

452
王 斌 翁衡毅 编译

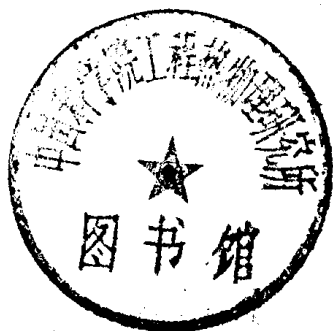
地球物理 流体动力学 导论

海洋出版社

52.8
125

地球物理流体动力学导论

王 斌 翁衡毅 编译



海 洋 出 版 社

1981年 北京

✓100345

内 容 简 介

本书主要根据 J. Pedlosky 教授著的 «Geophysical Fluid Dynamics» 一书及有关文献编译。

书中采用物理推理和数学推导相结合的方法,系统地总结了海洋与大气大尺度运动动力学的理论基础。对旋转参考系中的运动方程、位势涡度和地转运动等概念,以及作为研究准地转运动理论框架的无粘浅水理论、粘性运动理论和大洋环流的均质模式作了充分的讨论。详细论述了罗斯贝波、惯性边界流、斜压与正压不稳定、波动传播与波动相互作用等理论。推导了球面上中纬度准地转位涡方程,并讨论了它对海洋与大气运动的应用。

本书可供海洋、气象、地球物理、流体力学等方面的科学工作者、高等院校教师、研究生和高年级大学生在学习和工作中参考。

本书还编译了有关数学基础和奇异摄动理论简介,以助读者理解书中内容。

2762/17

地球物理流体动力学导论

王斌 翁衡毅 编译



海洋出版社出版

(北京复兴门外海贸大楼)

国防科委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售



1981年7月第一版

开本: 787×1092 1/16

字数: 480,000

统一书号: 13193·0070

1981年7月第一次印刷

印张: 35

印数: 1,536

定价: 5.30元

81.6.20

编译者的话

海洋与大气是同处于旋转地球上、且在重力场作用下形成稳定密度层结的流体。因此，发生在海洋与大气中的大尺度运动，都遵循旋转层结流体运动的普遍规律，从而可用统一的理论方法加以研究。地球物理流体力学现阶段的主要研究对象是海洋与大气大尺度运动动力学问题。由于海洋与大气具有许多共同的流体力学特性。所以对于其中一方所作的研究，往往可以加深我们对另一方的了解；掌握了地球物理流体力学的基本概念，对于研究海洋动力学和大气动力学来说，都是一个最好的起点。

地球物理流体力学是近年来迅速兴起的一门边缘学科。我们在中国科技大学研究生院学习期间，在大气物理研究所朱抱真先生指导下，阅读了一些地球物理流体力学方面的有关论著，其中，J. Pedlosky 教授的有关著作是主要内容。鉴于国内有关地球物理流体力学的研究正在日益开展，而尚无一本系统专著，我们将1979年底出版的 Pedlosky 的《Geophysical Fluid Dynamics》一书译出，其中对原文公式和图中有误的地方作了一些修改，对个别章节的某些部分作了一些删节；同时，为了使有兴趣的读者能了解该学科的有关一些重要概念和课题，又从郭晓岚、G. Verones 和 S. Pond 与 G. Pickard 的有关论著中增补了下述内容：包辛内斯克近似、地转适应过程、大气和海洋中波动的分类与特征、大洋环流的数值模式。为便于阅读正文中的数学推导，还编译了有关的数学基础和奇异摄动理论简介，作为本书的附录。增补的内容均在标题中用星号标出以与 Pedlosky 的原书区分。

本书对地球物理流体力学的主要问题作了比较系统的叙述。全书共分八章：第一章与第二章概括叙述了某些重要的基本概念，如旋转坐标系中的基本运动方程、位势涡度、地转运动和地转适应，线性波动的分类与特征等。三至五章专门讨论均质旋转流体动力学。其中第三章详细考察了一个既忽略层结效应、又不考虑粘性的最简单的均质旋转流体模式，为建立准地转理论提供了一个有用的动力学框架。这对阐明准地转运动的性质、深入了解位涡动力学的基本概念来说，颇有裨益。用这个简单模式简明论述了罗斯贝波、惯性边界流、 β 平面、能量传播和波动相互作用等重要课题。第四章用均质模式研究了摩擦影响大尺度运动的某些基本概念，提出了描写粘性运动的最简单的湍流混合模式。第五章运用第三、四章的结果，讨论一个重要的地球物理问题——大洋风生环流。第六章进一步考察层结流体在旋转球面上的运动规律。首先，用推理和直观的方法建立球面上中纬度准地转位涡方程；然后，用它讨论层结流体中的罗斯贝波、大气中的强迫驻波、波动与纬向流的相互作用、层结海洋中的地形波及温跃层等课题。第七章专门阐述不稳定理论。这一理论不仅在动力气象学中占有中心地位，而且在海洋动力学中也有重要作用。该章系统地讨论了斜压不稳定和正压不稳定的线性理论，以及斜压不稳定的非线性理论。第八章讨论的是难以归并到前几章中的某些课题，用以说明对前几章中提出的某些基本概念进行推广的方法。

由于我们水平有限，编译中难免有错误与不妥之处，恳请读者给以指正。

1980年10月

目 录

第一章 预备知识	(1)
1.1 地球物理流体力学.....	(1)
1.2 罗斯贝数.....	(1)
1.3 密度层结.....	(5)
1.4 非旋转坐标系中的运动方程.....	(6)
1.5 旋转坐标系.....	(9)
1.6 旋转坐标系中的运动方程.....	(11)
1.7 科氏加速度与罗斯贝数.....	(13)
1.8 包辛内斯克近似*	(14)
第二章 基础知识	(19)
2.1 涡度.....	(19)
2.2 环流.....	(22)
2.3 凯尔文定理.....	(25)
2.4 涡度方程.....	(26)
2.5 位势涡度 (位涡)	(28)
2.6 热成风.....	(31)
2.7 泰勒-普劳德曼定理	(33)
2.8 地转运动.....	(34)
2.9 地转近似和静力近似的结果.....	(38)
2.10 地转退化.....	(41)
2.11 地转适应过程*	(41)
2.12 大气和海洋中扰动的分类与特征*	(46)
第三章 无粘浅水理论	(60)
3.1 引言.....	(60)
3.2 浅水模式.....	(60)
3.3 浅水方程.....	(61)
3.4 位涡守恒: 浅水理论.....	(64)
3.5 积分关系.....	(66)
3.6 小振幅运动.....	(67)
3.7 线性地转运动.....	(69)
3.8 等深流体层中的平面波.....	(70)
3.9 邦加莱波和凯尔文波.....	(73)
3.10 罗斯贝波.....	(78)
3.11 罗斯贝波的动力学诊断.....	(80)

