计算机辅助设计丛书

计算机辅助
几何造型技术

孙家广　陈玉健　辜凯宁

清华大学出版社

计算机辅助几何造型技术

孙家广　陈玉健　辜凯宁　编著

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书针对计算机辅助设计、制造（CAD/CAM）以及机器人领域中普遍存在的几何造型问题，阐述了设计、生成、变换、分析及输出各种三维形体的有关理论、技术、算法和系统，并附有习题和典型的算法。该书跳出一般的计算机辅助绘图的范畴，向读者介绍计算机辅助设计、制造实际形体的方法和工具。

本书既可作为机械、建筑、计算机及应用数学等工程类专业高年级大学生和研究生的教材或教学参考书，亦可供从事CAD/CAM等工作的工程技术人员参考。

计算机辅助几何造型技术

孙家广　陈玉健　辜凯宁　编著

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京昌平振南排版厂排版

北京昌平环球科技印刷厂印装

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16　印张：20.25　字数：480千字

1990年2月第1版　　1990年2月第1次印刷

印数：0001—5000

ISBN 7-302-00570-2/TP·203

定价：4.40元

出 版 说 明

计算机辅助设计（Computer Aided Design）简称CAD，它是近20年发展起来的一门新兴技术。随着计算机硬件、软件、图形及智能模拟等方面技术的巨大进步，CAD技术已成为工程设计及科学研究不可缺少的组成部分。CAD技术充分利用了计算机的高速运算和数据处理能力，因此不仅可以缩短产品的设计周期，减少设计人员的繁杂劳动，而且能够提高产品质量，降低成本。CAD技术与CAM(Computer Aided Manufacturing——计算机辅助制造）以及工业机器人相结合是当今工业生产过程自动化的发展方向。同时，CAD技术也为科学研究的发展和教育的现代化提供了方便的工具。

对于不同的工程领域，CAD技术的具体内容有很大不同。例如，电子电路主要用节点网络表示其拓扑结构；微波电路较多地研究其数学模型及矩阵方程；机械和建筑设计的关键在于图形技术；控制系统则主要利用计算机进行动态系统的建模、分析、设计和仿真等。因此，计算机辅助设计是专业理论、计算方法、计算机软件及图形学等多方面结合的综合技术。

为了普及和推广CAD技术，我们编辑出版一套计算机丛书。其中包括微波电路、机械、建筑、控制系统以及图形学等领域的CAD技术的原理及应用。我们希望这套丛书能对我国CAD技术的发展及其在工程设计和科学研究中的应用起到促进作用。

前　言

计算机辅助几何造型是用计算机及其图形系统描述物体形状，模拟物体动态处理过程的技术。通常它所提供的描述或模型是解析的而不是具体的，因而可以方便而经济地用一个模型来代替实际物体的设计和处理。很显然，用计算机对一个物体的模型进行分析或模拟比对一个实际物体进行测量或处理要容易得多。此外，模型也是计算机辅助集成制造系统（CIMS）中传递信息的一种好形式。近年来，计算机辅助几何造型技术得到越来越广泛的应用，如CAD/CAM、计算机图形学、计算机艺术、动画片、模拟仿真、计算机视觉、机器人等领域都把几何造型作为基础。利用计算机辅助几何造型技术既可产生已有物体的真实模型，也可产生人们头脑中的某种设计想像或艺术模型。

计算机辅助几何造型作为一门综合性的学科涉及到解析几何、矢量代数、拓扑、集合论、计算方法以及程序设计技艺等方面的内容。随着设计、模拟形体复杂程度的提高，对计算机辅助几何造型技术和计算机系统功能的要求也随之上升。

