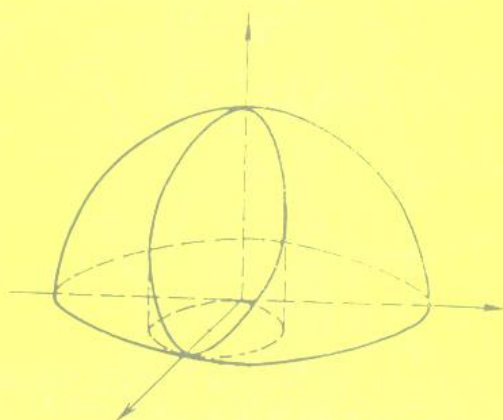


■ 高等学校教材

■ 高等数学 (下册)

■ 华南理工大学高等数学教研室 编

华南理工大学出版社



412301

高等学校教材

高等数学

下册

华南理工大学高等数学教研室 编

华南理工大学出版社

· 广州 ·

DV50/11

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学(下册)/华南理工大学高等数学教
研室编. —广州:华南理工大学出版社,1995.1
ISBN 7-5623-0744-X

- I. 高…
- I. 华…
- Ⅰ. 高等数学
- N. O13

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山 邮码 510641)

责任编辑:张巧巧
各地新华书店经销

华南理工大学出版社电脑室排版
广州利达印刷厂印装

1995年1月第1版 1995年12月第2次印刷
开本 850×1168 1/32 印张 17.5 字数 439千
印数: 8 001—13 000
定价: 18.50元

前 言

高等数学是工科各专业的一门重要基础理论课，它不仅要向学生传授本课程的基本理论和运算方法，而且对学生的科学思维和各种能力的培养有着重要的作用。

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》而编写的。在编写时，既注意数学学科的系统性和严谨性，又考虑工科学生的实际需要和接受能力，力求做到概念准确，条理清晰，重点突出，选材适当，例题多样，启迪思维。在内容的处理方面，对某些章节的传统讲法作了一些改革。

参加本书编写的有：卢光盛、林举翰、洪潮兴、温向阳、许汉平、高英仪、陈必彬、朱惠媛、陆培光、刘平普、陈凤平、汪秀羌、黄新耀等。全书由卢光盛总纂定稿。

编 者

于华南理工大学应用数学系

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 空间直角坐标系	
一、空间点的直角坐标	1
二、空间两点的距离公式	4
习题 7-1	5
第二节 向量及其运算	6
一、向量的概念	6
二、向量的加减法	7
三、向量与数的乘法	8
习题 7-2	10
第三节 向量的坐标	10
一、向量在轴上的投影与投影定理	11
二、向量的分解与向量的坐标	14
三、向量的模与方向余弦	17
习题 7-3	20
第四节 向量的数量积与向量积	21
一、两向量的数量积	21
二、两向量的向量积	25
三、向量的混合积	30
习题 7-4	32
第五节 平面及其方程	33
一、平面的点法式方程	33
二、平面的一般式方程	35
三、两平面的夹角	39
四、点到平面的距离	41
习题 7-5	42
第六节 空间直线及其方程	43

一、空间直线的一般式方程	43
二、空间直线的点向式方程和参数方程	43
三、两直线的夹角	46
四、直线与平面的夹角	47
五、平面束	50
习题 7-6	52
第七节 曲面及其方程	54
一、曲面方程的概念	54
二、柱面	55
三、旋转曲面	57
习题 7-7	59
第八节 空间曲线及其方程	60
一、空间曲线的一般式方程	60
二、空间曲线的参数方程	62
三、空间曲线在坐标面上的投影	63
习题 7-8	65
第九节 二次曲面	66
一、椭球面	66
二、抛物面	67
三、双曲面	70
习题 7-9	70
第八章 多元函数微分法	72
第一节 多元函数的基本概念	72
一、区域	72
二、多元函数的概念	74
三、多元函数的极限	78
四、多元函数的连续性	82
习题 8-1	85
第二节 偏导数	86
一、偏导数的定义及其算法	86
二、二元函数偏导数的几何意义	91
三、高阶偏导数	92
习题 8-2	95

