

高等学校教学用书



# 高等数学

第三卷

R. 罗德著

秦裕瑗译

人民教育出版社

高等学校教学用



高等数学

第三卷

R. 罗德著  
秦裕瑗译

人民教育出版社

---

本书系根据莱比錫托伊布訥出版社(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft)出版的罗德(R. Rothe)著“高等数学”(Höhere Mathematik)第三卷1956年第9版譯出。原书特点是叙述簡要,內容丰富,注重实用近似方法、計算技巧与科技应用,而又不忽視必要的理論基础。此外,并附有相当数量的例題和习題。虽然书中对較重要与較难的材料有足够詳尽的与富于启发性的讲解,但有許多地方仍需讀者作相当大的努力才能深入理解,确实得到好处。本书可以推荐給教学經驗丰富的教师;如果吸取其中的优点,适当加以发揮,可以帮助他們在教学上取得較好的效果。

原书是供德国大学数理系及工科各系学生用的,因此对我国同类性质的各系也有相当大的参考价值,特别是适用于需要数学較多的工科各系。

## 高等数学

### 第三卷

R. 罗德 著

秦裕璣 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号K13010·1089 开本 850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张 8<sup>1</sup>/<sub>16</sub>

字数 236,000 印数 3,801—4,800 定价(6) 0.80

1963年8月第1版 1963年11月北京第2次印刷

## 序 言

本卷包含曲面与曲綫坐标、曲綫积分与重积分的最重要的定理,末后还有一章微分方程,所有这些部分里都有許多应用。为了使讀者熟练并加深知識,附有九十七个练习题,分成十批。本书有些地方叙述比較簡略,如果讀者确实要想从中得到好处,深入艰苦学习是必要的。

本卷是第九版,只是第八版的未加修改的重印版。著者已于1942年去世,本书已經过多次版的考驗,可以不再修改了,而不一致和排印錯誤的地方已随时加以修正了。

托伊布訥出版社 1956年秋于萊比錫

# 目 录

序言	vii
第一章 曲面与空间曲线坐标	1
§ 1. 曲面的解析表示·例	1
1. 参数表示。2. 例。3. 旋转曲面。4. 平面的参数表示。5. 附言。6. 二次曲面。7. 二次曲面的直母线。	
§ 2. 切平面·弧长元素·曲面的法线·面积元素	8
1. 曲线上的曲线。2. 切平面。3. 弧长元素。4. 曲面的法线。5. 面积元素。	
§ 3. 例及补充知识	12
1. 笛卡儿坐标系中的平面。2. 极坐标系中的平面。3. 任意曲线坐标系中的平面。4. 平面上的一个格网与平面的面积元素。5. 续。6. 半球面。7. 一般的旋转曲面。8. 正螺旋面。9. 一般曲面。	
§ 4. 空间的曲线坐标·体积元素	17
1. 空间的分割。2. 分割空间的例。3. 空间(球)极坐标(球面坐标)。	
4. 斜笛卡儿坐标。5. 共焦二次曲面。6. 续。7. 续·恰当的参数表示式。	
8. 续·焦点的性质。9. 空间元素或体积元素。10. 例。	
§ 1 至 § 4 的练习题	24
第二章 空间曲线积分·二重积分与多重积分	27
§ 5. 空间曲线积分	27
1. 定义。2. 例。3. 曲线积分的矢量表示。4. 在物理与工程上的应用。	
5. 例。	
§ 6. 全微分的曲线积分·势的概念	32
1. 与路线无关的曲线积分。2. 势。3. 封闭路线上的曲线积分。4. 可积条件。5. 势的求法。6. 矢量的旋度与位置函数的梯度。7. 例。8. 等值面(等高面)。	
§ 5 与 § 6 的练习题	41
§ 7. 二重积分	42
1. 引言。2. 二重积分的定义。3. 定理。4. 二重积分的性质。5. 中值定理。	
§ 8. 二重积分的计算法	47
1. 引言。2. 二重积分与二次积分。3. 连续函数与矩形域。4. 按段连续	

