吕冠国 邵南 著

科学出版社

冷轧丝杠轧辊辊型设计的数学方法

冷轧丝杠轧辊辊型设计的数学方法

吕冠国　邵　南　著

科　学　出　版　社

1 9 9 4

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书全面介绍冷轧丝杠轧辊辊型设计的数学方法. 全书共分四章，其内容分别为：根据被轧件的外型建立轧辊型面的数学模型，并给出了最简洁的统一公式；严格证明了连续挤压定理，保证了在一定的参数取值范围内挤压成型的可靠性；详细讨论了挤压点的分布状况；建立了干涉模型和给出了"空隙"的计算方法. 附录部分介绍了本书所涉及的部分数学知识.

本书可供从事冷轧技术研究的科研人员、设计人员、实际工作者参考，同时也可以作为高等院校有关专业师生的教学参考书.

冷轧丝杠轧辊辊型设计的

数学方法

吕冠纲　邵　南 著

责任编辑　张建荣

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1994 年 4 月第一次印刷　　印张：3 1/4

印数：1—1 300　　字数：81 000

ISBN 7-03-003912-2/TH · 25

定价　6.00 元

前　言

冷轧丝杠属少无切削技术，具有省材、高效、耐磨、价格低、光洁度好、经济效益高等许多优点，加之丝杠是机械中传动件的重要基础部件，用量大，因此，国内外都十分重视冷轧丝杠这一先进技术的研究和开发．生产冷轧丝杠的设备由轧机和轧辊两大部件构成，其中轧辊型面设计是核心，也是提高冷轧丝杠精度的关键之一，因此，它便成为本领域内国际上研究的热门课题．我国在引进国外冷轧成套设备时，尽管花费大量外汇，但所有先进国家都不提供轧辊设计参数．

轧辊型面设计的基础工作是：根据被轧件的外型建立几何模型——轧辊型面方程，并给出简洁的解法；证明连续挤压成型的可靠性；给出干涉模型和“空隙”的计算方法等，为辊型设计提供科学依据．这些便是轧辊型面设计的数学方法的主要内容．

当然，轧制高精度丝杠的轧辊辊型设计，除了对几何模型进行讨论外，还要充分考虑挤压过程中材料弹塑性变形情况，建立物理模型，对几何模型进行修正．近年来，我们在这方面作了一些工作，并取得了可喜的成果．修正后的轧辊，用于生产实践，使得轧制的丝杠精度大幅度提高，经测试和鉴定达到了国际先进水平．丝杠精度提高的实践，反过来证实了本书所述的数学方法的正确性．

现在，我们把在冷轧丝杠轧辊辊型设计中所用的数学方法整理成书，奉献给广大有志于冷轧技术理论研究和应用的同行们，希望能起到抛砖引玉的作用．

最后，我们要感谢云南省科委对本课题研究所给予的大力支持，感谢为本书的出版付出辛勤劳动的责任编辑和其他同志．

1993 年 7 月于云南师范大学

目　　录

引论 …… 1
第一章　圆柱面与迴转面的啮合问题 …… 3
1.1　方程的导出 …… 3
1.2　公式解法 …… 5
1.3　迭代解法 …… 16
1.4　进一步探讨 …… 20
第二章　螺旋面与迴转面的啮合问题 I …… 24
2.1　符号和问题的梗概 …… 24
2.2　三种计算方法 …… 26
2.3　几个定理和第三种计算方案的小结 …… 34
2.4　左侧面极值方程的推导 …… 46
第三章　螺旋面与迴转面的啮合问题 II …… 53
3.1　一些参考数 …… 53
3.2　问题 …… 57
第四章　“空隙”的计算方法 …… 64
4.1　问题提出 …… 65
4.2　解决办法 …… 66
附录 …… 73
A.　函数及连续函数 …… 73
B.　导数及其应用 …… 77
C.　一元三次及四次方程的解法 …… 83
D.　空间曲面和曲线方程 …… 89
E.　超越方程的求根方法 …… 92
参考文献 …… 96