第三节 全微分及其应用	96
一、全微分的概念及其计算	96
二、全微分在近似计算中的应用	103
习题 8-3	104
第四节 多元复合函数的求导法则	105
一、复合函数求导法则	105
二、全导数	111
三、复合函数的高阶偏导数	112
四、全微分形式的不变性	115
习题 8-4	117
第五节 隐函数的求导方法	118
一、一个方程的情形	118
二、方程组的情形	122
习题 8-5	125
第六节 方向导数与梯度	126
一、方向导数	126
二、梯度	130
习题 8-6	136
第七节 微分法的几何应用	136
一、空间曲线的切线与法平面	136
二、曲面的切平面与法线	142
习题 8-7	147
第八节 多元函数的极值	148
一、多元函数的极值	148
二、多元函数的最大值和最小值	152
三、条件极值	154
习题 8-8	159
第九节 最小二乘法	159
习题 8-9	164
第九章 重积分	165
第一节 二重积分的概念与性质	165
一、引例	165

二、二重积分的定义	168
三、二重积分的性质	170
习题 9-1	172
第二节 二重积分的计算法	173
一、利用直角坐标计算二重积分	173
二、利用极坐标计算二重积分	181
习题 9-2	188
第三节 二重积分的应用	191
一、曲面的面积	191
二、平面薄片的重心	196
三、平面薄片的转动惯量	198
习题 9-3	200
第四节 三重积分及其计算	201
一、三重积分的概念及性质	201
二、三重积分的计算	203
习题 9-4	209
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	211
一、利用柱面坐标计算三重积分	211
二、利用球面坐标计算三重积分	214
习题 9-5	223
第十章 曲线积分与曲面积分	226
第一节 对弧长的曲线积分	226
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	226
二、对弧长的曲线积分的计算法	229
习题 10-1	235
第二节 对坐标的曲线积分	236
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	236
二、对坐标的曲线积分的计算法	240
三、两类曲线积分之间的联系	247
习题 10-2	249
第三节 格林公式及其应用	250
一、格林公式	251

二、平面上曲线积分与路径无关的条件	259
三、二元函数的全微分求积	263
习题 10-3	268
第四节 对面积的曲面积分	270
一、对面积的曲面积分的概念与性质	270
二、对面积的曲面积分的计算法	271
习题 10-4	276
第五节 对坐标的曲面积分	277
一、对坐标的曲面积分的概念与性质	277
二、对坐标的曲面积分的计算法	282
三、两类曲面积分之间的关系	288
习题 10-5	291
第六节 高斯公式 通量与散度	292
一、高斯公式	292
二、通量与散度	297
习题 10-6	302
第七节 斯托克斯公式 环量与旋度	303
一、斯托克斯公式	303
二、环量与旋度	308
习题 10-7	314
第十一章 无穷级数	315
第一节 常数项级数的概念及性质	315
一、无穷级数的概念	315
二、无穷级数的收敛性	316
三、级数收敛的必要条件	320
四、级数的基本性质	322
习题 11-1	325
第二节 正项级数及其收敛判别法	326
一、比较判别法	328
二、比值判别法	332
三、根值判别法	335
习题 11-2	340

第三节 任意项级数及其收敛判别法	342
一、交错级数及其收敛判别法	343
二、绝对收敛与条件收敛	345
习题 11-3	349
第四节 幂级数	350
一、函数项级数的概念	350
二、幂级数及其收敛性	352
三、幂级数的运算	357
习题 11-4	362
第五节 函数展开为幂级数	363
一、泰勒级数	364
二、函数展开成幂级数	367
习题 11-5	375
第六节 函数的幂级数展开式的应用	376
一、近似计算	376
二、欧拉公式	380
习题 11-6	381
第七节 傅立叶级数	382
一、问题的提出	382
二、三角函数系的正交性	384
三、函数展开成傅立叶级数	385
习题 11-7	393
第八节 正弦级数与余弦级数	393
一、奇函数与偶函数的傅立叶级数	393
二、函数展开成正弦级数或余弦级数	396
习题 11-8	398
第九节 任意区间上的傅立叶级数	399
习题 11-9	404
*第十节 傅立叶级数的复数形式	405
*习题 11-10	408
*附录 幂级数分析性质的证明	408
第十二章 微分方程	413

