张新义 著

机械精度设计的理论概率法

机械工业出版社

机械精度设计的理论概率法

张新义　著

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字054号

本书比较深入、系统地论述了精密定位、过盈联结、传动孔系几何精度设计的理论概率方法及其应用。本书的研究方法是依据机械加工工艺过程和装配中经典误差理论及已知的几何参数分布规律的所有特征，运用概率论、可靠性技术等现代理论的原理和思维方法，推断出新的变量规律与特征，从而建立机械精度设计的计算理论和方法。

本书可供从事机械设计与制造、质量管理与计量检测的工程技术人员使用，也可供高等院校的有关师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械精度设计的理论概率法/张新义著．—北京：机械工业出版社，1995.2

ISBN 7-111-04470-3

Ⅰ．机…
Ⅱ．张…
Ⅲ．机械设计-精[redacted]
Ⅳ．TH122

中国版本图书馆[redacted]1号

出 版 人：马九[redacted] 邮政编码100037）
责任编辑：徐 彤[redacted] 责任校对：肖新民
封面设计：郭景云 责任印制：路 琳
机械工业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1995年3月第1版·1995年3月第1次印刷
787mm×1092mm 1/32·6印张·128千字
0 001—2 000册
定价：7.30元

前　言

机械工程设计和精密仪器仪表结构设计中的一项重要工作，就是组成部件的精度设计。精度设计得合理，不但能保证机械产品有较高的质量，而且能使机械各加工与装配单元具有良好的工艺性，生产成本可以显著下降。随着现代机械工业、特别是精密机械制造业的发展，对零件的精度要求逐步提高，传统的机械精度设计方法已不能满足生产的需要，这已经引起了机械工程界的广泛注意。为此，科技人员和工程技术人员都在研究新的精度理论及其设计方法，运用新的方法更新传统的工艺精度设计中的某些概念。

本书依据机械加工工艺过程和装配中经典误差理论及其已知的几何参数分布规律的所有特征，运用概率论、可靠性技术等现代理论的原理和思维方法，推断出新的变量分布规律与特征，从而提出机械精度设计的数学模型，并进一步论述其性质和应用。全书共分四章：第一章机械精度设计的理论基础，简要介绍随机变量的特征值及其常用分布；第二章精密定位精度设计的理论概率法，建立了独立公差和相关公差原则下，几何精度与装配单元理想概率之间的数学模型。第三章过盈联结精度设计的理论概率法，提出了过盈量的可靠性优化模型与配合精度设计的准则。第四章齿轮传动孔系精度设计的理论概率法，推导了齿轮轮系传动精度与传动孔几何精度的理论概率关系，引入了传动孔位置精度设计的新的理论和方法。

撰写本书的目的，在于探索机械精度设计的新理论和新方法，建立精确、量化的数学模型，以便于计算机辅助精度设计。但由于作者水平有限，加之缺少必要的工程实验数据，书中难免出现错误和疏漏，敬请读者批评指正。作者愿本书的出版，能引起对此有兴趣的读者的专门研讨，使机械精度设计理论日臻完善。

作　者

1994年6月

目　　录

第一章 机械精度设计的理论基础

在许多门自然科学和工程技术中，人们对实际观察与测量的各种数据，去伪存真，突出主要矛盾，忽略次要因素，提炼出其中反映本质的东西，用数学表达出其间的关系，这种数学关系通常称为数学模型。数学模型是否适用于客观实际或工程实际，需要在实践中验证。如果在精度许可的范围内能得到理论与实践相符合的证据，则说明数学模型是合适的，就可以运用数学模型去解释和求证实际问题，并作出相应的结论，否则数学模型就必须修正。

机械加工的精度及其测量中的误差特性、机床调整误差、安装偏心误差、零件受环境温度的变形误差等，它们的定量表达也都是数学模型。此外，基于机械加工精度、装配精度及其各类误差传递之间关系的零件精度设计，也可以用数学模型的观点来看待。这些数学模型能否符合客观实际，需要有大量实验数据进行验证。本书运用机械加工工艺过程和装配中经典误差理论及其已知的几何参数分布规律的所有特征，推断出新的变量分布规律与特征，从而提出机械精度设计的数学模型，并进一步论述其性质和应用方法。