3.12	浅水理论的准地转尺度分析	(81)
3.13	定常的准地转运动	(87)
3.14	惯性边界流	(87)
3.15	准地转罗斯贝波	(91)
3.16	罗斯贝波的机制	(94)
3.17	β 平面	(96)
3.18	纬向流中的罗斯贝波	(97)
3.19	群速度	(99)
3.20	多时间尺度方法	(105)
3.21	罗斯贝波中的能量和能通量	(106)
3.22	能量传播图	(108)
3.23	反射过程和辐射条件	(109)
3.24	初始扰动产生的罗斯贝波	(112)
3.25	闭区域中的准地转标准波型	(123)
3.26	共振相互作用	(130)
3.27	能量和拟能	(138)

附 录

第四章	摩擦和粘性流	(141)
4.1	引言	(141)
4.2	湍流雷诺应力	(142)
4.3	艾克曼层	(145)
4.4	近于无摩擦的流动之性质	(151)
4.5	边界层理论	(156)
4.6	有摩擦时的准地转动力学	(165)
4.7	旋转减弱	(168)
4.8	定常运动	(169)
4.9	斜面上的艾克曼层	(170)
4.10	自由面上的艾克曼层	(176)
4.11	有摩擦和地形的准地转位涡方程	(181)
4.12	罗斯贝波的衰减	(183)
4.13	侧边界摩擦层	(185)
第五章	大洋风生环流的均质模式	(192)
5.1	引言	(192)
5.2	均质模式	(194)
5.3	斯维尔德鲁普关系	(198)
5.4	经向边界层: 蒙克层	(204)
5.5	斯多美尔模式: 底摩擦层	(211)
5.6	惯性边界层理论	(215)
5.7	有摩擦时的惯性流	(220)

5.8	罗斯贝波和大洋环流的西部强化	(222)
5.9	定常环流耗散之积分	(224)
5.10	自由惯性波	(228)
5.11	数值试验	(230)
5.12	艾克曼上升流	(234)
5.13	洋底地形的影响	(243)
5.14	对均质模式的总结	(246)
5.15	大洋环流的数值模式*	(246)
第六章	层结流体在球面上的地转运动	(254)
6.1	引言	(254)
6.2	球坐标系中的运动方程: 尺度分析	(254)
6.3	地转近似: $\varepsilon = O(L/r_0) \ll 1$	(260)
6.4	静力稳定度概念	(264)
6.5	大气中天气尺度运动的准地转位涡方程	(267)
6.6	层结流体中的艾克曼层	(271)
6.7	位涡方程的边界条件: 大气	(273)
6.8	海洋中天气尺度运动的准地转位涡方程	(273)
6.9	位涡方程的边界条件: 海洋	(275)
6.10	地转能量方程和有效位能	(277)
6.11	层结流体中的罗斯贝波	(282)
6.12	罗斯贝波标准模态: 垂直结构方程	(284)
6.13	大气中的强迫驻波	(290)
6.14	波动-纬向流相互作用定理	(295)
6.15	层结海洋中的地形波	(300)
6.16	多层模式	(307)
6.17	两层模式中的罗斯贝波	(312)
6.18	多层模式与多层差分模式的关系	(314)
6.19	地转近似 $\varepsilon \ll L/r_0 \ll 1$, 斯维尔德鲁普关系	(317)
6.20	地转近似 $\varepsilon \ll 1, L/r_0 = O(1)$	(320)
6.21	温跃层问题	(324)
第七章	不稳定理论	(335)
7.1	引言	(335)
7.2	不稳定问题的提出: 连续层结模式	(336)
7.3	线性稳定性问题: 不稳定的条件	(341)
7.4	标准波型	(347)
7.5	相速和增长率的范围	(351)
7.6	斜压不稳定: 基本机制	(355)
7.7	伊迪模式	(358)
7.8	恰尼模式和临界层	(365)

7.9	两层模式的不稳定: 问题的提出	(374)
7.10	两层模式中的标准波型: 不稳定的必要条件	(377)
7.11	两层模式中的斜压不稳定: 菲利普斯模式	(380)
7.12	摩擦效应	(386)
7.13	非纬向基本流的斜压不稳定	(389)
7.14	正压不稳定	(394)
7.15	具有水平和垂直切变的基本流之不稳定性	(399)
7.16	斜压不稳定的非线性理论	(404)
第八章	非地转运动	(418)
8.1	各向异性尺度	(418)
8.2	大陆架波	(420)
8.3	有耗散的层结流体中的慢环流	(427)
8.4	锋生理论	(438)
8.5	赤道波动	(451)
附录一	数学基础*	(465)
A1.1	矢量分析	(465)
A1.2	曲线坐标系	(470)
A1.3	曲线坐标系中的矢量关系	(472)
A1.4	球坐标系	(474)
A1.5	柱坐标系	(476)
A1.6	勒让德多项式	(477)
A1.7	拉普拉斯方程	(481)
A1.8	富里叶级数	(486)
A1.9	富里叶积分	(488)
A1.10	波动方程	(491)
A1.11	连带勒让德多项式	(497)
A1.12	贝塞尔函数	(499)
附录二	奇异摄动理论简介*	(502)
A2.1	摄动理论的基本概念	(502)
A2.2	匹配渐近展开方法	(510)
A2.3	多尺度方法	(514)