第一节 微分方程的基本概念.....	413
习题 12-1	419
第二节 可分离变量的微分方程	420
一、可分离变量的微分方程	421
二、可化为可分离变量的方程	424
习题 12-2	429
第三节 一阶线性微分方程.....	430
一、线性方程	430
二、贝努利方程	434
习题 12-3	436
第四节 全微分方程	438
习题 12-4	442
* 第五节 一阶微分方程的近似解.....	443
* 习题 12-5	449
第六节 建立微分方程及其应用举例	449
一、几何问题	450
二、力学问题	452
三、电学问题	454
四、其它	456
习题 12-6	458
第七节 可降阶的高阶微分方程	459
一、 $y' = f(x)$ 型的微分方程	459
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	460
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程.....	464
习题 12-7	466
第八节 高阶线性微分方程.....	466
一、二阶线性微分方程举例	467
二、二阶齐次线性微分方程解的结构	469
三、二阶线性非齐次微分方程解的结构	472
* 四、常数变易法	473
五、 n 阶线性方程的通解	475
习题 12-8	476

第九节 二阶常系数齐次线性微分方程	476
习题 12-9	483
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程	484
一、 $f(x) = P_n(x)$ 型	485
二、 $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$ 型	486
三、 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 型与 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 型	490
习题 12-10	493
第十一节 二阶常系数线性微分方程应用举例	494
一、阻尼振动	495
二、强迫振动	498
习题 12-11	501
*第十二节 某些特殊变系数的线性微分方程的解法	502
一、变量替换法	503
二、幂级数解法	506
*习题 12-12	511
第十三节 常系数线性微分方程组解法举例	512
*习题 12-13	516
习题答案	517

第七章 向量代数与空间解析几何

在上册中我们研究的函数都仅依赖于一个自变量,这种函数叫做一元函数.在自然科学与工程技术中,还常常遇到依赖于两个或更多个自变量的函数,这种函数叫做多元函数.下册将介绍多元函数及其微分、积分的问题.正如平面解析几何为一元函数微积分提供必要的基础一样,在研究多元函数微积分之前,我们先介绍空间解析几何的有关知识,而且还介绍在科学技术中有着广泛应用的向量及其运算,并以向量为工具来研究空间解析几何.

第一节 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

解析几何是运用代数方法来研究几何问题的,使数与形密切地结合.这种结合的基本方法是坐标法,有了坐标,就把点与一组有序数联系起来,进而便可把图形与方程相联系.

从平面直角坐标系很容易推广到空间而得到空间直角坐标系.

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且一般具有相同的长度单位.这样便构成一个空间直角坐标系(如图 7-1). O 点叫做坐标原点;这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称为坐标轴.

通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴是铅直线,且按右手系规定坐标轴的正向,即当右手的拇指、食指、中指互相垂直叉

开时(如图 7-2),若拇指指向 x 轴的正向,食指指向 y 轴的正向,则中指所指的方向即为 z 轴的正向了。

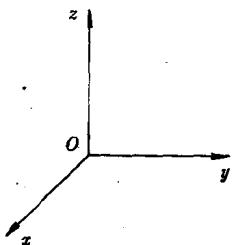


图 7-1

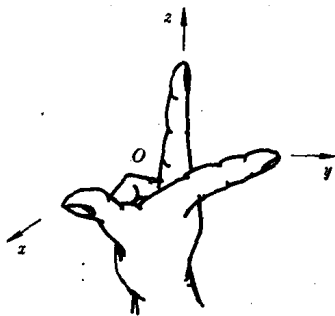


图 7-2

由 x 轴和 y 轴确定的平面叫做 xOy 面;由 y 轴、 z 轴确定的平面叫做 yOz 面;由 z 轴、 x 轴确定的平面叫做 zOx 面,它们统称为坐标面.三个坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限,以正的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第一卦限;以负的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第二卦限;以负的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第三卦限;以正的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限为第四卦限.而第一、二、三、四卦限的下面依次为第五、六、七、八卦限(图 7-3).