的有界函数与矩形域。5. 公式(2)的证明。6. 附言。	
§ 9. 例及应用	55
1. 平面域的面积。2. 问题。3. 狄里希莱公式。4. 特例。	
§ 10. 曲面块的面积	58
1. 引言。2. 曲面块的面积。3. 例·佛罗棱萨问题或维凡尼问题。4. 圆柱的横剖面——许瓦兹的例。5. 曲面面积作为多面形的面积的极限。	
§ 11. 三重与多重积分	63
1. 三重积分。2. 例。3. 一个三重广义积分的例。4. 正柱体的体积·卡瓦里原理。5. 多重积分。	
§ 7 至 § 11 的练习题	68
§ 12. 引进新变量变换重积分	69
1. 三重积分换元法。2. 续。3. 续。4. 附言。5. 不变式·曲面积分与三重积分。6. 例。7. 任意正柱面的侧面积。8. $n$ 维“球”的“体积”。	
§ 13. 重积分的几何应用	83
1. 质量。2. 质心与静力矩。3. 斯太诺定理。4. 几何形心。5. 例。6. 古鲁静法则。7. 惯性半径与惯性矩。8. 惯性矩的性质·例。	
§ 14. 重积分的物理应用	94
1. 通过孔口的流量。2. 例。3. 液体压力与压力中心·离心矩。4. 势。	
5. 例。6. 匀质圆周的对数势。7. 高阶矩量。8. 例。9. 矩量曲线。	
§ 12 至 § 14 的练习题	110
§ 15. 曲线积分·二重积分与三重积分之间的关系	113
1. 引言。2. 可积条件。3. 面积作为曲线积分。4. 高阶矩量作为曲线积分。5. 矩量仪。6. 一个不连续函数的例。	
§ 16. 续·斯托克斯、高斯与格林积分定理	120
1. 斯托克斯积分定理。2. 斯托克斯定理的矢量形式。3. 推论。4. 对电动力学中麦克斯威尔方程的应用。5. 高斯积分定理。6. 应用。7. 矢性势。8. 由第二个麦克斯威尔方程所推得的结果。	
§ 15 与 § 16 的练习题	131
第三章 微分方程	133
§ 17. 微分方程一般概念	133
1. 定义与分类。2. 微分方程的积分。3. 例。4. 微分方程的构成。5. 例。	
§ 18. 例(续)·常微分方程组与偏微分方程组	139
1. 动力学的基本方程。2. 矢量场的场线(流线)的微分方程。3. 柯西-黎曼偏微分方程·平面势方程。4. 空间势方程·卜瓦松微分方程。	
5. 有公共轴的所有旋转曲面的微分方程。	

§ 19. 导出简单微分方程的一些重要物理与工程上问题以及它们的解法	144
1. 引言。2. 横截面有常数压强的物体。3. 质点的自由无阻尼弹性振动。	
4. 摆、微分方程(8)的另一个解法。5. 电容器在放电时的电振荡。6. 数学摆。	
7. 摆的微小摆动。8. 滑旋路线问题(滑过一个圆圈)。9. 追线。	
§ 17 至 § 19 的练习题	158
§ 20. 一阶微分方程·初等积分方法	159
1. 引言。2. 分离变量法。3. 齐次变量型。4. 例。5. 一阶线性微分方程。	
6. 例·有自感阻抗的电路。	
§ 21. 一阶微分方程(续)·应用	165
1. 积分因子法。2. 例。3. 与 $y$ 二次相关的微分方程。4. 例。5. 黎卡蒂微分方程	
与二阶线性齐次微分方程的关系。6. 裴奴利微分方程。7. 新变量的引入。	
8. 几何应用与曲线族相交的轨线。9. 例。10. 地形面的等高线	
与最大坡度线。§ 20 与 § 21 的练习题	177
§ 22. 积分曲线的作图与伸展情况·存在定理·逐次逼近法·图解积分法与数值积分法	179
1. 积分曲线。2. 等倾线。3. 用抛物线弧段作近似积分曲线·李普希兹条件。	
4. 常微分方程的解的存在定理。5. 定理的证明。6. 例。7. 微分方程	
借助于逐次积分的图解积分法(龙格法)。8. 数值积分法·龙格与库塔近似法。	
§ 23. 奇解·克莱洛与拉格朗日微分方程	190
1. 奇解。2. 例。3. 克莱洛微分方程。4. 例。5. 拉格朗日微分方程。	
6. 例。	
§ 24. 近似微分方程·积分曲线在不定点邻域内的性态	195
1. 近似微分方程。2. 误差的确定。3. 例。4. 不定点。5. 用幂级数来积分。	
6. 上述方法的证明。	
§ 22 至 § 24 的练习题	201
§ 25. 新变量的引入·一阶微分方程组	203
1. 新变量。2. 微分方程组的例。3. 另一个例(叠加场)。	
§ 26. 高阶微分方程·线性微分方程	206
1. 初始条件·一般解。2. 线性微分方程。3. 用降阶法解线性微分方程。	
4. $L_n(y)=0$ 的一般解。5. 例。6. 二阶线性微分方程。	
§ 27. 线性微分方程(续)·常数变更法·常系数线性微分方程·尤拉微分方程	212
1. 常数变更法。2. 例。3. 常系数线性微分方程。4. 例。5. 主方程的重根。	
6. 例。7. 尤拉微分方程。8. 例。9. 特殊形式的干扰项。	