第一章 预 备 知 识

1.1 地球物理流体力学

大气和海洋具有许多共同的流体力学性质。所以,对其中一方所作的研究,可使我们加深对另一方的了解。经验表明,掌握了既可应用于大气、又可应用于海洋的基本动力学概念,对于研究大气和海洋都是最好的起点。地球物理流体力学的主旨就是研究对于理解大气和海洋所必需的基本动力学概念。原则上,地球物理流体力学研究一切天然发生的流体运动。这些运动的时空尺度范围很大:从柔和微风之短暂扰动,直到大型持久的海洋与大气流系。事实上,即使“固体”地球本身,在数百万年的时间尺度上也有类似流体的内部环流,其表现现象是海底扩张和大陆漂移。所有这些现象当然都可以包括在地球物理流体力学的范畴内。然而,部分是出于历史原因,地球物理流体力学集中研究的对象还是大气和海洋大尺度现象的动力学问题。正是在大尺度运动中,大气和海洋的共同特性表现得最明显;同时,象海洋中的湾流和大气中的急流这样一些引人注目的流动,激发人们把注意力集中在大尺度运动上,并得到了一些令人满意的研究结果。所以,我们在此只对大气与海洋的大尺度动力学提供一个导论性的、而不是包罗万象的论述。尤其是,书中并不讨论气象学与海洋学的观测特征和描述性特征。当然,熟悉这类事实对于恰当地提出新的流体力学理论是必要的。为了阐明某些特定研究方法的基本思想,在书中适当地给出描述特殊问题的参考文献。

本书推导的原理,基本上是用了解自然现象的理论概念。这些原理大多数来自模式问题之研究,这些研究旨在建立基本概念,而不是详细地模拟具体的地球物理现象。地球物理流体力学通过研究日益复杂的模式体系而取得了历史性的进展,其中每一阶段都建立在正确分析简化模式所形成的直觉认识上。

1.2 罗斯贝数

对“大尺度”一词,需要有一个比较确切的定义。特征长度尺度为50公里的现象,在大气中也许是小尺度的,但在海洋中,正是这个尺度的运动可以确认为是大尺度运动。一个现象是否为大尺度的,在动力学上并不只取决于它的大小。

在本书中,大尺度运动是指那些显著地受到地球自转影响的运动。对于一个特定现象,表示旋转影响程度的一个重要量是罗斯贝数,其定义如下。令 L 为运动的特征长度尺度。例如,图1.2.1表示对流层气压场中实测的一种典型波型。运动的典型而适当的长度尺度,即表征动力场水平空间变化的长度尺度,可以是气压脊与相邻气压槽之间的距离。类似地,令 U 为运动的水平特征速度尺度。在图1.2.1中, L 为 $O(1,000\text{公里})$, 而 U 为 $O(20\text{米/秒})$ 。(1)

(1) 符号 $O(\quad)$ 在本书中用于两种完全不同的场合。表示函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间关系的表达式 $f(x) = O(g(x))$ (在某极限下), 意味着 $f(x)/g(x)$ 在该极限下渐近地趋于常数。这个符号还用来表示一个变量 (在本情况下为 U) 具有以括号内的量级符号值所例示的大小。在后一种情况下, 它并不隐含取极限或近似判断。两种用法非常不同, 通过上下文关系会清楚地看出该符号指哪种情况。

