高等学校教学用書

微積分学教程

第三卷 第一分册

Г·М·菲赫金哥尔茨著

商务印書館

高等學校教學用書

微積分學教程

第三卷 第一分册

Г·М·菲赫金哥爾茨著
路見可 譯

商務印書館

本書系根据苏联技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的菲赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)所著"微積分学教程"(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第三卷1949年版譯出。原書經苏联高等教育部審定为大學數學系學生及研究生用教學參考書。

本書共三卷,第一卷由楊弢亮、叶彥謙合譯,第二卷由北京大學数學系集体翻譯,第三卷由武漢大學路見可等譯。

本書(第三卷)中譯本暫分三册出版。第一分册內容为曲綫積分,斯底尔吉斯積分及二重積分;第二分册內容为曲面積分,三重及多重積分;第三分册則全部是傅立叶級数。

2008/44

微 積 分 學 教 程

第三卷 第一分册

路見可 譯

商 务 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一号
(上海市書刊出版業營業許可証出字第〇二五号)
新 華 書 店 总 經 售
商 务 印 書 館 北 京 厂 印 刷
(13017·22)

1953年10月初版	開本 850×1168 1/32
1956年7月3版	字數 255,000
1957年2月北京第二次印刷	印數 12,501—19,500
印張 8 3/16	定價(8)¥0.95

第一分册目錄

第十五章　曲線積分·斯底爾吉斯積分

§1. 第一型的曲線積分

§2. 第二型的曲線積分

§3. 曲線積分與道路無關的條件

§4. 有界變差的函數

§5. 斯底爾吉斯積分

第十六章 二重積分

§1. 二重積分定義及其簡單性質

§2. 二重積分的計算

§3. 格林公式

§4. 二重積分中的變數更換

§5. 廣義二重積分

第十五章 曲線積分・斯底爾吉斯積分

§1 第一型的曲線積分

517 第一型曲線積分的定義 爲了很自然地得出這一新的概念，我們來考察一個能導出它的力學問題。

設已給一連續的可求長平面* 曲線 (K)（圖 1），在它上面分佈有質量，且在曲線上所有的點 M 處其線性密度 $\rho(M)$ 爲已知，要求確定整個曲線 (K) 的質量 m。

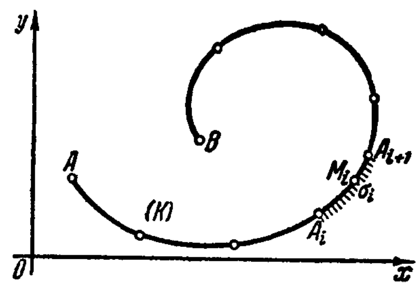

圖 1

爲達此目的，在曲線端點 A 與 B 間任意地插入一列點 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$（爲使記號對稱，命 A_0 與 A 相合，A_n 與 B 相合）。爲了明確起見，我們認爲這些點是自 A 到 B 記數的 [參看 317 **]，縱然將它們以相反的方向記數也沒有什麼不可以。

在曲線的弧 $A_i A_{i+1}$ 上任取一點 M_i，算出這一點處的密度 $\rho(M_i)$。近似地認爲在這一小段弧上所有點處的密度都是這樣的，並以 σ_i 表弧 $A_i A_{i+1}$ 的長，對這一弧的質量 m_i 我們將有近似表示式

* 今後爲簡單計，我們祇討論平面曲線，整個所述的東西不必改變就可移到空間曲線的情形。

** 參看關於本書第一卷及第二卷時，均以原書第三版（1951）的中譯本爲準—譯者。

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而對整個所求的質量，將有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i .$$

這一式子的誤差與上面所作的近似假定是有關的；如所有小段的長 σ_i 趨近於零時，這誤差也將趨近於零。因此，如以 λ 表長 σ_i 中最大的一個，祇要變到極限就得到準確的公式：

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i .$$

現在開始一般地來研究這一類型的極限。丟開上面的問題不談，取一任意"點函數" $f(M)=f(x,y)$，它給出在一連續的可求長平面曲線(K)上*，並重複上述手續：分曲線(K)爲許多弧元 $A_i A_{i+1}$，在它們上面任取點 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，計算出在這些點處的值 $f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$，並作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它亦代表一定類型的"積分和"。