设 P 为空间任一点,过点 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴,它们与三坐标轴的交点依次为 A 、 B 、 C (图 7-4),这三点在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z .于是,任给空间的一点 P ,就有唯一的一组有序实数 x 、 y 、 z 与之对应.反之,任给一组有序实数 x 、 y 、 z ,在 x 轴、 y 轴、 z 轴上依次取坐标为 x 、 y 、 z 的点 A 、 B 、 C ,过 A 、 B 、 C 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面,则此三个平面的交点 P 是唯一的对应于实数组 x 、 y 、 z 的点.因此,空间的点 P 与有序实数组 x 、 y 、 z 之间便建立了一一对应的关系.有序实数组 x 、 y 、 z

叫做点 P 的直角坐标, 记为 $P(x, y, z)$, 并把 x, y, z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

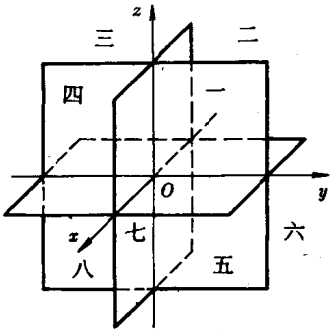


图 7-3

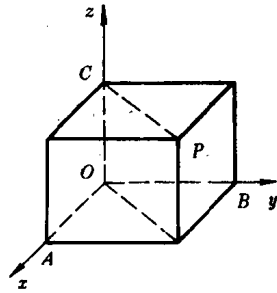


图 7-4

显然, 在 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面上的点, 坐标分别为 $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$; 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的点, 坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$; 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$.

例 1 在空间直角坐标系中, 画出以 $(2, 3, -3)$ 为坐标的点 P .

作法 先分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴上描出以 $2, 3, -3$ 为坐标的点 A, B, C , 在 xOy 面上, 过 A 作直线平行于 y 轴, 过 B 作直线平行于 x 轴, 设它们的交点为 P_1 , 过 P_1 作平行于 z 轴的直线 (即 xOy 面的垂线), 再过 C 作与 OP_1 平行的直线, 则这两直线的交点 P 为所求 (图 7-5).

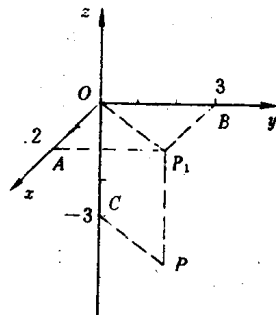


图 7-5

二、空间两点的距离公式

现在我们来导出空间的两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离 $|P_1P_2|$ 的计算公式.

如图 7-6, 过 P_1, P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这些平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体.

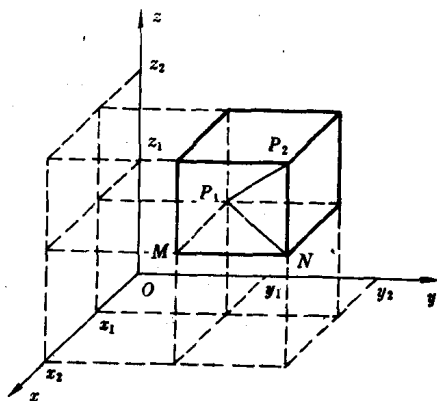


图 7-6

由立体几何知

$$|P_1P_2|^2 = |P_1M|^2 + |MN|^2 + |NP_2|^2,$$

由于 $|P_1M| = |x_2 - x_1|,$

$$|MN| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NP_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

这就是空间两点的距离公式.

特殊地, 点 $P(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例2 求证以 $A(3, 0, 8)$, $B(9, -2, 5)$ 及 $C(1, 3, 2)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2 = (9-3)^2 + (-2-0)^2 + (5-8)^2 = 49,$$

$$|BC|^2 = (1-9)^2 + (3+2)^2 + (2-5)^2 = 98,$$

$$|CA|^2 = (3-1)^2 + (0-3)^2 + (8-2)^2 = 49,$$

所以

$$|AB| = |CA|,$$

$$|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2,$$

因此 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形 ($\angle BAC$ 为直角).

例3 在 z 轴上求与两点 $A(1, -1, -2)$ 和 $B(2, -2, 1)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$. 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-2-z)^2} \\ &= \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-z)^2}, \end{aligned}$$

解之, 得

$$z = \frac{1}{2}$$

因此, 所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

习 题 7-1

1. 在空间直角坐标系中, 描出下列各点, 并指出所在卦限:

$A(1, -1, 2)$; $B(2, 5, -4)$; $C(4, -2, -3)$; $D(-10, -7, 3)$.

2. 求点 $(1, 2, 3)$ 关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.