§ 28. 例题与应用	220
1. 自由弹性振动。2. 续。3. 强迫振动或激发振动。4. 续· 周期性激发力· 共振。5. 耦合电路的振荡。6. 边界固定的薄圆板的弹性曲线。	
§ 25 至 § 28 的练习题	231
§ 29. 其他的积分方法及应用(续)	233
1. 不含有 $x$ 或不含有 $y$ 的微分方程。2. 应用。3. 确定一条受有纵向载荷的弹性杆的弹性曲线。4. 悬链线。5. 续。6. 用幂级数来积分。7. $(\arcsin x)^2$ 的微分方程。8. 利用微分方程的积分法求级数和。9. 高斯微分方程与超几何级数。10. 贝塞尔微分方程。	
§ 30. 一些偏微分方程	245
1. 一阶线性偏微分方程。2. 二阶偏微分方程。3. 续· 弦振动微分方程。4. 求特定解的方法· 用福里哀级数求解。5. 边界固定的薄圆板作微小振动的微分方程。6. 电报方程。7. 续。	
§ 29 与 § 30 的练习题	254



# 第一章 曲面与空間曲綫坐标

## § 1. 曲面的解析表示·例

1. 参数表示 如果空間一点  $P$  —— 或者也同样可以說是矢量  $r = \overline{OP}$  —— 的三个坐标  $x, y, z$  依赖于两个独立参量  $u, v$ , 那末点  $P$  的所有对应位置在空間 (一般說来) 构成一个曲面 ( $F$ )。它的方程是

$$r = r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k.$$

参量  $u, v$  的值叫做  $P$  在曲面 ( $F$ ) 上的曲綫坐标。我們假定,  $u, v$  的每个值偶只有一个点与之对应, 而每一个点只有  $u, v$  的一个值偶与之对应。如果現在給  $v$  以一个固定的值而令  $u$  依增大的方向变化, 曲面 ( $F$ ) 上就得到一条有确定描繪方向的空間曲綫 (参看第二卷 § 28, 4), 如果給  $v$  以另一个固定的值, 則又得到另一条这样的空間曲綫。

这族曲綫叫做  $u$  曲綫。如果給  $u$  以不同的固定值而令  $v$  为变量, 則所得的对应曲綫族叫做曲面 ( $F$ ) 上的  $v$  曲綫。这两族曲綫一起构成坐标曲綫网 (图 1), 因而这个网的位置与描繪方向是随曲面的参数表示  $r(u, v)$  而唯一給定的。