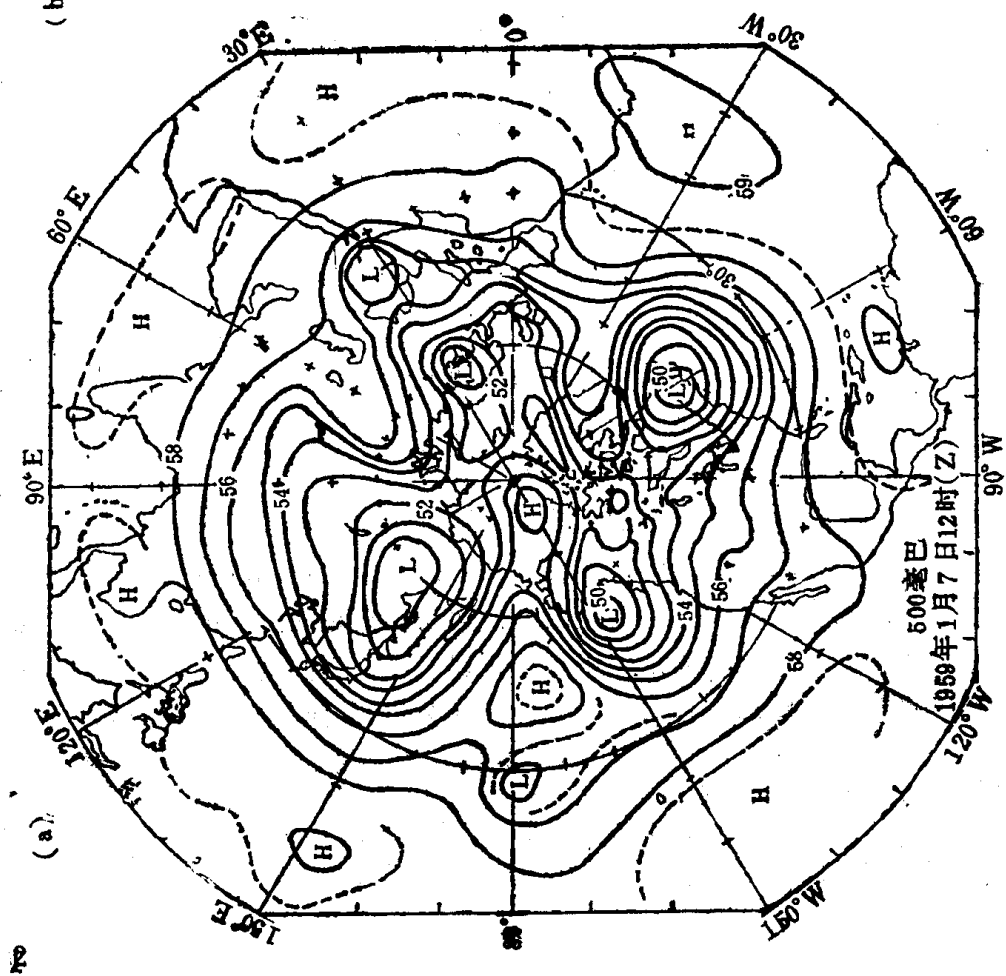


图1.2.1 (a) 约5.5公里高度处的等压线。等压线大体上可以表示运动的流线(Palmén和Newton, 1969)。

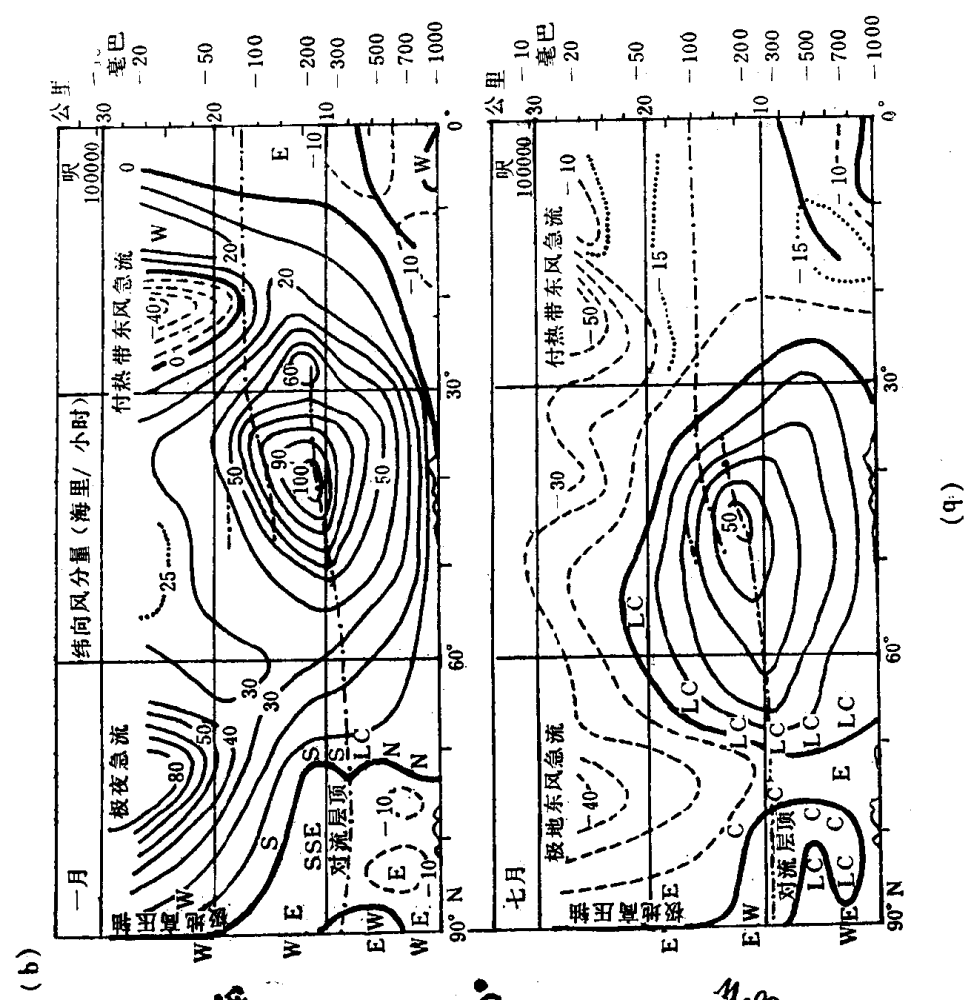


图1.2.1 (b) 表示风速分布的纬向风 (即沿纬圈的风) 剖面。
(1节=50厘米/秒) (Palmén和Newton, 1969, 根据 Kochanski, 1955)。

流体元以速度 U 运动，经过距离 L 所需的时间为 L/U 。如果这一时间周期远小于地球自转周期，那么在运动的时间尺度内，流体几乎不能感到地球的自转。如果自转是重要的，那我们可预料

