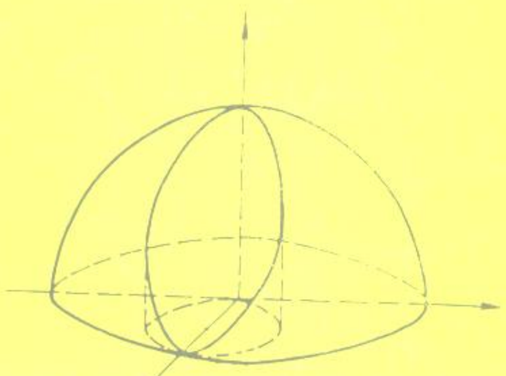
高等学校教材

高等数学（下册）

华南理工大学高等数学教研室 编



华南理工大学出版社

高 等 学 校 教 材

高等数学

下 册

华南理工大学高等数学教研室 编

华南理工大学出版社
·广州·

DV50/11

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/华南理工大学高等数学教研室编. —广州：华南理工大学出版社，1995.1
ISBN 7-5623-0744-X

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 华…
Ⅲ. 高等数学
Ⅳ. O13

华南理工大学出版社出版发行
（广州五山　邮码 510641）
责任编辑：张巧巧
各地新华书店经销
华南理工大学出版社电脑室排版
广州利达印刷厂印装
1995 年 1 月第 1 版　1995 年 12 月第 2 次印刷
开本 850×1168　1/32　印张 17.5　字数 439 千
印数：8 001—13 000
定价：18.50 元

前　言

高等数学是工科各专业的一门重要基础理论课，它不仅要向学生传授本课程的基本理论和运算方法，而且对学生的科学思维和各种能力的培养有着重要的作用.

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》而编写的. 在编写时，既注意数学学科的系统性和严谨性，又考虑工科学生的实际需要和接受能力，力求做到概念准确，条理清晰，重点突出，选材适当，例题多样，启迪思维. 在内容的处理方面，对某些章节的传统讲法作了一些改革.

参加本书编写的有：卢光盛、林举翰、洪潮兴、温向阳、许汉平、高英仪、陈必彬、朱惠媛、陆培光、刘平普、陈凤平、汪秀羌、黄新耀等. 全书由卢光盛总纂定稿.

编　者

于华南理工大学应用数学系

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

在上册中我们研究的函数都仅依赖于一个自变量，这种函数叫做一元函数．在自然科学与工程技术中，还常常遇到依赖于两个或更多个自变量的函数，这种函数叫做多元函数．下册将介绍多元函数及其微分、积分的问题．正如平面解析几何为一元函数微积分提供必要的基础一样，在研究多元函数微积分之前，我们先介绍空间解析几何的有关知识，而且还介绍在科学技术中有着广泛应用的向量及其运算，并以向量为工具来研究空间解析几何．

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

解析几何是运用代数方法来研究几何问题的，使数与形密切地结合．这种结合的基本方法是坐标法，有了坐标，就把点与一组有序数联系起来，进而便可把图形与方程相联系．

从平面直角坐标系很容易推广到空间而得到空间直角坐标系．

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位．这样便构成一个空间直角坐标系（如图 7-1）．O 点叫做坐标原点；这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴．

通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅直线，且按右手系规定坐标轴的正向，即当右手的拇指、食指、中指互相垂直叉

开时(如图 7-2),若拇指指向 x 轴的正向,食指指向 y 轴的正向,则中指所指的方向即为 z 轴的正向了.

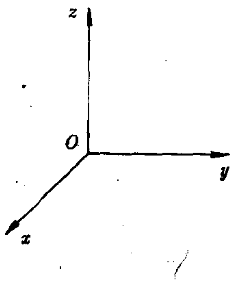


图 7-1

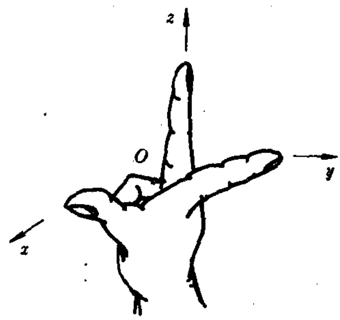


图 7-2

由 x 轴和 y 轴确定的平面叫做 xOy 面;由 y 轴、z 轴确定的平面叫做 yOz 面;由 z 轴、x 轴确定的平面叫做 zOx 面,它们统称为坐标面. 三个坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限,以正的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第一卦限;以负的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第二卦限;以负的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第三卦限;以正的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限为第四卦限. 而第一、二、三、四卦限的下面依次为第五、六、七、八卦限(图 7-3).