當 $\lambda = \max \sigma_i$ 趨近於零時，如這一積分和有一確定的有限極限 I，既與曲線 (K) 細分的方法無關，又與小段 $A_i A_{i+1}$ 上點 M_i 的選擇無關，則這一極限稱作函數 $f(M)=f(x,y)$ 沿曲線或道路 (K) 上所取的（第一型）曲線積分**，並以符號

$$I = \int_{(K)} f(M)\,ds = \int_{(K)} f(x,y)\,ds \tag{1}$$

來表示（其中 s 是曲線的弧長，ds 就象徵長度元 σ_i）。極限過程的精確說明留給讀者。

因此，上面所得曲線質量的式子可重寫爲：

---

* 這裏假定某一直角坐標系取作基礎。

** 以示與下面［521］所討論的第二型曲線積分不同。

$$m=\int_{(K)}\rho(M)ds. \tag{2}$$

特别注意，給道路 (K) 所加的方向在所引導的定義中不起任何作用。例如若這一曲線不是閉的，且以 (AB) 及 (BA) 作爲不同方向的曲線，則

$$\int_{(AB)}f(M)\,ds=\int_{(BA)}f(M)\,ds.$$

類似地，我們可以引導散佈在空間曲線 (K) 上的積分概念：

$$\int_{(K)}f(M)\,ds=\int_{(K)}f(x,y,z)ds.^{*}$$

由於沒有什麼新的原則性東西，沒有必要在這裏詳談。

518 約化爲普通定積分 假定在曲線 (K) 上任意取一方向（二可能方向之一），故曲線上點 M 的位置可由自一起點 A 量起的弧長 $s=\overset{\smile}{AM}$ 來確定。那末曲線 (K) 可表爲參數方程的形狀：

$$x=x(s),\quad y=y(s)\qquad(0\leqslant s\leqslant S),$$

而在曲線上給出的函數 $f(x,y)$ 便化成變量 s 的複合函數 $f(x(s),y(s))$。

對應於在 AB 弧上所選取的分點 A_i，其弧的值如表爲 s_i ($i=0,1,\cdots,n$)，則顯然 $\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$。以 $\bar{s}_i$ 表決定點 M_i 的 s 值（顯然，而且 $s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$），可以看到曲線積分的積分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(x(\bar{s}_i),\,y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i$$

同時也是普通定積分的積分和，所以立刻有：

$$\int_{(K)}f(M)\,ds=(R)\int_0^S f(x(s),y(s))\,ds^{**}, \tag{3}$$

且這兩積分中祇要有一個存在，另一個就也存在。

當然，這種直接由第一型曲線積分約化爲普通的積分會降低了它

* 某一直角坐標系將取作基礎。函數 f 僅在曲線 (K) 的點處有定義。

** 符號 (R) 表示，積分這裏是瞭解爲通常的黎曼定義下的積分。

的理論價值，但在方法上的價值它仍全部保持着。

我們以後將假定函數 $f(M)$ 是連續的*，顯然在這種情形下積分是存在的。

令設一曲線 (K) 由任意的參數方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

所給出，其中函數 φ 及 ψ 與它們的導數 φ' 及 ψ' 都連續；此外，假定曲線上無重點。那麼曲線就是可求長的，且若弧 $s=\breve{AM}=s(t)$ 的增加對應於參數 t 的增加，則

$$s_t'=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[320, 321]。在 (3) 的右端的積分中換變數，立刻得到：

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.\qquad (4)$$

因此，**在計算第一型曲線積分時，在積分號下的函數中，變量 x 及 y 應該用坐標的參數表示式來代替，而因子 ds 應該用弧當作參數的函數時的微分來代替**。特別指出，定積分 (4) 的下限必須小於上限。

在曲線以顯著的方程給出時，

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

公式 (4) 的形狀是：

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.\qquad (5)$$

這一關係式也可有另一形式。在函數 $y(x)$ 與它的導數 $y'(x)$ 連續的假定下，曲線 (K) 在每一點處都有一不平行於 y 軸的確定切線。以 α 表切線與 x 軸的夾角，我們得到：

* 我們是指在曲線 (K) 上的點處連續，也就是指沿着曲線連續。用"ε-δ"的說法，這就是說：對 $\varepsilon>0$ 能找到這樣的 $\delta>0$，使當 $\overline{MM'}<\delta$ 時就有 $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$ (M 及 M' 是曲線上的點)。在這一假定下，複合函數 $f(x(s),y(s))$，由於 $x(s)$ 及 $y(s)$ 是連續的緣故，也同樣是 s 的連續函數。

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x),\ |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

故
$$\int_{(K)} f(M)\,ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}\,dx. \tag{6}$$

如用 S 表示整個曲線 (AB) 的長,因爲顯然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特別地有

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附註 公式(7)是經形式的變換得來的。如果我們定義曲線弧長爲外切(不是內接)折線周長的極限,則這一定義——在曲線以顯著的形式給出時——立即可得出公式(7)。讀者不妨自己來證實這一點。

519 例 1) 若 (K) 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限內的四分之一,計算積分 $I=\int_{(K)} xy\,ds$.