$$\frac{L}{U} \geq \Omega^{-1} \quad (1.2.1)$$

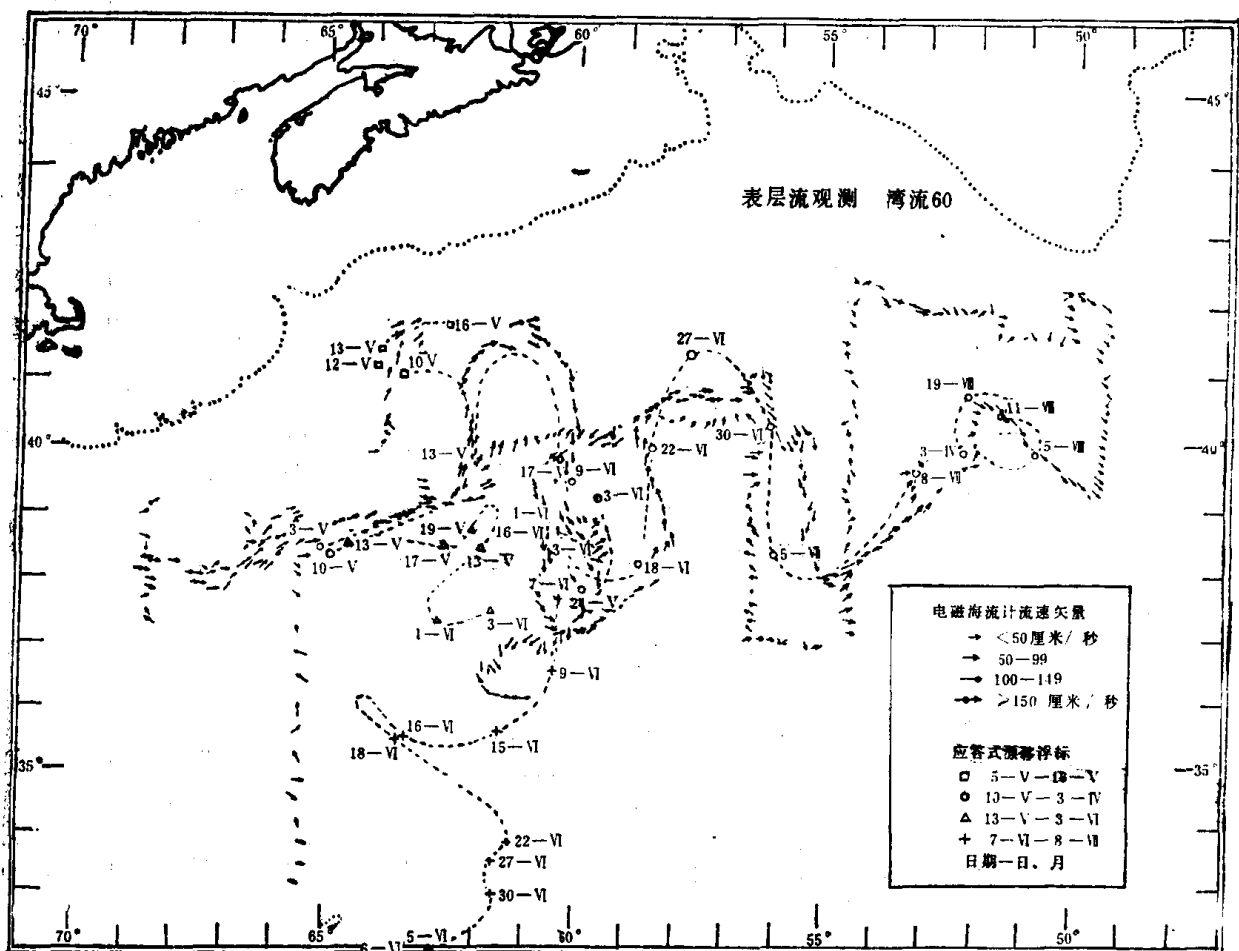
或等价地有

$$\varepsilon = \frac{U}{2\Omega L} \leq 1 \quad (1.2.2)$$

无量纲参数 ε 是罗斯贝数。我们把那些 L 足够大、致使 ε 之量级等于或小于 1 的运动，定义为大尺度运动。对于地球来说， $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}$ /秒。若取上面给出的 L 和 U ，则有 $\varepsilon = 0.137$ ，因而我们可以想象到地球的自转是重要的。

这样的估计，往往需要作进一步的修正。对行星运动而言，我们将看到，事实上只用垂直于地面的行星自转分量来估计 ε 。因此，对于低纬运动，(1.2.2) 式估计的罗斯贝数可能是过低的。详尽的细节和限制将在以后讨论。

注意，特征速度越小，就越可以把具有较小 L 的运动也看作是大尺度运动。湾流的速度量级为 100 厘米/秒。尽管它的特征水平尺度（如图 1.2.2 所示）只有 $O(100)$ 公里，而它的罗斯贝数却为 0.07。使用地球自转的局部法向分量值，虽然会使 ε 值在纬度 30° 处增加一倍，但



(a)

这样的运动显然仍符合大尺度运动的判据。

上述考虑基本上是运动学方面的。然而，一个适度小量的罗斯贝数之重要的动力学后果，

可从下述事实看出：小 ϵ 意味着大尺度运动远比地球作固体旋转所引起的速度慢。取一级近似——即精确到 $O(\epsilon)$ ——大气和海洋随地球一起旋转，但它们与刚体旋转又有小而重要的偏差，我们（也与地球一起旋转）把这偏差视为风和海流。在旋转坐标系（它在运动学上消除了刚体旋转）中描述运动时，有意义的重要的运动是相对于刚体旋转的小偏差，清楚地认识到这一点是很有益的。在以速率 Ω 旋转的坐标系中，我们所看到的只是相对于旋转刚体之偏差。由于这种旋转坐标系是一个有加速度的坐标系，而不是惯性坐标系，因此要考虑一些众所周知的“惯性力”，即离心力和微妙而重要的科氏力。我们将看到，只要罗斯贝数是少量，则科氏力在力的平衡中总是一个主要分量。大尺度的海洋或大气运动的动力学研究，必须考虑有重要地球物理学意义的科氏力。一旦考虑了科氏力，许多难以捉摸的动力学现象便可迎刃而解。