引　论

有许多机械，如矫正机、斜轧机、挤压机等，它们的主要工作部件是一个迴转体，熟称辊子。合理的辊形设计，从数学上看，归结为螺旋面与迴转面的啮合问题。具体说来，如果Δ和Δ_1是空间异面直线，夹角为τ，那么上述问题就变成已知以Δ_1为轴线的螺旋面，求以Δ为轴线的迴转面（简称轧辊曲面或辊子），使得迴转曲面与已知的螺旋面充分接触（即相切于一条空间曲线，此曲线叫接触线）。由于在轧制过程中，挤压、矫正等工作都是在辊子的一系列连续作用下完成的，因此，合理的辊形设计，是提高产品精度和延长轧辊寿命的至关重要的因素。

如何在理论指导下，设计精确的辊形，一直是机械行业亟待解决的课题，为国内外学者们所关注。

以最简单的钢管矫直机辊形（此时钢管外形为一圆柱面，可看作退化了的特殊的螺旋面）为例，过去多采用前苏联科学院院士采里柯夫或乌克兰科学院院士叶明扬宁柯等的计算公式进行计算。由于该公式是错误的，所以用这个公式的计算结果，设计制造出来的辊子与圆柱面的接触极少，矫正后的钢管弯曲度和椭圆度都很大，有相当一部分达不到使用的要求。据有人统计[1]，对一些特种用途的钢管，矫正后的废品率竟高达50%！60年代已经有人指出过该公式的错误，不过，由于缺乏正确而又实用的计算公式，该公式仍然被沿用下来。因此，在实际工作中出现了一些很奇怪的现象，比如，新装配的辊子反而不能用来矫正高级钢管，往往先用来矫正精度要求不高的钢管，使辊子在工作中经过"磨损"以后，才能用来矫正精度要求高的钢管。1972年昆明师范学院与昆明机床配件厂合作，曾推出正确而实用的辊形计算公式，并将其初步结果发表于《教育革命》1975年第2期上[2]。但是，由于当时条件的限制，

这一工作被搁置起来．直到1976年，太原重型机械厂陈惠波又独立地推出了类似的公式，并成文发表于1976年12月出版的《应用数学学报》上[1]．参考文献[1]与[2]所解决的问题基本相同，但就[1]，[2]所给的两种主要解法来看，[2]较[1]更优越．例如，在公式解法上，[2]给出了统一而简单的解的表达式，[1]没有给出；在迭代解法上，[2]给出的公式极简单，并有误差估计式，[1]所给的公式较繁，又缺乏误差估计式．所以[2]的结果实际应用起来更方便．不过，陈惠波把理论结果用来指导实际设计，取得了可喜的成果．例如，使用这种理论计算重新设计制造出来的辊子，矫正后的钢管合格率由50%提高到95%以上，这的确是一件令人喜悦的事．以上介绍了最简单的辊形——矫正辊的有关情况，对于相应一般螺旋面的辊子，例如就轧制梯形丝杠（丝杠面为螺旋面）的轧辊辊形而言，时至目前，除参考文献[3]，[4]外，似乎还未见到有关的文章正式发表．而[3]的计算公式仍然很繁，讨论得也不充分，甚至对于其中一些很重要的问题，如挤压不足量的产生及正确估计等，也没有进行深入研究．这样，不仅给实际应用带来困难，而且又不便于对生产过程中的某些内在性质作更深入的讨论，这也不利于提高丝杠的精度．

本书打算从曲面啮合的角度，即从几何外形讨论轧辊型面的计算公式，讨论在轧制过程中所产生的挤压不足量的计算公式，以及与此有关的一些重要问题．毫无疑问，要轧制精密级丝杠，除从几何外形讨论之外，还要考虑材料的弹塑性变形，建立物理模型．这一点我们已经有了进一步的研究成果，并通过了专家鉴定和实践检验．但是，几何外形的数学计算毕竟是基础，因此，希望本书能为实际工作者提供一点理论指导，同时也为从事辊形研究的理论工作者提供一些有益的借鉴．