一般地说，计算机辅助几何造型技术包括三部分内容，即参数几何造型、实体造型以及它们的表示和应用。全书共分 5 章，22节。第 1 章讨论参数曲线、参数曲面及其相交性、相关性；第 2 章讨论实体造型的基础知识，包括形体的定义和性质、集合运算及集合元素关系分类、欧拉运算、形体常用的表示模式、应用对表示模式的要求、造型中常用的数据结构分析、计算误差及几何表示误差对实体造型的影响等；第 3 章讨论计算机辅助几何造型的常用方法，如离散法造型、代数法造型、自由曲面造型、三维形体重建等；第 4 章讨论三维形体的输出，其中包括消除隐藏线、面、三维形体的裁剪和剖切、显示自由曲面体、光色效应处理等，第 5 章讨论计算机辅助几何造型技术的应用，在介绍了清华大学计算机科学与技术系开发的 GEMS 造型系统之后，侧重讨论几何造型技术在物性计算、空间布置及动画片等方面的应用。每一章均附有一定数量的习题。全书主要讨论了 CAD/CAM 及机器人等领域中有关形体设计、生成、变换、分析、输出的有关理论、技术、算法和系统，面向实际，立足提高。

本书既可作为机械、建筑、计算机及应用数学等工程类专业的高年级大学生或研究生学习 CAD/CAM、机器人以及计算机图形学提高内容的教材或教学参考书，也可供从事 CAD/CAM 等工作的工程技术人员学习参考。讲授全书的内容一般需要 32—48 小时，在计算机上实习一般要 20—60 小时。

全书由孙家广主编，陈玉健，辜凯宁参加了部分内容的编写。书中还采用了李新友、郭聿林等同志的部分工作内容，在此向他们表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，而计算机辅助几何造型技术作为计算机科学中一个新兴分支其发展又非常迅速，故书中存在的问题一定不少，恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章 参数曲线与曲面

本章重点讨论曲线、曲面参数表示的基本概念、以及常用参数曲线和参数曲面的数学公式；并介绍了求参数图形间的最小距离、相交情况、以及对其作几何变换的方法。曲线、曲面造型既是几何造型必不可少的一部分内容，也是学习第 3、第 5 章的重要基础。

§ 1. 参数曲线的基础知识

1. 问题的提出

通常的自由曲线、曲面用数学公式很难表示出来，即使能表示，也很复杂。在实际应用中，往往是已知离散点列及其走向和连接要求，生成相应的自由曲线和曲面。常用的办法有

（1）逼近：曲线函数不一定通过给定的离散点，但在一定误差要求下靠近诸点；

（2）插值：曲线函数不仅通过离散点，还要求在各点的一阶导数或二阶导数连续；

（3）设计：已知的离散点太少，要根据一定的要求产生新的顶点、设计出曲线或曲面。

不同的应用问题应采用不同的曲线、曲面生成算法。由于经典的多项式插值、拟合算法存在固有的问题，近来，曲线、曲面的拟合、逼近算法大多数以参数表达式为基础。

2. 曲线的参数表示

$$\text{曲线的几何表示分类}\begin{cases}\text{非参数}\begin{cases}\text{隐函数}\\\text{显函数}\end{cases}\\\text{参数}\end{cases}$$

对一条平面曲线，显式的非参数方程的一般式是

$$y=f(x)$$

在此方程中，每一个 x 值只对应一个 y 值，所以显式方程不能表示封闭或多值曲线。

用隐式的非参数方程可以不受此限制，其一般式为

$$f(x,y)=0$$

但是，所有非参数方程（无论显式还是隐式）都是

① 与坐标轴相关的；

② 会出现斜率为无穷大的情况（如垂线）；

③ 对于非平面曲线、曲面不可能用常系数的非参数化函数表示；

④ 不便于计算和编程序。

为解决以上问题，可考虑用参数方程来表示曲线、曲面。对二维曲线，可以用参数u的二个函数集合来表示

$$x=X(u),\quad y=Y(u)$$

在此曲线上的一点可用矢量P来表示：

$$P=[X(u),\ Y(u),\ Z(u)]$$

曲面上一点的矢量表示为

$$P=[X(u,w),\ Y(u,w),\ Z(u,w)]$$

在这些表示中，为了方便，都忽略了乘以矩阵$[i,j,k]^T$。

点是几何造型中最基本的元素，它是用有序的实数集（x_i,y_i,z_i）来定义的。用参数方程定义的曲线、曲面及其它几何元素都可以用点集来表示。计算机输出图形的实质就是输出点集，而它们的输出范围通常设在[0,1]之间。