本书所用到的数学模型是以随机变量出现的概率为基础的，因此在本章中，简述一下有关随机变量的概率和运算法则。

一、随机变量及其概率分布

1. 随机变量

自然界和工程技术领域中的许多量皆有其随机性（偶然性），是随机地变化着的量值。这种随机变化的量值用数字表达出来时，则称为随机变量。机械工程中用到的量，属于随机变量的很多。

零件尺寸偏差是由于生产原因引起的，如设备、夹具、刀具、测量误差等。产生误差的原因大多是随机的，因此，零件尺寸偏差是随机变量。

由于机械产品是用来完成某种确定的工作，因此，或多或少的机械零件总是承受着力和温度的作用，由此所产生的变形将影响机械产品的工作精度。所以在计算公差时，也必须考虑零件的受力变形和温度变形的影响。在确定的使用条件下，作用在机械产品上的力和温度规范具有确定的值。这些值可用相应的计算来确定。当校验零件的强度、刚度或其它工作能力时，也要用这些值。在各种随机因素的作用下，作用力和温度的实际值可能有某些分散，因此，力、温度以及它们引起的变形可以认为是随机变量。

按照随机变量可能取得的值不同，可以分为两种类型，即离散型随机变量和连续型随机变量。

如果随机变量在一定区域内是一些孤立的数值，且以确定的概率取值，则称这种随机变量为离散型随机变量。如 n 次射击命中靶子的次数；1 台纺纱机在 1 min内的断头次数等，都是离散型的随机变量。

如果随机变量在某一区域内，其取值充满整个区间，或者说在此区间内有无穷多个连续点，则称这种随机变量为连

续型随机变量。如在测量某圆柱体直径时所产生的误差值，显然是充满某个区间的，其误差就是连续型随机变量。

2．概率

概率表示随机事件中某事件发生的可能性或事件出现次数在多次实践中所占的比例。设 n 随机事件中有 x 事件发生，则 x 事件发生的概率为：

$$p(x)=\frac{x}{n} \tag{1-1}$$

（1）概率事件　是指概率理论中所涉及的事件。它有下列几种：

1）必然事件：指随机事件中每次一定发生的事件。

2）不可能事件：指随机事件中永不会出现的事件。

3）事件和：设有 A 和 B 两事件，在每次实验中 A 和 B 可能出现，也可能不出现。A 和 B 至少出现一个（也可能两个皆出现），这样一个综合事件称为 A 和 B 的事件和，记为 $A+B$。

4）事件积：A 和 B 两事件皆出现的综合事件称为 A 和 B 的事件积，记为 AB。

5）互斥事件：两事件 A 和 B 不可能同时出现，则称 A 和 B 为互斥事件或互不相容事件。

6）逆事件：如 $A+B$ 为必然事件，并且 A 和 B 互斥，这就是说 A 出现则 B 必不出现，且 A 和 B 必出现其一，则称 A 和 B 互为逆事件。一般用 $\bar{A}$ 表示 A 的逆事件。

如将事件 A、$\bar{A}$、$A+B$、AB 用图形表示，则如图1-1所示。在图中 A 和 B 分别用圆圈表示，长方形表示必然的事件，画有斜线部分为欲表示之事件。

7）独立事件：如果 A 事件的发生并不影响 B 事件的发

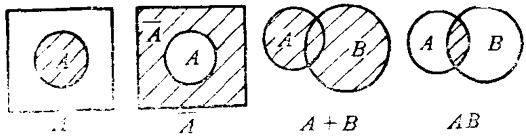

图1-1　事件关系

生概率，则称事件A和B是独立事件。

（2）概率的性质　概率的几个重要性质如下：

1）设事件A的概率为$P(A)$，则

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \tag{1-2}$$

2）如A为必然事件，其概率为$P(A)$，则

$$P(A)=1 \tag{1-3}$$

3）如A为不可能事件，其概率为$P(A)$，则

$$P(A)=0 \tag{1-4}$$

4）如果A、B事件的概率分别为$P(A)$、$P(B)$，A、B两事件积的概率为$P(AB)$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-5}$$