第一章　圆柱面与回转面的啮合问题

参考文献[2]，[3]，[4]都曾对这一问题进行过讨论，并得到了满意的结果．本章先把有关结果作一简单介绍．

1.1　方程的导出

1. 问题和记号

设圆柱(坯料)与轧辊安装位置如图 1.1 所示(由于对称性，图中只画出一半，以后也只需考虑这一半)．要解决的问题是：对应于Δ上的每一点 $P(x_0, y_0, z_0)$，求过 P 点且垂直于Δ的轧片(圆)的半径 R，使轧片与圆柱面相切．

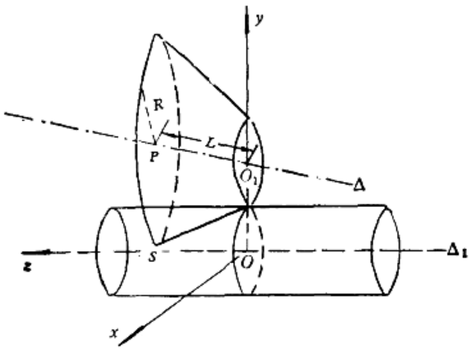

图　1.1

假设圆柱半径为 r，轧辊最小圆的半径(喉径)为 R_0，轧辊轴线为 Δ，圆柱轴线为 Δ_1．Δ和 Δ_1 为异面直线，夹角(螺旋升角)为 τ，公垂距 $h = |O_1O| = R_0 + r$．

如图 1.1 取坐标系，记 $O_1P = L$，以 P 为圆心，R 为半径作垂直于Δ的圆，圆 $O_1(P,R)$ 与圆柱切于点 $S(x,y,z)$。对于给定的 P，欲求 $R=R(L)$ 和接触曲线

$$x = x(L)$$
$$y = y(L)$$
$$z = z(L)$$

2. 方程的导出

圆柱面方程：

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Δ的方程：

$$x = z\operatorname{tg}\tau$$
$$y = h$$

过Δ上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，作平面 $N\perp\Delta$，则平面N的方程为

$$z = \left(\frac{L}{\sin\tau} - x\right)\operatorname{tg}\tau,$$

其中，$O_1P = L$，$x_0 = L\sin\tau$，$y_0 = h$，$z_0 = L\cos\tau$。

平面N截圆柱所得的截线 Ω_1 的方程(仅取 $y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$的部分)为

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$z = \left(\frac{L}{\sin\tau} - x\right)\operatorname{tg}\tau$$

设 Ω_1 上任意一点 (x,y,z) 到 (x_0,y_0,z_0) 的距离为 R，并注意 $x_0 = L\sin\tau$，$z_0 = L\cos\tau$，$y_0 = h$，则

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

即

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (\sqrt{r^2 - x^2} - y_0)^2 + \left[\left(\frac{L}{\sin\tau} - x\right)\operatorname{tg}\tau - z_0\right]^2,$$

或

$$R^2 = \sec^2\tau(x - x_0)^2 + (\sqrt{r^2 - x^2} - y_0)^2 \tag{1.1}$$

为求其最小值，令 $\frac{dR}{dx} = 0$，于是，得极值方程

$$\operatorname{tg}^2\tau\left(\frac{L}{\sin\tau} - x\right) = \frac{y_0 x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{1.2}$$

把公式(1.2)两边同时平方并整理，可得到一个四次方程. 1976年陈惠波用拉格朗日乘数法推出过与上述四次方程相类似的方程. 不过，他推出的计算公式相当繁，讨论和应用都不方便. 下面我们将介绍方程(1.2)的公式解法及迭代解法，并给出简单明瞭的计算公式.

1.2 公式解法

为让实际工作者使用方便，本节先介绍有关结果和给出实用的计算公式，然后再给出公式解法的推导过程.