$$x=3u^2,\quad y=u^3-u+1,\quad z=2u+3$$

是一条空间曲线的参数表示形式。我们不可能、也没有必要输出u从$-\infty$到$+\infty$的整段曲线。在实际应用中，我们选择其中特别感兴趣的一段曲线用u来表示，例如取$u\in[-1,1]$。每个u值对应一组（x,y,z）值，也对应曲线上的一个点。而（x,u）、（y,u）、(z,u)对应三条基本曲线，如上式所示。对于一般的参数曲线，其取值范围可能不在[-1,1]之间，我们可以通过参数变量规格化，使u在[0,1]闭区间内变化，写成$u\in[0,1]$。

在曲线、曲面的表示上，参数方程比显、隐式方程有更多优越性。

① 比非参数形式有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状。如一条二维三次曲线的显式表示为

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

其中只有4个系数可控制曲线的形状，而二维三次曲线的参数表示式为

$$\begin{cases}x=au^3+bu^2+cu+d\\ y=eu^3+fu^2+gu+h\end{cases}$$

其中有8个系数可用来控制曲线的形状。

② 对非参数方程进行几何变换必须对每个型值点进行几何变换，对二、三维点的几何变换可表示为

$$[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ 1]=[x\ \ y\ \ 1]\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}\ \ 1]=[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$$

而对参数形式表示的曲线、曲面可对参数方程直接进行几何变换（如平移、旋转、比

例），这样可大大节省计算工作量。

③ 便于处理斜率为无限大的问题，不会因此而中断计算。因为

$$dy/dx=(dy/du)/(dx/du)$$

若 $dy/dx=y^x=\infty$，即 $x^u=dx/du=0$，此时分别做 dx/du、dy/du、dz/du 就不会出现斜率为无限大的情况。

④ 参数方程中，代数、几何相关和无关的变量是完全分离的，而且对变量的个数不限，从而便于用户把低维空间中的曲线扩展到高维空间中去，而不必担心它们在低维空间中的形状和几何性质。这种变量分离的特点使我们可以用几何公式去处理几何分量，如以后我们要用的调和函数就具有此特点。

⑤ 规格化的参数变量 $u\in[0,1]$，使其相应的几何分量是有界的，而不必用另外的几何参数去定义其边界。

⑥ 易于用矢量和矩阵表示几何分量，从而简化了计算。

基于这些优点，我们用参数表达式来讨论自由曲线和曲面问题。

一条参数表示的曲线是一个有界的点集，可写成一个带参数的、连续的、单值的数学函数，其形式为

$$x=X(u),\ y=Y(u),\ z=Z(u),\ u\in[0,1]$$

曲线的端点在$u=0$、$u=1$处。参数曲线上的任一点可用矢量$P(u)$表示，如图1.1.1所示。$P(u)$是曲线上一点$[x(u),y(u),z(u)]$的矢量，而$P^u(u)$是同一点的切矢，是$P(u)$的微分式，表示为