设 P 为空间任一点,过点 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与三坐标轴的交点依次为 A、B、C(图 7-4),这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y、z. 于是,任给空间的一点 P,就有唯一的一组有序实数 x、y、z 与之对应. 反之,任给一组有序实数 x、y、z,在 x 轴、y 轴、z 轴上依次取坐标为 x、y、z 的点 A、B、C,过 A、B、C 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,则此三个平面的交点 P 是唯一的对应于实数组 x、y、z 的点. 因此,空间的点 P 与有序实数组 x、y、z 之间便建立了一一对应的关系. 有序实数组 x、y、z

叫做点 P 的直角坐标，记为 $P(x,y,z)$，并把 x、y、z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

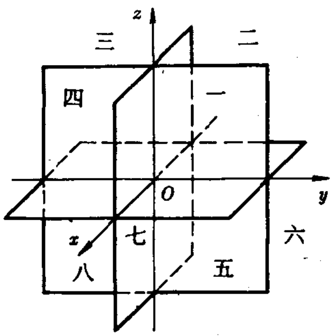


图 7-3

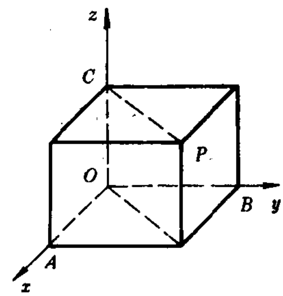


图 7-4

显然，在 xOy 面、yOz 面和 zOx 面上的点，坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$；在 x 轴、y 轴和 z 轴上的点，坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

例 1 在空间直角坐标系中，画出以 $(2,3,-3)$ 为坐标的点 P.

作法 先分别在 x 轴、y 轴、z 轴上描出以 2、3、-3 为坐标的点 A、B、C，在 xOy 面上，过 A 作直线平行于 y 轴，过 B 作直线平行于 x 轴，设它们的交点为 P_1，过 P_1 作平行于 z 轴的直线（即 xOy 面的垂线），再过 C 作与 OP_1 平行的直线，则这两直线的交点 P 为所求（图 7-5）.

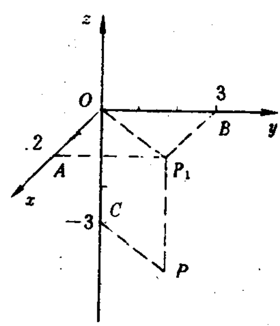


图 7-5

二、空间两点的距离公式

现在我们来导出空间的两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 $|P_1P_2|$ 的计算公式.

如图 7-6，过 P_1、P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这些平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体.

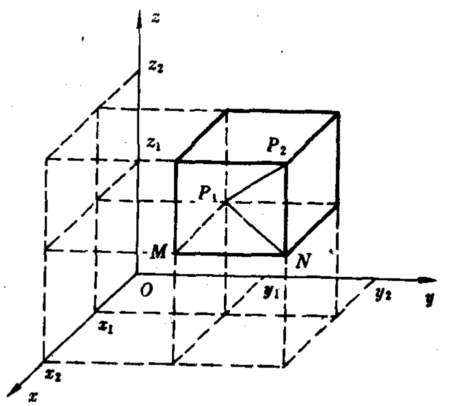


图 7-6

由立体几何知

$$|P_1P_2|^2=|P_1M|^2+|MN|^2+|NP_2|^2,$$

由于 $|P_1M|=|x_2-x_1|$,

$$|MN|=|y_2-y_1|,$$

$$|NP_2|=|z_2-z_1|,$$

所以 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

这就是空间两点的距离公式.

特殊地，点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 2 求证以 $A(3,0,8)$，$B(9,-2,5)$ 及 $C(1,3,2)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2 = (9-3)^2 + (-2-0)^2 + (5-8)^2 = 49,$$
$$|BC|^2 = (1-9)^2 + (3+2)^2 + (2-5)^2 = 98,$$
$$|CA|^2 = (3-1)^2 + (0-3)^2 + (8-2)^2 = 49,$$

所以
$$|AB| = |CA|,$$
$$|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2,$$

因此 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形（$\angle BAC$ 为直角）.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(1,-1,-2)$ 和 $B(2,-2,1)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$. 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即
$$\sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-2-z)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-z)^2},$$

解之，得

$$z = \frac{1}{2}$$

因此，所求的点为 $M\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

习　题　7-1

1. 在空间直角坐标系中，描出下列各点，并指出所在卦限：

$A(1,-1,2)$； $B(2,5,-4)$； $C(4,-2,-3)$； $D(-10,-7,3)$.

2. 求点 $(1,2,3)$ 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.