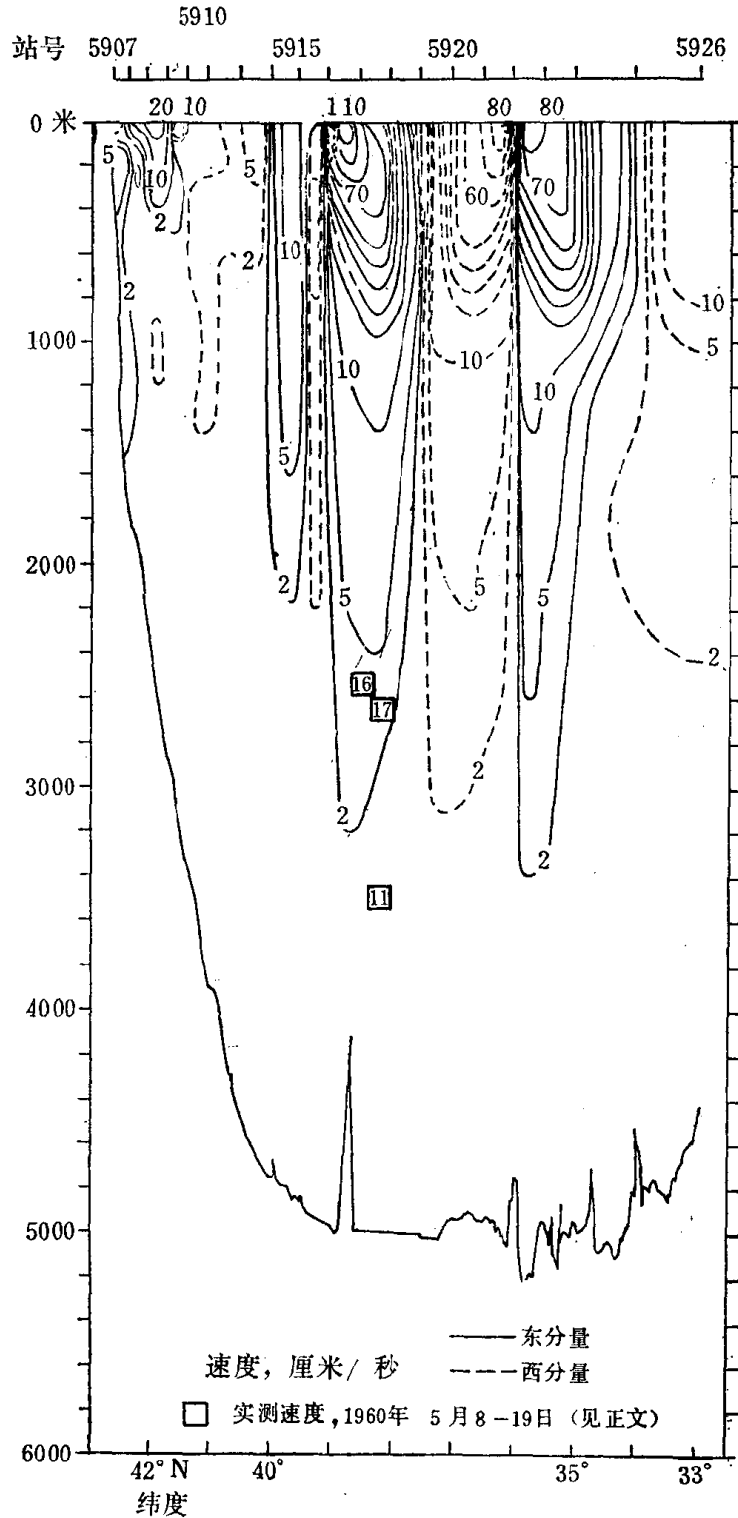


图1.2.2 (a)海面观测揭示的湾流路径;
(b)说明流速结构的湾流截面图(Fuglister, 1963)。

1.3 密度层结

太阳造成的地面不均匀加热，在大气和海洋中都引起了显著的密度变化。事实上，除了太阴潮之外，上述加热是造成大气和海洋中一切运动的基本原因。层结的一个重要观测性质是，在通常的意义（即重流体位于轻流体之下）上，大尺度运动几乎总是重力稳定的。图1.3.1给出大洋中典型的密度深度廓线。除了较薄的表面混合层（其中的水不断受到风作用的搅动）外，密度随深度增加。图1.3.2给出大气中类似的密度廓线。由于空气有可压缩性，所以环境密度随高度的递减在量度垂直移动的流体元之重力稳定性方面多少有些虚假性。后面将讨论对此需作哪些修正。尽管如此，大气密度之递减仍足以表明其重力稳定性。