$$P^u(u)=dP(u)/du$$

而切矢$P^u(u)$相应的分量为

$$x^u=dX(u)/du,\ y^u=dY(u)/du,\ z^u=dZ(u)/du$$

这些参数导数与一般直角坐标系下的导数关系为

$$dy/dx=(dy/du)/(dx/du)$$

类似可以得到dy/dz、dz/dx的表达式。图1.1.1中P_0、P_1、P_0^u和P_1^u分别为该曲线的端点和端点的切矢，

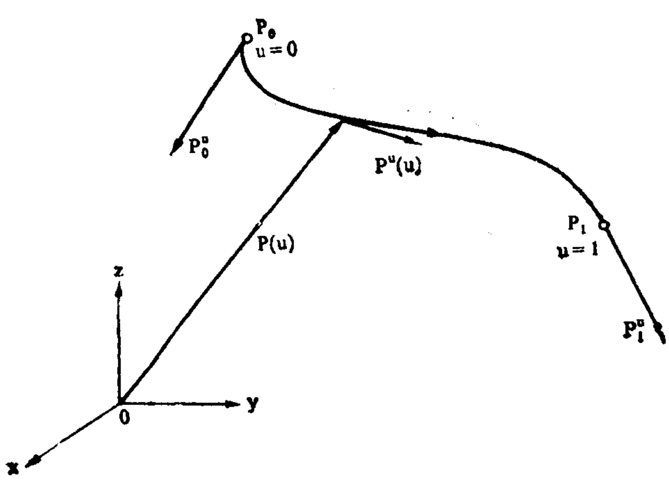

图 1.1.1 表示一条参数曲线的各种矢量

前面的 $P(u)$ 是在一般的直角坐标系下用三个分量的矢量来表示的一条空间曲线。我们也可以得到 n 维空间中，用 n 个分量的矢量来描述的一条曲线，其表达式为

$$P(u)=[X_1(u),X_2(u),\cdots,X_i(u),\cdots,X_n(u)]$$

下面我们介绍一些参数曲线的例子。

$$\begin{cases} x=a+lu \\ y=b+mu \\ z=c+nu \end{cases}$$

这里a、b、c、l、m、n为常数，这是一条直线的参数表示，此直线的起点$P(0)=[a,b,c]$、终点$P(1)=[a+l,b+m,c+n]$，其方向余弦正比于l、m、n。

$$\begin{cases} x=u \\ y=u^2 \\ z=u^3 \end{cases}$$

这是一条三次抛物线的参数方程。

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos(u) \\ y=a\cdot\sin(u) \\ z=b\cdot u \end{cases}$$

这是一条左螺旋线的参数方程式。

若要把显式函数变成参数形式，其主要的问题是如何把直角坐标系中的变量 x、y、z 和参数变量联系起来。例如，我们用二个曲面的交来表示一条曲线，令曲面1和曲面2的函数为

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0$$

联列这两个方程，所代表的曲线是一个隐式方程，此时的曲线是无界的，我们可定义我们感兴趣的边界。如果用第三个变量来表示另外二个变量，则可得到该曲线的显式表示

$$y=Y(x),\ z=Z(x)$$

如果令曲线的参数 u 为 x 的函数，并简设为：$x=x$，则上面的显式方程可写成

$$x=x,\ y=Y(x),\ z=Z(x)$$

在此式中，参数为x，由于规格化的参数 $u\in[0,1]$，相应地 x 是从 x_0 变到 x_1，则有

$$u=(x-x_0)/(x_1-x_0)$$

而参数函数

$$X(u)=x_0+(x_1-x_0)u$$

则该曲线的参数式可写成

$$x=X(u),\ y=Y(X(u)),\ z=Z(X(u))$$

这一过程说明我们可以把显式函数变换成参数形式。对于某些无法将隐式方程变为显式方程的问题，其相应的参数方程也难以得到。

Bezier（1972年）对参数曲线的基本性质作了如下阐述：参数曲线的形状仅与定义它的特征矢量点的位置有关，而与所用坐标系中整个点集的位置无关。这一性质在CAD/CAM 等许多方面的应用和研究是十分有用的。

一般地说，要对一条与坐标轴相关的曲线作几何变换，首先要计算原始坐标系中每一点的坐标，然后把这些点变换到新的坐标系中去。而对于一条与坐标轴无关的曲线，则只要把定义它的特征矢量点从一个坐标系变换到另一个坐标系即可，而且用矩阵实现这种运算是相当简单的。