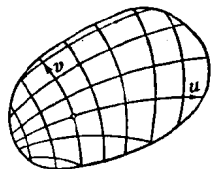


图 1

如果从方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

消去两个变量  $u, v$ , 便得形式为

$$F(x, y, z) = 0$$

的曲面方程, 从这解出  $z$ , 便得

$$z = f(x, y);$$

参看第一卷 § 18, 1 以后我们假定, 本书中所讲的这些函数在一个确定的域里都是连续的, 并且对三个变量中的每一个都是可以偏微分的。

### 2. 例 a) 方程

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \sqrt{a^2 - u^2} \mathbf{k}$$

对于  $0 \leq u \leq a, 0 \leq v < 2\pi$  表示立在  $xy$  平面上的半球面, 因为

$$x^2 + y^2 + z^2 = (u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 + (\sqrt{a^2 - u^2})^2 = a^2.$$

$u$  曲线(只有  $u$  变动) 是通过  $z$  轴且垂直于  $xy$  平面的四分之一圆周,  $v$  曲线(只有  $v$  变动) 是平行于  $xy$  平面的圆周, 所以网是由子午线及纬圆所构成的(图 2)。

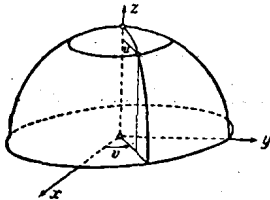


图 2

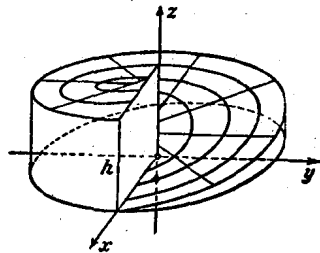


图 3

### b) 方程

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + cv \mathbf{k}$$

表示有下列性质的曲面: 这里点的坐标  $x, y$  与  $u$  的关系只是线性的, 而  $z$  与  $u$  无关。所以  $u$  曲线是平行于  $xy$  平面( $z = \text{常数}$ )的直线。可是如果  $v$  变动( $u$  固定), 那末曲面上点  $P = (u, v)$  绘成一条螺旋线(第二卷 § 28, 13)。所以曲面的网由螺旋线及直线所构成, 这曲面便叫做螺旋面或梯面(它是无限宽的螺旋梯面, 具有无限多且又无限密的台阶)。从运动学的观点来说, 把一个矩形绕它的一

边作等速旋轉,同时沿这个边作等速位移,所描成的图形就是这螺旋面(图3)。它的直角坐标方程是(消去  $u$  与  $v$ )

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \frac{z}{c}.$$

这螺旋面也可用别的参数方程来表示,例如表示成

$$\mathbf{r} = uv \cos v \mathbf{i} + uv \sin v \mathbf{j} + cv \mathbf{k};$$

因为由点的坐标  $x = uv \cos v$ ,  $y = uv \sin v$ ,  $z = cv$  也得到像上面一样的方程  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ 。但现在的  $v$  曲线 ( $u = \text{常数}$ ) 是圆锥螺旋线, 即它是在圆锥面(参看下节)  $x^2 + y^2 = \frac{u^2}{c^2} z^2$  上的螺旋线。

**3. 旋轉曲面** 以  $z$  轴为轴的旋轉曲面可以用下列形式的方程来表示:

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + f(u) \mathbf{k},$$

其中  $u$  表示曲线上的点到  $z$  轴的距离,  $v$  表示子午线截面与  $xz$  平面的交角(图4, 即地理经度), 而  $z = f(u)$  是在  $zu$  平面上的子午线方程。子午线是  $u$  曲线, 而与  $z$  轴垂直的纬圆是  $v$  曲线。曲面的直角坐标方程是

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

讀者可把任一平面曲线(例如直线、正弦曲线、双纽线...) 绕  $x$  轴或  $y$  轴旋轉, 并建立所得旋轉曲面的方程, 作为练习。把曲线  $y =$

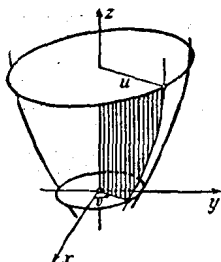


图 4

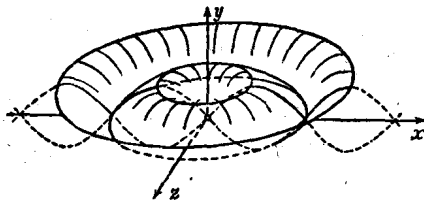


图 5

$= |\sin x|$  繞  $y$  軸旋轉一周所得到的旋轉曲面的方程是

$$y = |\sin \sqrt{x^2 + z^2}|$$

(圓盤形的波浪面馬口鉄片图 5)。把它繞  $x$  軸旋轉时, 所得旋轉曲面的方程是  $y^2 + z^2 = \sin^2 x$  (像一串珍珠, 图 6)。