如果A和B两事件是互斥的，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-6}$$

5）如A及其逆事件$\bar{A}$的概率分别为$P(A)$、$P(\bar{A})$，则

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \tag{1-7}$$

这就是说，任一事件与其逆事件的概率之和为1。如果实际运算中不能求知$P(A)$或计算$P(A)$较繁琐，而计算$P(\bar{A})$较容易时，则可先求$P(\bar{A})$，然后从1中减去$P(\bar{A})$就得到$P(A)$。

6）如果A和B是独立事件，则事件积AB的概率为：

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-8}$$

3. 概率分布

随机变量一般以不同的概率取不同的值。用$P(X=a)$来表示随机变量X取值a这一事件的概率，并且用$P(a<X\leqslant b)$来表示X在区间$a<X\leqslant b$内取值这一事件的概率。将a和b画在数轴上，$a<b$，如果对于a、b内任何的x皆可知$P(a<X\leqslant b)$，则显然可以对X取任何值的概率有一个完全的概念，这时则说已知道变量X的概率分布，简称分布。

为了描述随机变量的概率分布，令x为某已知数，则$X\leqslant x$的概率可写为$P(X\leqslant x)$。显然这个概率是x的函数，将此函数写为$\Phi(x)$，则

$$\Phi(x)=P(X\leqslant x) \tag{1-9}$$

今后称$\Phi(x)$为随机变量X的累积分布函数，简称累布函数，也叫做分布函数。

$X\leqslant a$和$a<X\leqslant b$这两事件是互斥的，其和为$X\leqslant b$。由概率的加法定则可知

$$P(X\leqslant b)=P(X\leqslant a)+P(a<X\leqslant b)$$

由此得

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{1-10}$$

所以，如果对于x的一切可能值皆可知累布函数，则变量X的概率分布完全可知了。

（1）累布函数的性质

1）因任何概率是一个非负数，由式（1-10）知$\Phi(b)>\Phi(a)$。所以累布函数$\Phi(x)$是变数x的非降函数。

2）如果随机变量总是取有限值，亦即$X<\infty$，则

$$P(X<\infty)=1$$

亦即 $$\Phi(+\infty)=\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=1 \tag{1-11}$$

3）同理，因X恒大于$-\infty$，

$$P(X<-\infty)=0$$

由此 $$\Phi(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0 \tag{1-12}$$

（2）概率分布的类型　概率分布的方式根据随机变量的类型不同，又有其具体的描述。

1）离散型分布：研究离散型随机变量，不仅需要知道其可能取得的值，更重要的是要知道这些值的概率。设x_0、x_1、…、x_n为随机变量X所可能取的一切值，并设X取值x_i的概率为p_i，亦即

$$P(X=x_i)=p_i \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

因X必取各x_i中之一，所以

$$\sum_i p_i=1 \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{1-13}$$

离散型随机变量X的概率分布，常用下列形式表示

X	$x_1 \quad x_2\cdots x_n$
P	$p_1 \quad p_2\cdots p_n$

此形式称为离散型随机变量X的分布列，它是描述概率分布的一种方式。

例如，已知随机变量X的分布如下：

X	0	1
$P(X=x_i)=p_i$	$q=1-p$	p

则其累积分布函数如图1-2所示，表示为：

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x<0\\ 1-p & \text{当 } 0<x\leqslant 1\\ 1 & \text{当 } x>1\end{cases}$$

2）连续型分布：对于连续型随机变量，可认为变量的概率分布不是集中在各孤立点上，而是连续地分布在数轴上，则得连续型分布。如用 $f(x)$ 来表示变量在 x 轴上的分布密度，则 $f(x)$ 为 x 的连续函数，并且对于任何 x，$f(x)\geqslant 0$。$f(x)$ 称为密度函数，简称密度。