3．参数曲线的代数和几何形式

一条三次曲线段的代数形式如下：

$$x(u)=a_{3x}u^3+a_{2x}u^2+a_{1x}u+a_{0x}$$
$$y(u)=a_{3y}u^3+a_{2y}u^2+a_{1y}u+a_{0y},\quad u\in[0,1]$$
$$z(u)=a_{3z}u^3+a_{2z}u^2+a_{1z}u+a_{0z}$$

a_{3x}到a_{0z}这12个系数为代数系数，唯一地确定了一条PC曲线(参数曲线Parameter Curve)，它决定了曲线的形状及空间位置。如两条相同的曲线具有不同的系数，则说明它们在空间的位置必不相同。上述方程写成矢量形式是：

$$P(u)=a_3u^3+a_2u^2+a_1u+a_0,\quad u\in[0,1] \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

$P(u)$表示曲线任意一点的位置矢量，其分量对应于直角坐标系中点的坐标，a_0、a_1、a_2和a_3为代数系数标量。

我们可以通过曲线的端点和边界条件来定义一条PC曲线。对于空间曲线，用于描述曲线可供选择的条件有：端点坐标、切矢、曲率和扭矢，还可采用与高阶导数有关的其它条件作为已知参数。

对于（1-1-1）式，我们应用二个端点$P(0)$、$P(1)$以及对应的切矢$dP(0)/du=P^u(0)$、$dP(1)/du=P^u(1)$，可得到下述四个方程：

$$P(0)=a_0,\quad P(1)=a_0+a_1+a_2+a_3$$
$$P^u(0)=a_1,\quad P^u(1)=a_1+2a_2+3a_3$$

求解这四个方程可得到

$$a_0=P(0)$$
$$a_1=P^u(0)$$
$$a_2=-3P(0)+3P(1)-2P^u(0)-P^u(1)$$
$$a_3=2P(0)-2P(1)+P^u(0)+P^u(1)$$

把a_0、a_1、a_2、a_3代入（1-1-1）式，即有

$$P(u)=(2u^3-3u^2+1)P(0)+(-2u^3+3u^2)P(1)+(u^3-2u^2+u)P^u(0)+(u^3-u^2)P^u(1) \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

令
$$F_1(u)=2u^3-3u^2+1,\quad F_2(u)=-2u^3+3u^2$$
$$F_3(u)=u^3-2u^2+u,\quad F_4(u)=u^3-u^2$$

重写（1-1-2）式有

$$P(u)=F_1(u)P(0)+F_2(u)P(1)+F_3(u)P^u(0)+F_4(u)P^u(1)$$

简记为
$$P=F_1P_0+F_2P_1+F_3P_0^u+F_4P_1^u \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

式（1-1-3）是参数曲线的几何形式，P_0、P_1、P_0^u、P_1^u为几何系数，F为调和函数。

这里构造（1-1-3）式我们选择了曲线的二个端点及其切矢。也可以选择四个点而不选择切矢，当然也可以不选择端点而选择四个切矢。读者可用这些条件自行推导相应的参数方程。显然，曲线上各个点之间应具有不同的 u 值，而同一点及其切矢具有相同的 u 值。

我们也可以用矩阵形式来表示参数曲线，将式（1-1-1）写成：

$$P=[u^3\ u^2\ u\ 1][a_3\ a_2\ a_1\ 1]^T$$

令 $$U=[u^3\ u^2\ u\ 1],\quad A=[a_3\ a_2\ a_1\ 1]^T$$

则 $$P=UA \tag{1-1-4}$$

对式（1-1-3）

令 $$F=[F_1\ F_2\ F_3\ F_4],\ B=[P_0\ P_1\ P_0^u\ P_1^u]$$

则 $$P=FB \tag{1-1-5}$$

A是代数系数矩阵，B是几何系数矩阵或边界条件矩阵。用矩阵运算可推导出代数和几何形式之间的关系。

因为 $F=[(2u^3-3u^2+1)\quad(-2u^3+3u^2)\quad(u^3-2u^2+u)\quad(u^3-u^2)]$，也可将此式写成

$$F=[u^3\ u^2\ u\ 1]\begin{pmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

若用M表示这个4×4矩阵，则：

$$M=\begin{bmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad F=UM,\quad M^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\3&2&1&0\end{bmatrix}$$