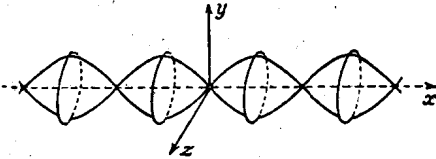


图 6

如果把直線  $y = mx$  繞  $x$  軸旋轉, 就得到正圓錐面

$$y^2 + z^2 = m^2 x^2,$$

可是如果旋轉軸是  $z$  軸, 那末

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2$$

是以  $2\arctan m$  为頂角的正圓錐面的方程。

#### 4. 平面的参数表示 方程

$$\mathbf{r} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v} + C \quad (A, B \neq 0)$$

表示一个平面, 其中  $A, B, C$  是常矢量。这是可用矢量算法来简单证明的, 即在上式左右两端用  $A \times B$  作数量积, 由于  $A \cdot A \cdot B = 0$ ,  $B \cdot A \cdot B = 0$  (第二卷 § 26, 7) 得

$$(A \times B) \cdot \mathbf{r} = (A \times B) \cdot C.$$

但是这是一个形如  $\mathbf{ar} + d = 0$  的方程。所以它表示一个平面 (按第二卷 § 27, 4)。  $u$  曲线及  $v$  曲线是平面上的平行直线族, 它们的方向由矢量  $A$  与  $B$  来确定, 并且它们之间的夹角是 (图 7)

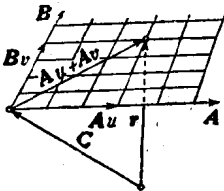


图 7

$$\arccos \frac{(A \cdot B)}{|A| \cdot |B|}.$$

5. 附言 一般说来, 只有一条边界的曲面片(如球面片)有两侧, 其中的一侧叫做内侧, 另一侧叫做外侧。只有穿过曲面, 或者越过边界, 曲面片上的点才能从一侧进到另一侧。值得注意的是, 在只有一条边界的曲面片中, 还有单侧的曲面。这种曲面片最先是麦俾烏斯 (Möbius 1790—1868) 发现的, 这样的曲面片就叫做麦俾烏斯带 (图 8)。它确实只有一条边界和一个侧(单侧面)。

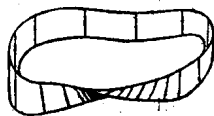


图 8

6. 二次曲面 用直角坐标  $x, y, z$  的一般二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

表示的所有空间图形叫做二次曲面。类似于对圆锥曲线方程的讨论, 对这一般方程的图形可得下面的结果。二次曲面可分为二类: 真二次曲面, 包括有心曲面及无心的抛物面; 准二次曲面, 例如锥面, 柱面及平面对都是。真二次曲面有五种, 即: 椭球面, 两种双曲面(单叶与双叶), 两种抛物面(椭圆的与双曲的)。现将它们(关于主轴)的方程分述如下, 并作简单的讨论。

a) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$

对于实的点来说, 应有  $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$ 。

其中  $a, b, c$  表示椭球面沿着坐标轴正的方向所能达到的最大值,  $a, b, c$  就是它的半轴。容易看到, 椭球面的每一个平面截痕(例如  $z = \text{常数} < c$ ) 是一个椭圆(图 9)。