解 (a) 我們有

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

所以由公式(5),

$$I = \int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot x\,dx.$$

進行積分,得:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^4-(a^2-b^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{ab}{3}\ \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

應該注意,上面做的計算事實上還要有所說明才行,因爲當 $x=a$ 時切線斜率變爲無窮

大。下一解法就沒有這一缺點。

(б) 如變到橢圓的參數表示 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, 故

$$x'_t=-a\sin t,\ y'_t=b\cos t,\ \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

則可按公式(4)來進行計算:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

這裏令 $\cos 2t=z$, 則 $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}dz$, 且

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2) 計算積分 $I=\int\limits_{(K)}y\,ds$, 其中(K)是拋物線 $y^2=2px$ 上自坐標原點到點(x_0, y_0)的一段。

解 由曲線的方程,我們有 $yy'=p$, 所以

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx,$$

且
$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

3) 計算積分 $L=\int\limits_{(A)}(x^2+y^2)ds$, 其中$(A)$是聯結點$(a,a)$及$(b,b)$的直線段$(b>a)$.

提示 直線方程 :$y=x$. 答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$.

4) 計算積分$K=\int\limits_{(C)}ye^{-x}ds$, 其中$(C)$是曲線

$$x=\log(1+t^2),\ y=2\operatorname{arctg}t-t+3$$

在點 $t=0$ 及 $t=1$ 間的一段。

提示　$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=1$,

$$K=\int_0^1 \frac{2\operatorname{arc\,tg} t-t+3}{1+t^2}dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi}{4}.$$

5)　常見的曲線中一大部分（橢圓，雙曲線，正弦曲線，雙紐線等）其弧長不能表作初等函數，因爲它們的 ds 不能積分爲有限型。然而，對這種曲線，積分 $\int_{(K)} f(x,y)\,ds$ 往往算出來是初等函數［例如，參看例 1)］，因爲與因子 $f(x,y)$ 聯在一起時，積分號下微分式的整個構造改變了。讀者不妨做一些積分 $\int_{(K)} f(x,y)ds$ 的例題，積分取在正弦曲線 $y=\sin x$ 或雙曲線 $xy=1$ 上但又可表作初等函數者。

6)　計算積分 $I=\int_{(C)} xyz\,ds$，其中 (C) 是曲線 $x=t$，$y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$，$z=\frac{1}{2}t^2$　在點 $t=0$ 及 $t=1$ 間的弧。

解　$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\;dt=(1+t)dt$,

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7)　當曲線 (K) 用極坐標方程 $r=r(\theta)\,(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 給出時，試求計算積分

$$I=\int_{(K)} f(x,y)\,ds$$

的一公式。

答　$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$

8)　若 (K) 是雙曲螺線 $r\theta=1$ 自 $\theta=\sqrt{3}$ 到 $\theta=2\sqrt{2}$ 的一段，試計算積分

$$H=\int_{(K)} \frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

答　$\frac{19}{3}$.

9)　試求曲線 $y=\log x$ 在有橫坐標 x_1 及 x_2 的兩點間這一段的質量，設曲線在每點處的（線性）密度等於該點橫坐標的平方。

解　由公式(2)，因爲在我們的情形下 $\rho=x^2$，故有：

$$m=\int_{x_1}^{x_2} x^2 ds.\ \text{但}\ ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,\ \text{所以},$$

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{3}\left[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

10) 試求懸鏈線 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在點 $x=0$ 及 $x=a$ 間一段的質量，設曲線在每點的密度與該點的縱坐標成反比。

提示 $\rho=\frac{k}{y}$, $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx=\frac{y}{a}dx$, $m=k$.