可将（1-1-5）重写成

$$P=UMB$$

则 $$A=MB \tag{1-1-6}$$

$$B=M^{-1}A \tag{1-1-7}$$

式（1-1-6）和（1-1-7）表示代数和几何形式之间的变换关系。

我们常用 P=UMB 来表示一条 PC 曲线。对于所有的三次 PC 曲线，U、M、F 是相同的，仅 A、B 随不同的曲线而变化，由它们反映曲线的形状和位置。

由端点和其切矢定义的三次曲线也称为Hermite曲线。

4．切矢

前面已用过曲线端点的切矢 $P^u(0)$、$P^u(1)$，即 u=0 和 u=1 处的一阶导数。曲线上任一点的切矢可写成 dP(u)/du，它反映了曲线在该点的斜率和方向余弦。我们知道，指定参数曲线的端点及其斜率只能解出（1-1-1）式中 12 个变量中的 10 个，由两个端点

坐标$P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 可求出6个变量，而由端点的斜率只能解出4个变量，因为每一点的切矢中只有两个分量是线性无关的（因切矢的三个分量的平方和为1）。剩下的这两个变量可进一步用来控制曲线的形状。在参数空间中，切矢P_0^u、P_1^u 的 x 分量形式是

$$x_0^u = dX(0)/du, \quad x_1^u = dX(1)/du$$

类似地可得到y、z的分量。而在用户空间中的斜率y^x、z^x可写成

$$y^x = y^u/x^u, \quad z^x = z^u/x^u$$

在用户空间中，曲线端点的矢量如图 1.1.2 所示。每一端点的切矢具有相同的方向，但具有不同的数值，其数值即用来控制剩下的二个变量，即控制参数曲线的内部形状，也就是说，切矢数值上的改变会使拟合曲线变形。

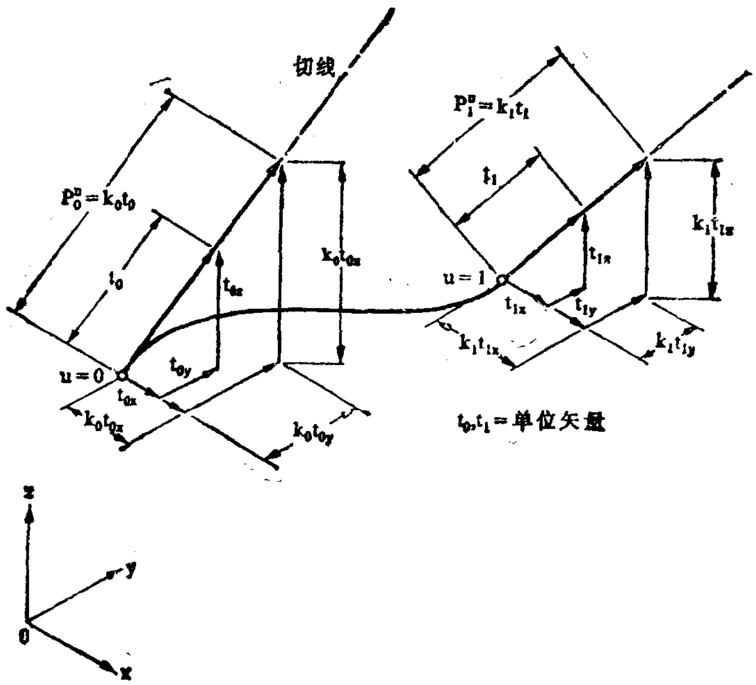

图 1.1.2 切矢

若曲线上某一点切矢的单位矢量用 t 表示，其方向余弦是t_x、t_y、t_z，则

$$t = P^u / |P^u|$$

$$|t| = \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2} = 1, \quad t_x, t_y, t_z \in [0,1]$$