稳定层结的一个重要后果是，抑制平行于局部重力方向的运动，而这个约束有助于产生准水平的大尺度运动。以后将看到，由于旋转的作用，在密度场和速度场的结构之间，存在

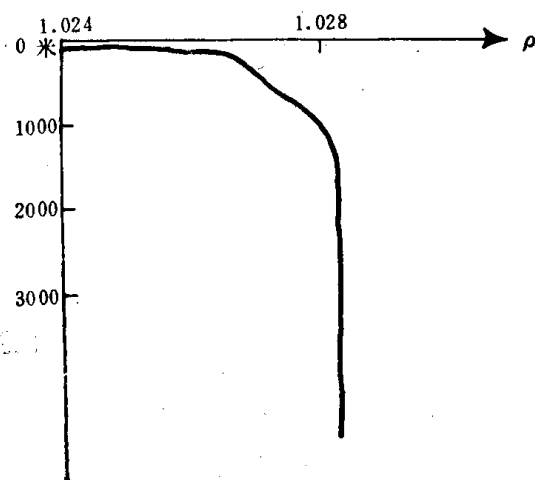


图1.3.1 大洋中密度随深度的典型分布。注意密度剧烈变化的地带，它在一公里左右的深度处，叫作密度跃层。

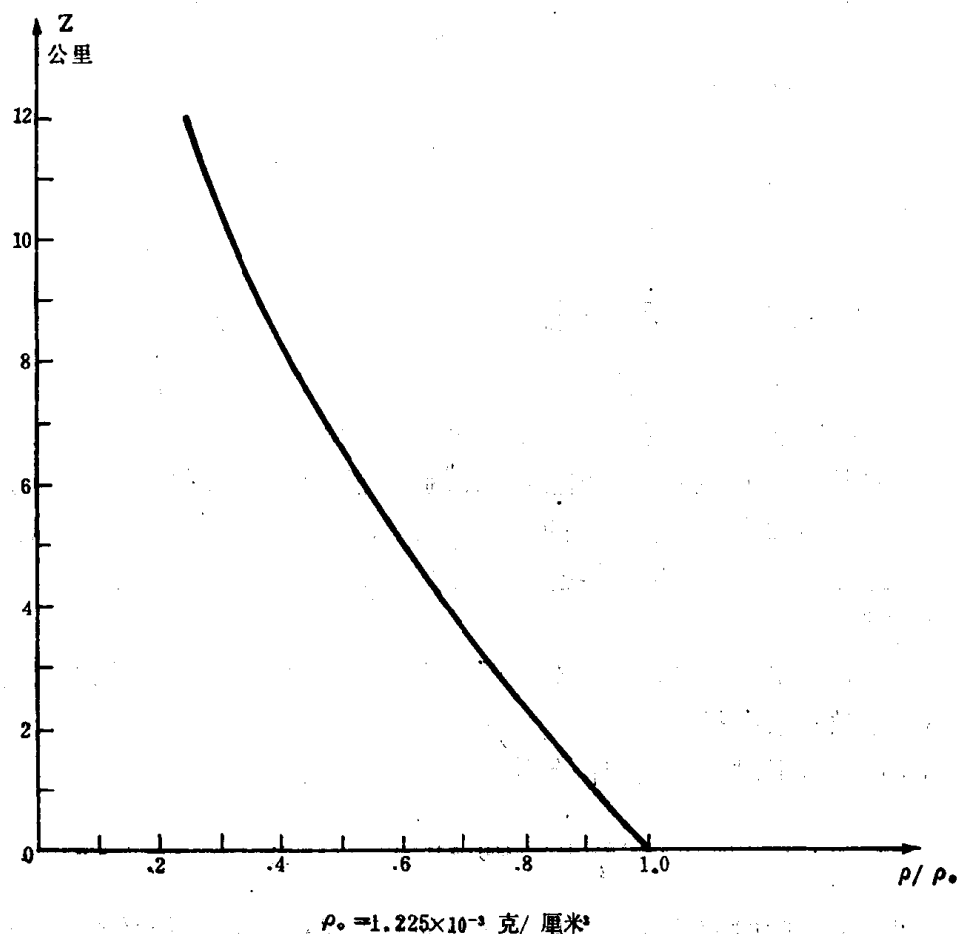


图1.3.2 大气中密度随高度的分布（根据NASA1962年标准大气）。

直接的密切关系。

度量层结的一个有用的无量纲数为布格数：

$$S = g \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{D}{4\Omega^2 L^2}, \quad (1.3.1)$$

其中 $\Delta \rho / \rho$ 是流体在其运动的垂直尺度 D 上的特征相对密度差， g 是重力加速度。参数 S 可以用长度尺度之比写成

$$S = \left(\frac{L_D}{L} \right)^2, \quad (1.3.2)$$

其中长度

$$L_D = \frac{1}{2\Omega} \left(g \frac{\Delta \rho}{\rho} D \right)^{1/2} \quad (1.3.3)$$

叫作罗斯贝变形半径。 S 取决于变形半径与几何尺度 L 之比，但不取决于速度尺度 U 。

与罗斯贝数的情况一样，布格数实际上必须用地转角速度的局部法向分量来表示，这意味着在其他因子都相同的情况下，低纬运动将具有较大的 S 值。

与稳定密度场有关的大尺度海洋和大气运动的另一个重要性质是，运动的水平尺度与垂直尺度相差很大。大洋的深度很少超过六公里，而且，主要流系的垂直范围一般远小于六公里。然而水平尺度都是几百公里，甚至几千公里。同样，象图1.2.1所示的那种主要的大尺度现象，具有十公里的垂直尺度，但 L 为 $O(1,000 \text{ 公里})$ 。

一般说来，大尺度的海洋和大气运动发生在非常薄的流体层内，而其水平尺度却很大，这个几何约束使流体运动轨迹几乎位于一水平面内，即运动的形态比

$$\delta = \frac{D}{L} \quad (1.3.4)$$

一般是非常小的量。

1.4 非旋转坐标系中的运动方程

大尺度海洋与大气运动动力学的出发点是，假定海洋和大气运动的动力学建立在系统应用连续流体运动方程的基础上。描述运动所需要的动力学变量是，密度 ρ 、压力 p 、速度 $\mathbf{u}$ ，以及某些热力学变量，如温度 T 、单位质量的内能 e 和比熵 s 。根据流体物理性质之不同，在某些特殊情况下，也许还需要附加诸如盐度之类的变量，或者，在热力学状态关系可以简化的情况下，可略去某些状态变量。我们全部用欧拉方法描述运动，在此框架内，动力学变量是时间 t 和位矢坐标矢量 $\mathbf{r}$ 的函数。

在本节中，我们将给出惯性坐标系或非旋转坐标系中的运动方程。它们的推导可以在任何一本基础流体力学教科书中找到。

当流体内部无质量源汇时，质量守恒条件可用连续方程表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \quad (1.4.1)$$

这个方程说明，密度随时间的局部变化，必与质量通量 $\rho \mathbf{u}$ 的散度相平衡。上式也可以写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.4.2)$$

其中

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.4.3)$$

是个别流体元的任意属性对时间的全导数（通常叫作实质导数）。

用于连续流体的牛顿运动定律的形式为

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \nabla \phi + \mathcal{S}(\mathbf{u}), \quad (1.4.4)$$

或单位体积的质量乘以加速度等于压力梯度力、彻体力 $\rho \nabla \phi$ 、与力 $\mathcal{S}$ 之和，这里 ϕ 是用来表示诸如重力之类的保守彻体力之位势， $\mathcal{S}$ 原则上可为任意的非保守力，但实际上在将要讨论的所有情况中，它表示流体内的摩擦力。对于象空气和水这样的牛顿流体⁽¹⁾，

$$\mathcal{S} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (1.4.5)$$

其中 μ 是分子粘性系数。当 μ （大体上是热力学状态变量的函数）在运动场中被设为常数时， $\mathcal{S}$ 的上述表达式是准确的。这种近似适合于我们所要讨论的问题。

一个特别麻烦的问题是，如果状态变量只描述大尺度运动，那么 $\mathcal{S}$ 的这个表达式是否能用？从(1.4.1)和(1.4.4)的形式已清楚地看出，运动方程是非线性二次方程，即包含动力学变量的乘积。这意味着原则上不能简单地叠加方程的解。用物理术语来说，就是一种空间尺度的运动与其他尺度的运动有相互作用。因此存在一种先验的可能性，即我们不大感兴趣的小尺度运动，也可能影响大尺度运动。一个普遍但并不很确切的见解是，在较长时间尺度中（随机出现）的小尺度运动，通过类似于分子扩散的输运过程，对较大尺度运动的性质起着平滑和混合的作用。关于这个问题的进一步讨论可见第四章，但是考虑到 $\mathcal{S}$ 表达式的可能的合乎逻辑的改进，我们把(1.4.4)视为基本运动方程，而(1.4.5)可以看作一个摩擦力的模式（当然，它对实验室试验来说是精确的）。