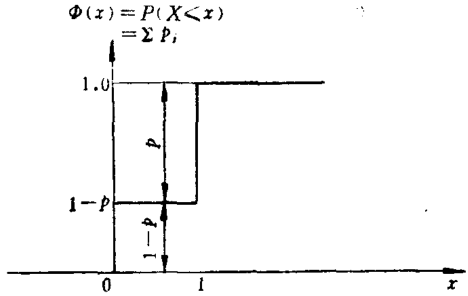

图1-2　离散型随机变量的累积分布函数

按累布函数的定义可得

$$\Phi(x)\equiv P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \qquad (1\text{-}14)$$

由此可知 X 在任意区间 $a<X\leqslant b$ 取值的概率等于累积分布函数 $\Phi(x)$ 在该区间的增量，如图1-3所示。

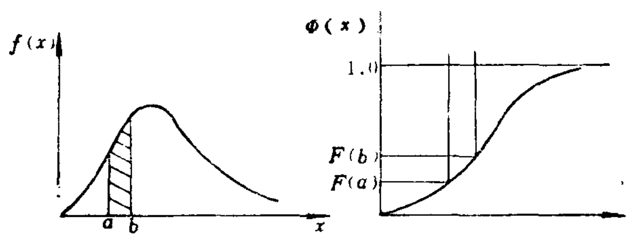

图1-3　$\Phi(x)$ 的性质

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1-15}$$

在式（1-14）中设 x 为∞，因 $\Phi(\infty)=1$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1-16}$$

在式（1-15）中，当 a 等于 b 时，则变为

$$P(X=a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

由此知在连续型分布中变量取某一定值的概率为0。

4. 概率密度函数

定义：如果当 $\Delta x \to 0$ 时，比值 $\dfrac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}$ 的极限存在，则这极限称为随机变量 X 在点 x 处的概率密度，记为 $f(x)$，如图1-4所示。

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x} \tag{1-17}$$

概率密度函数具有下列性质：

1）$f(x)$ 是非负函数，即 $f(x) \geqslant 0$。

2）由式(1-15)和式（1-17）可知：

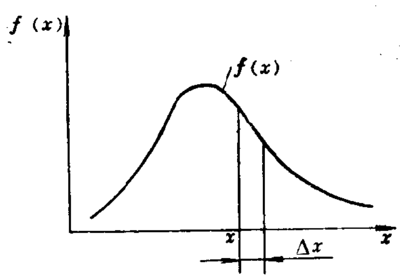

图1-4　概率密度函数 $f(x)$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{d\Phi(x)}{dx} = \Phi'(x) \tag{1-18}$$

所以，概率密度函数 $f(x)$ 是累积分布函数 $\Phi(x)$ 的导函数；反之 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。

3）由 $\Phi(x)$ 的定义及牛顿-莱勃尼兹公式得

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{1-19}$$

即随机变量 X 落在区间 $[a, b]$ 内的概率等于 $f(x)$ 在该区间内的定积分，如图1-3所示。

根据定积分的几何意义可知，概率 $P(a \leqslant X \leqslant b)$ 就是区间 $[a, b]$ 内曲线 $y = f(x)$ 之下的曲边梯形的面积。简言之，"概率就是 $f(x)$ 曲线下的面积"。

显然，若 $x_2 = x_1 + \Delta x$，而 $\Delta x \to 0$，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_1 \leqslant X \leqslant x_1 + \Delta x) = \int_{x_1}^{x_1} f(x)dx = 0$$

因此，连续随机变量只能在某一区间内取值，而在某一点取值的概率为0，因而是没有意义的。

4）由式（1-17）或（1-19）可知

$$\Phi(x) = P(-\infty \leqslant X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{1-20}$$

因此，$\Phi(x)$ 等于 $f(x)$ 在区间 $[-\infty, x]$ 内的广义积分。

5）如随机变量 X 的一切可能值都位于区间 $[a, b]$ 内，则由于事件（$a \leqslant X \leqslant b$）是必然事件，所以

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

当随机变量 X 可以取得一切实数值时，则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$