令 $k = |P^u|$ 则 $P^u = kt$

k表示P^u的数值。这样一条参数曲线的两个端点的切矢可写成

$$P_0^u = k_0 t_0, \quad P_1^u = k_1 t_1$$

则其几何系数矩阵 $B = [P_0 \ P_1 \ P_0^u \ P_1^u]^T$可写成

$$B = [P_0 \ P_1 \ k_0t_0 \ k_1t_1]^T$$

由此式我们会发现，具有相同端点和端点斜率的 B，对应无数条参数曲线，因为通过改变 k_0 和 k_1，可控制每个端点处的曲率，使之具有不同的内部形状。例如有一条曲线，其端

点及端点斜率为

$x_0 = 4.0$	$y_0 = 4.0$	$z_0 = 0.0$
$x_1 = 24.0$	$y_1 = 4.0$	$z_1 = 0.0$
$t_{0x} = 0.832$	$t_{0y} = 0.5547$	$t_{0z} = 0.0$
$t_{1x} = 0.832$	$t_{1y} = -0.5547$	$t_{1z} = 0.0$

通过改变k_0、k_1的值，可以得到如图 1.1.3 和图 1.1.4 所示的一组曲线。

通常在拟合曲线时，我们总要使切矢与曲线之间满足一些关系。但当切矢的数值超过曲线弦长（两端点之间的距离）几倍时，曲线会出现回转及尖点等现象；而当小于弦长许多时，也会使曲线变得过于平坦。图1.1.3中$|P_1 - P_0| = 20$，当$k_0 = k_1 = 80$（即4倍于弦长），曲线出现了回转现象。

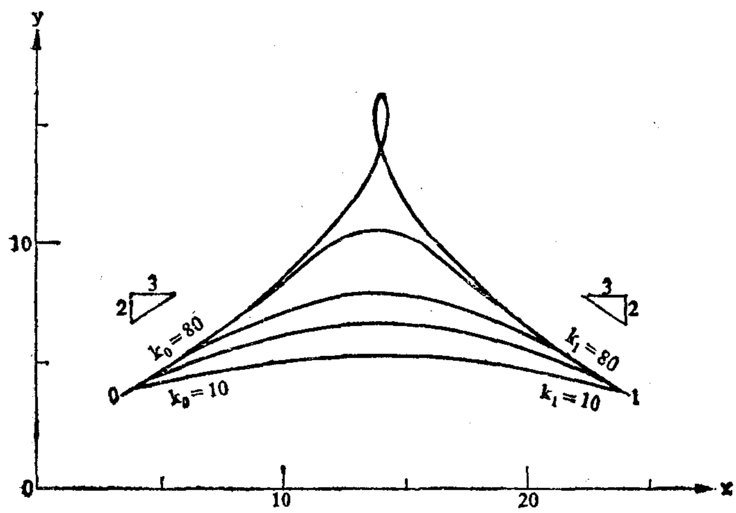

图 1.1.3 切矢数值对曲线形状的影响1

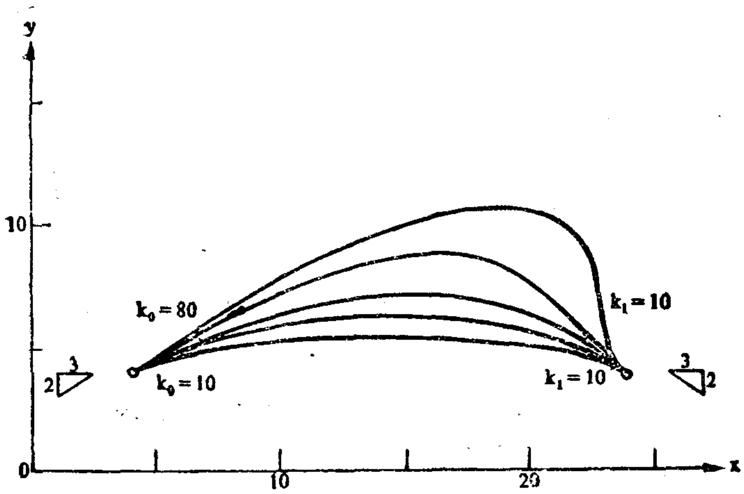

图 1.1.4 切矢数值对曲线形状的影响2