除非把密度看作常数（对于许多重要现象，这是一个有用的理想化方法），否则，动量方程和连续方程不能使运动方程闭合。所以，还必须考虑热力学第一定律，它可以写为

$$\rho \frac{de}{dt} = -p\rho \frac{d}{dt} \rho^{-1} + k \nabla^2 T + \rho Q, \quad (1.4.6)$$

其中 e 是单位质量的内能， T 是温度， k 是热传导系数， Q 是内热源引起的单位质量的加热率。

为方便起见，我们引入热力学状态属性 s （比熵）。熵与其他状态属性有关，其关系式为

$$T \Delta s = \Delta e + p \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (1.4.7)$$

其中 Δs 、 Δe 和 $\Delta(1/\rho)$ 是 s 、 e 和 $1/\rho$ 的任意增量。尤其是

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (1.4.8)$$

故(1.4.6)式可写为

(1) 在牛顿流体中应力与相应的速度切变成正比，比例系数 μ 与速度场无关，但可为温度和压力的函数。

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + Q. \quad (1.4.9)$$

为使方程组闭合, 还需要有表示流体物理性质的状态关系。在最简单的情况下 (如干空气和纯水), 状态关系的一般形式为

$$\rho = \rho(p, T) \quad (1.4.10)$$

和

$$s = s(p, T). \quad (1.4.11)$$

利用(1.4.11), 我们可把(1.4.9)重新写成如下形式:

$$C_p \frac{dT}{dt} + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + Q, \quad (1.4.12)$$

其中用了定压比热的定义:

$$C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p.$$

进一步利用热力学关系⁽¹⁾

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (1.4.13)$$

则(1.4.12)变为

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho} \alpha \frac{dp}{dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + Q \quad (1.4.14)$$

其中 α 是由关系式

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.4.15)$$

定义的热膨胀系数。例如, 大气中干空气的状态关系可以很好地由理想气体定律来表示:

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (1.4.16)$$

其中 R 是干空气的气体常数。对于这样一种理想气体, 比熵可表示为

$$s = C_p \ln T - R \ln p, \quad (1.4.17)$$

在此情况下, $\alpha = 1/T$, 因此(1.4.14)变为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} \left\{ \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + Q \right\} \quad (1.4.18)$$

而

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \quad (1.4.19)$$

叫做位温, 这里 p_0 是一个固定的参考压力。注意, 在没有热传导和内部加热的情况下, 对每个流体元来说, θ 是一个保守属性。对于可压缩性之影响很小的纯液体, 采用简单的状态关系

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1.4.20)$$

(1) 如见Batchelor(1967), 第一章。

往往是适当的。在这种情况下, (1.4.14)式左边第二项也可忽略。此时, 热量方程, 或热力学第一定律, 可取如下形式:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{Q}{C_p}, \quad (1.4.21)$$

其中 $\kappa = k/\rho C_p$ 是热扩散系数。借助于(1.4.20), 也可把方程(1.4.21)完全用密度来表示, 即

$$\frac{d\rho}{dt} = \kappa \nabla^2 \rho - \frac{\alpha \rho_0}{C_p} Q. \quad (1.4.22)$$

必须注意, (1.4.2)式和(1.4.22)式表示两个完全不同的物理原理, 前者表示质量守恒, 而后者对于液体是近似地表示了能量守恒。

对于不可压液体, 或者非常近于不可压的液体, 密度差很小, 以致它对质量平衡的影响可以忽略, 故对于不可压液体, (1.4.2)式可近似地写为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.4.23)$$

这并不意味 $d\rho/dt$ 为零; 事实上, $d\rho/dt$ 由(1.4.22)式给出, 仅当热传导和内部加热可忽略时, 即仅当运动是绝热的情况下, 它才为零。(1.4.23)式的正确性, 必须用系统的尺度分析方法对各种情况加以考察, 我们将在第六章中再来讨论这个问题。暂时可把(1.4.23)式取为不可压缩的定义。

对于象海水这种盐度影响密度的比较复杂的液体, 必须用密度、盐度、温度和压力之间的一个比较复杂的关系, 来代替(1.4.20)的简单形式⁽¹⁾。在相当好的近似程度上(Bryan和Cox 1972), 有

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0) + \alpha_S (S - S_0)], \quad (1.4.24)$$

其中 S 是海水的盐度 (克/千克), α_T 和 α_S 是由经验确定的深度之函数。在这种情况下, 我们还需要一个表示盐度平衡的附加方程, 其形式为

$$\frac{dS}{dt} = F(S), \quad (1.4.25)$$

其中必须给定 $F(S)$, 以表示盐度的源、汇或扩散的再分布。

1.5 旋转坐标系

我们早已注意到, 描写海洋和大气运动最自然的坐标系, 是以行星角速度 Ω 旋转的坐标系。当然, 现象本身并不受坐标系选择的影响, 但我们必须承认这样一个事实, 即对现象的描述取决于我们对坐标系的选择。对于旋转坐标系中的一个观察者来说, 固定在惯性空间中的物体似乎是在旋转, 并且, 由于其视轨迹之弯曲, 因而它们是有加速度的。注意到牛顿运动定律及其导出形式(1.4.4)只在惯性坐标系中才适用, 这便可以解释上述现象。如果要全部用旋转坐标系中直接观测的量来表示的话, 那末我们必须建立一个新形式的适当的运动方程。

首先考虑一个大小不变、但以角速度 Ω 旋转的矢量 $\mathbf{A}$ (图1.5.1)。设 $\mathbf{A}$ 与 Ω 之间的夹角为 γ 。在很小的时间间隔 Δt 内, $\mathbf{A}$ 转动了一个角度 $\Delta\theta = |\Omega| \Delta t$, 其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的大小。但从图1.5.2上显而易见, $\mathbf{A}$ 的微小变化为

(1) 参见1.8节的详细讨论。