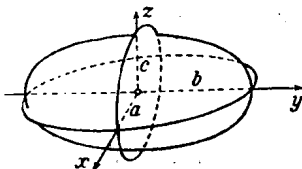


图 9

b) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

垂直于  $z$  轴的平面上的截痕是椭圆, 其中最小的是  $xy$  平面上

以  $a$ 、 $b$  为半轴的椭圆。通过  $z$  轴的平面上的截痕是双曲线(图 10)。如果  $a=b$ , 就得到以双曲线绕  $z$  轴旋转而得的旋转曲面。跟  $x$  轴和  $y$  轴比较起来, 这种曲面的  $z$  轴显得更重要些。

### c) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

垂直于  $z$  轴的平面与曲面相交的曲线为椭圆, 在通过  $z$  轴的平面上, 截痕是双曲线。这曲面有互不相联的两叶(距离为  $2c$ ; 图 11)。如果  $a=b$ , 就得到以双曲线绕实轴旋转的旋转曲面。这时  $z$  轴是主要轴。

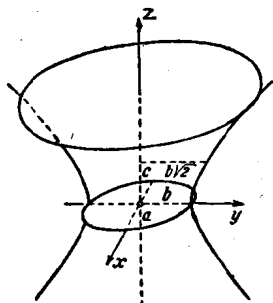


图 10

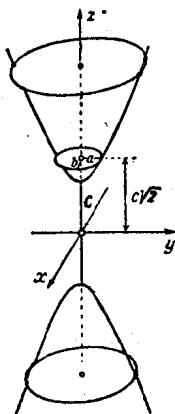


图 11

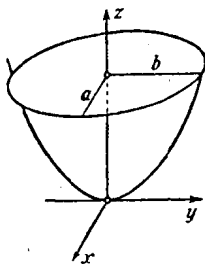


图 12

### d) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

垂直于  $z$  轴的平面上的截痕(如果  $z > 0$ ) 是椭圆。通过  $z$  轴的平面与曲面的交线是抛物线(图 12)。如果  $a=b$ , 就得到以一个抛物线绕它的轴旋转而成的旋转曲面。 $z$  轴是主要轴。

## e) 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (a, b > 0).$$

每一个垂直于  $z$  轴的平面上的截痕(如果  $z \neq 0$ )是双曲线, 可是在  $xy$  平面上的截痕是一对直线  $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ ; 在通过  $z$  轴的平面

上, 截痕是以  $+z$  轴或  $-z$  轴为轴的抛物线, 只要这平面不通过上述这一对直线中的任何一条。在每一点的近旁, 例如在原点的近旁, 曲面是一个马鞍形(图 13)。它在任何情况下都没有相应的旋转曲面。如果把上述这一对直线作为  $\xi$  轴及  $\eta$  轴(这两个轴一般不是正交的)以代替  $x$  轴及  $y$  轴, 曲面方程就简化成

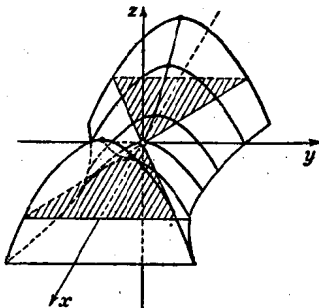


图 13

$$z = c\xi\eta,$$

其中  $c$  是一个常数( $\neq 0$ )。无论是对  $x$  轴与  $y$  轴来说, 或是对  $\xi$  轴与  $\eta$  轴来说,  $z$  轴总是主要轴。

7. 二次曲面的直母线 有些二次曲面, 尽管它们是弯曲的, 却可能含实的直线族。这对柱面和锥面来说是很清楚的。至于单叶双曲面, 它的方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  可以改写成

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

利用两个辅助变量  $u, v$ , 用两种方法把它们拆开, 就得到

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

对于每一个固定的  $u$ , 第一个方程组表示两个平面的交线, 即是一条直线。第二个方程组也是一样的。所以在这个双曲面上确实含有两族直线。旋转单叶双曲面的这个性质在工程技术上可用来制作双曲齿轮, 把绕一个轴的转动改变成绕另外任一个方向的轴的转动。容易证明, 一族中的直线都与另一族的每一条直线相交; 而同族的任意两条直线不共面, 因而都是不相交的。