與連續地分佈在曲線上的質量相關的其它問題，很自然地也可變成上面所考察類型的曲線積分。

11) 在第十章中［340］我們討論過平面曲線對坐標軸的靜矩的計算，以及它的重心坐標的計算，那時假定"線性密度" $\rho=1$. 讀者不難推廣那裏所得的公式到質量連續分佈的一般情形。如引用曲線積分概念時，則結果可寫作下面形狀：

$$M_y=\int\limits_{(K)}\rho x ds,\quad M_x=\int\limits_{(K)}\rho y\, ds,$$

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho x\, ds}{\int\limits_{(K)}\rho\, ds},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho\, y ds}{\int\limits_{(K)}\rho ds}.$$

12) 我們還說明第一型曲線積分的一個應用——應用到有質量的曲線對一質點引力的問題。

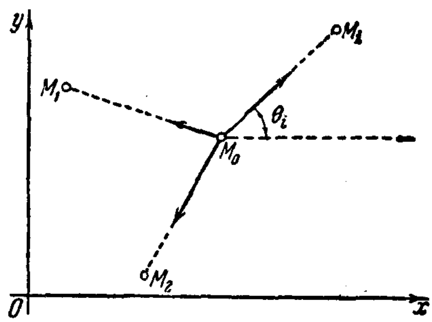

圖 2

大家都知道，按牛頓定律，質量 m_0 的質點 M_0 對質量 m 的質點M的吸引力，方向是從 M_0 到 M，大小等於 $k\cdot\frac{mm_0}{r^2}$，其中 r 是距離 M_0M，而 k 是與測量的基本單位選擇有關的一係數；並且爲了簡單起見，我們常認爲它等於一。

設點 M_0 被一質點系 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所吸引，它們的質量是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，則將各個點對 M_0 的吸引力幾何地相加，就得到合力。同時，合力在坐標軸上的射影等於各個力射影的代數和。

如以 X 及 Y 表合力在坐標軸上的射影，且以 θ_i 表向量 $\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{M_0M_i}$ 與 x 軸間的夾角，則顯然，

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0 m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0 m_i}{r_i^2}\sin\theta_i$$

(與尋常一樣，其中 r_i 表向量 $\overrightarrow{r_i}$ 的長)。

現在設吸引質點的質量連續地分佈在一曲線(K)上。爲要找出吸引力，我們分曲線爲許多小段，將每一小段的質量集中在它上面任意取定的一點 M_i 處後，我們就求出合力在坐標軸上射影的近似值：

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

因爲這時各個小段其質量近似地等於 $\rho(M_i)\sigma_i$. 如令所有的 σ_i 趨近於零，則取極限後就得到準確的等式，且這時和就被積分所代替了：

$$X=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds,\quad Y=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds; \tag{8}$$

這裏 r 表向量 $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{M_0M}$ 的長，而 θ 表它與 x 軸的夾角。

13) 試求一均勻半圓周($\rho=1$)對位於其中心的一單位質量的吸引力。

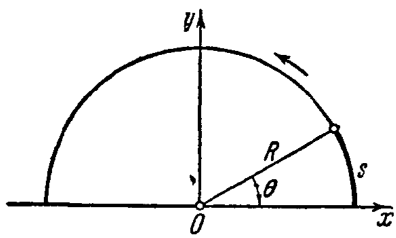

圖 3

解　將坐標原點放在圓心，通過半圓端點作橫軸（圖 3).

由對稱性，$X=0$，所以祇要求出射影 Y 好了。由公式(8)，

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}\,ds.$$

但在現在的情況下 $r=R$（半圓的半徑）且 $ds=Rd\theta$. 故

$$Y=\frac{1}{R}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{R}.$$

14) 一單位質量的點 ($m_0=1$) 與一無窮的均勻直線 ($\rho=1$) 的距離爲 h，求直線對這一點的引力。

解　將所求的引力當作由所述直線上一有限線段所生引力的極限，假設這一線段的端點在兩頭變到無窮遠去。如將直線本身取作 x 軸，而 y 軸通過已知點，則得（考慮在所給的情況下 $ds=dx$)

$$Y=-h\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=-\frac{2}{h}.$$

同樣，$X=0$（但由對稱性這很明顯)。

15) 試求星形線 $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ 在第一象限內的弧對位於坐標原點的單位質

量所生的引力，設曲線在每一點的密度等於這一點到坐標原點距離的立方。

答 $X=Y=\frac{3a^2}{5}$.

