各部分的斜率按给定的初始数据用方程 4.7 计算. 这样就用方程 4.5 和方程 4.6 把各处的  $P$  和  $Q$  ( $= Q_0$ ) 都确定了, 问题也就解决了. 在图 C.4a 上还画出了后来  $t_1$  及  $t_2$  时  $P$  对  $x$  的曲线.

由这张图可以看到, 原给的  $P$  脉冲波形状后来有相当大的变化. 注意,  $P$  脉冲波的一部分变得陡了, 而另一部分则显著地变坦了. 如果我们来看某个固定的  $x$  点上的流动情况, 那末我们看到,  $P$  脉冲中凡随时间上升的部分波形必是越变越陡的, 而随时间下降的部分则波形变坦.  $P$  上升, 表示  $u$  增大,  $a$  增大 (因  $Q = \text{const}$ ), 压强也上升. 所以变陡的部分是压缩的部分, 而变坦的部分则是膨胀的部分. 如果我们把  $+x$  和  $-x$  方向对调一下,  $Q$  和  $P$  也恰好对换一下位置, 所以纯  $Q$  波也是这样, 即压缩的部分不断变陡, 而膨胀部分则不断变坦, 波形这样的改变是微分方程 (方程



4.1 和 4.2) 非线性的最突出的特点。

如果考虑图 C, 4a 上的  $P$  脉冲波在  $t_1$  以后的发展,  $P$  波中的压缩部分最后集中到一起。这就是说带有不同  $P$  值的两段波相遇在一点,  $P$  中便会出现一个突跃面。如果把图线继续画下去,  $P$  就要变成多值的了, 所以突跃面一旦出现了以后, 图线再这样简单的延续作下去, 必导致出现物理上没有意义的结果。

不过, 我们必须注意到, 当  $P$  的梯度开始变得十分陡的时候 (恰在突跃面出现之前), 我们所作的关于略去粘性和热传导的假设就必须修改了。  $P$  中有了很陡的梯度时, 就意味着速度和温度在作迅速的变化, 这时粘性力必然会显著的改变运动方程 (方程 2.3)。此外, 热传导和粘性所造成的机械能的消耗必使熵有显著的变化, 这是必须计及的。这种速度和压强迅速变化的地区称为激波。在第 D 编中将对激波作详细的分析, 在那里会证明, 粘性和热传导很重要的地区, 其厚度却只有数倍分子自由行程那么大。所以在许多场合下, 激波的厚度和问题中的其他尺寸相比较是个微小的量。在本编中 (见第 5 节) 我们将利用激波厚度十分微小的事实来另行处理激波 (直接用各守恒律处理), 并将仍然略去激波以外地区的粘性和热传导。

一个纯  $P$  波的形状的变化, 可以作定量的计算如下。我们拿方程 4.1 对  $x$  取一次导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} \right) \\ - \frac{\sigma^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中  $\sigma = \partial P / \partial x$ , 这里用了  $\partial Q / \partial x = 0$  这个事实。我们的观察固着于以传播速度  $u + a$  在运动着的一点, 看这一点的  $\sigma$  怎样随时间变化。如记这个变化为  $\delta^+ \sigma / \delta t$ , 则方程 4.9 可以写为

$$\frac{\delta^+ \sigma}{\delta t} = - \frac{\sigma^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad (4.10)$$

此式立即可以积分出来, 得