双曲抛物面也有直母线, 锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

也有, 它的直母线是两平面  $\frac{z}{c} + \frac{y}{b} = u \frac{x}{a}$ ,  $\frac{z}{c} - \frac{y}{b} = \frac{1}{u} \frac{x}{a}$  的交线, 这种直线都通过原点。

还要补充一点, 二次曲面总是以通过主要轴(像上面是  $z$  轴)的平面上的截痕来命名的, 按截痕是椭圆、双曲线、抛物线或一对直线, 就相应地叫做椭球面、双曲面、抛物面或锥面(及柱面)。至于形容词“椭圆的”或“抛物的”, 还要按主要轴垂直平面上截痕的图形来决定。可是对于两种双曲面, 截痕都是椭圆的, 它们的命名就要按叶数来分。至于椭球面和锥面, 虽然它们的截痕都是椭圆, 在名称前面不需要加这形容词了。当然, 使用了这些形容词时并不是说不可以有别的形状的截痕, 如果用任意平面去截的话。像双曲抛物面上也有以抛物线为截痕的, 在圆锥面上也有以抛物线及双曲线为截痕的。

## §2. 切平面 · 弧长元素 · 曲面的法线 · 面积元素

1. 曲线上的曲线 在曲面  $r=r(u, v)$  上, 如果点  $P$  的曲线坐标  $u, v$  之间存在函数关系, 譬如它们满足一个形如  $\varphi(u, v)=0$  的方程, 或者这两个量都与一个参数  $t$  有关, 那末点  $P$  的轨迹就是曲面上的一条曲线, 因为

$$r=r(u, v)=r(u(t), v(t))=R(t)$$

是一个参数  $t$  的(矢量)函数, 它正表示一条空间曲线。

于是

$$dr=R'(t)dt$$



是一个矢量,它平行于这曲线在点  $P$  处的切线,  $|dr|$  表示一个用自变量的微分  $dt$  来确定的切线段的长,即曲线的弧长元素  $ds$  (第二卷 § 28, 4), 于是  $t = \frac{dr}{|dr|} = \frac{dr}{ds}$  是曲线的单位切线矢量。还有

$$dr = \mathbf{R}'(t) dt = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} v'(t) \right) dt;$$

如果采用缩写记号  $r_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $r_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ,  $du = u'(t) dt$ ,  $dv = v'(t) dt$ , 就得到

$$dr = r_u du + r_v dv. \quad (1)$$

2. 切平面 在上面的公式里, 矢量  $r_u$  及  $r_v$  是随曲面上所考虑的点  $P(u, v)$  的位置而完全确定的, 而微分  $du$  与  $dv$  及随之而得的  $dr$  还要与函数  $u(t)$ ,  $v(t)$  的选择有关, 也就是说, 与曲线  $C$  的选取有关。所以如果在曲面上选取了另一条通过  $P$  的曲线, 那末虽然  $r_u$  及  $r_v$  保持不变, 但是切线段  $dr$  的大小和方向都改变了 (图 14)。特别地, 如果把  $u$  曲线及  $v$  曲线的  $dr$  记作

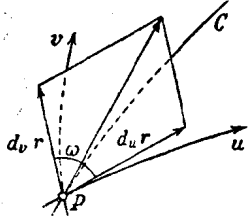


图 14

$$d_u r = r_u du, \quad d_v r = r_v dv,$$

那末一般的  $dr$  就可以写作  $d_u r$  及  $d_v r$  的矢量和:

$$dr = d_u r + d_v r.$$

于是一切可能的切线段  $dr$  都在一个平面上, 即在由两个固定方向的矢量  $d_u r$  及  $d_v r$  所确定的平面上, 这个平面就叫做切平面。从矢量  $dr$ ,  $r_u$ ,  $r_v$  所构成的平行六面体的体积等于零这一事实, 也可以得到上述结果。事实上, 这体积按第二卷 § 26, 7 等于

$$dr r_u r_v = (r_u du + r_v dv) r_u r_v = (r_u r_u r_v) du + (r_v r_u r_v) dv = 0,$$

上式括号里的两个乘积都等于零, 因为其中有两个矢量是相等的。