§ 2 第二型的曲線積分

520 力場中功的問題 我們轉而討論在實際上更為重要的第二型曲線積分的概念，這裏還是從一個力學問題出發。

設在 xy 平面（或平面的一確定部分）的任一點 M 如放一單位質量，就有一確定的力 $\overrightarrow{F}$ 作用於它，這個力的大小與方向只與點 M 的位置有關；如放在 M 的質點其質量 m 不等於一，則作用於它的力就等於 $m\overrightarrow{F}$。在這種情形下 xy 平面（或所考察的一部分）稱作（平面）力場，而作用於單位質量的力 $\overrightarrow{F}$ 稱作場的引力。給出力 $\overrightarrow{F}$ 的大小與方向相當於給出它在坐標軸上的射影 X, Y，顯然射影是點 M 的坐標 x, y 的函數：

$$X=X(x, y),\ Y=Y(x, y).$$

現在假定，位於場中的質點 $M(x, y)$（有單位質量者）運動，且以一確定的方向描出某一連續曲線 (K)。我們的問題是在這一運動中場的力所做的功 $\mathbf{A}$ 如何計算。

假如作用於點的力保持一常量 F 且保持一固定方向，而點的位移本身以直線進行，則大家都知道，功 $\mathbf{A}$ 可表為位移 l 與力在位移方向上射影的乘積：

$$\mathbf{A}=Fl\cos\theta,$$

其中 θ 是力 $\overrightarrow{F}$ 與位移方向間的夾角。

在非直線運動以及非常數力的情況下，功要藉某一極限過程來確定［比照 344］。例如，我們可以這樣來理解。在點的軌道曲線內，內接一多角形折線，並確定當沿這一折線運動時場的力所做的功。這時不計力在折線的同一段上的變化，所以問題就變成上述的直線運動以及常數力的最簡單情形了。所得的式子當作所求功 $\mathbf{A}$ 的近似值。它的準確值，總是這樣，可以用一極限過程即當折線的所有各段趨近於

零時*就能得到。

根據所述的計劃，現在來進行功A的計算。以A表軌道(K)的起點，以B表終點（這裏當然，那一點取作起點，那一點取作終點，不能隨便）。用自A到B方向排好的點

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2\ (x_2, y_2),\ \cdots,\ A_{n-1}\ (x_{n-1}, y_{n-1})$$

來分曲線AB爲許多部分。爲使記號對稱，將A, B寫作A_0, A_n，而它們的坐標分别表爲x_0, y_0及x_n, y_n. 最後，作曲線(K)的內接折線，以上述各點爲接續頂點。

爲了要確定通過小段$A_i A_{i+1}$時的功$\mathbf{A}_i$，我們設這時力$\overrightarrow{F}$大小與方向都保持不變，例如與點A_i處的情形相同。如以F_i表力在這一點的大小，θ_i表小段的方向$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$與力的方向間的夾角，則元素功$\mathbf{A}_i$將（近似地）等於

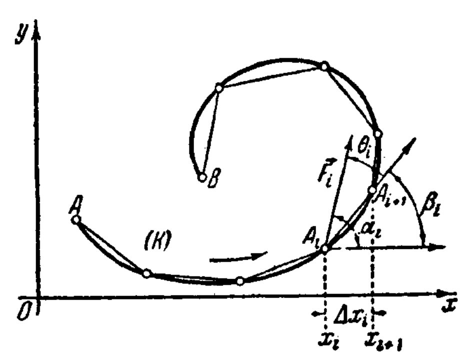

圖 4

$$\mathbf{A}_i \doteq F_i \cdot \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \cos\theta_i.$$

引進x軸與力$\overrightarrow{F_i}$間夾角α_i以及x軸與小段$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$間夾角$\beta_i$，則（圖 4）$\theta_i=\alpha_i-\beta_i$. 在$\mathbf{A}_i$的表示式中令

$$\cos\theta_i=\cos\alpha_i\cos\beta_i+\sin\alpha_i\sin\beta_i,$$

它就可改寫作形狀

$$F_i\cos\alpha_i\cdot \overline{A_iA_{i+1}}\cos\beta_i+F_i\sin\alpha_i\cdot \overline{A_iA_{i+1}}\sin\beta_i.$$

但是不難看出，$F_i\cos\alpha_i$及$F_i\sin\alpha_i$是力$\overrightarrow{F_i}$在坐標軸上的射影，所以

$$F_i\cos\alpha_i=X_i=X(x_i, y_i),\quad F_i\sin\alpha_i=Y_i=Y(x_i, y_i).$$

同樣，式子$\overline{A_i A_{i+1}}\cos\beta_i$及$\overline{A_i A_{i+1}}\sin\beta_i$是線段$\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$在坐標

* 在閉曲線的情形時更正確的說法是：當所有的部分弧的直徑趨近於零時［參看 318］.