1. 主要结果及计算公式

令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = T$，$T > 0$，则式(1.2)可化为四次方程

$$T^4 + kT^3 + m_0 T - 1 = 0 \tag{1.3}$$

其中，

$$k = \frac{2(L + r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}, \quad m_0 = \frac{2(L - r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}.$$

且

$$R = \left(h - r\frac{2T}{1 + T^2}\right)\sqrt{\cos^2\tau\left(\frac{1 - T^2}{2T}\right)^2 + 1} \tag{1.4}$$

为求解方程(1.3)，先解其辅助方程

$$u_0^3 + pu_0 + q = 0 \tag{1.5}$$

其中，$p=4+km_0$，$q=k^2-m_0^2$. 可证方程 (1.5) 有且仅有一个实根 u_0，且

$$u_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

令 $u=\frac{1}{2}u_0$，则四次方程 (1.3) 的解为

$$T=\frac{1}{4}\left[\sqrt{\left(k-\frac{ku-m_0}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2-16\left(u-\sqrt{1+u^2}\right)}-\left(k-\frac{ku-m_0}{\sqrt{1+u^2}}\right)\right]$$

求出 T 后，可得空间接触曲线

$$x=x(L)=r\cos\theta=r\frac{1-T^2}{1+T^2}$$

$$y=y(L)=r\sin\theta=r\frac{2T}{1+T^2}$$

$$z=z(L)=\left(\frac{L}{\sin\tau}-x\right)\operatorname{tg}\tau=\left(\frac{L}{\sin\tau}-r\frac{1-T^2}{1+T^2}\right)\operatorname{tg}\tau$$

再由公式 (1.4) 便可计算 $R=R(L)$.

2. 公式解法

下面详细介绍公式解法的严格的数学推导和证明过程. 先说明：由问题的实际性质知：$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，因此，作万能替换，令

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=T$$

则

$$\cos\theta=\frac{1-T^2}{1+T^2},\quad \sin\theta=\frac{2T}{1+T^2}\ (T>0)$$

注意：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

代入式(1.2)，并注意 P 点的坐标为

$$x_0 = L\cos\tau$$

$$y_0 = h = r + R_0$$

$$z_0 = L\sin\tau$$

由式(1.2)得

$$\operatorname{tg}^2\tau\left(\frac{L}{\sin\tau} - r\frac{1-T^2}{1+T^2}\right) = \frac{hr\dfrac{1-T^2}{1+T^2}}{r\cdot\dfrac{2T}{1+T^2}}$$

$$\operatorname{tg}^2\tau\left[\frac{L(1+T^2)}{(1+T^2)\sin\tau} - \frac{r(1-T^2)}{1+T^2}\right] = \frac{h(1-T^2)}{2T}$$

$$\operatorname{tg}^2\tau\frac{L(1+T^2)}{\sin\tau}\cdot 2T - 2Tr(1-T^2)$$

$$= h(1-T^2)(1+T^2)$$

$$h(T^4-1) + \frac{2(L+r\sin\tau)}{\cos\tau\ \operatorname{ctg}\tau}T^3 + \frac{2(L-r\sin\tau)}{\cos\tau\ \operatorname{ctg}\tau}T = 0$$

即

$$T^4 + \frac{2(L+r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}T^3 + \frac{2(L-r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}T - 1 = 0$$

令

$$k = \frac{2(L+r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}, \quad m_0 = \frac{2(L-r\sin\tau)}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}$$

可得一元四次方程(1.3):

$$T^4 + kT^3 + m_0T - 1 = 0$$

同理，由式(1.1)，(1.2)可得

$$R = \left(h - r\frac{2T}{1+T^2}\right)\sqrt{\cos^2\tau\left(\frac{1-T^2}{2T}\right)^2 + 1}$$

现在的问题归结为求方程(1.3)的正根。一般来讲，方程(1.3)是实系数四次方程式，有现成的求解公式。但是这样直接解不仅

太繁，而且没有回答方程 (1.3) 有没有正实根？有几个正实根？为此我们先作理论上的讨论，证明方程 (1.3) 有正实根(因而原问题有解)，而且只有一个实根 T 满足 $0 \leqslant T \leqslant 1$，进而用一个统一的公式把这个 T 表达出来．这对于理论研究和应用来说都是非常重要的．

一元四次方程 $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的辅助方程(详见附录C)为

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y + (4ce - b^2e - d^2) = 0$$

因而，方程 (1.3) 的辅助方程为

$$u_0^3 + (4 + km_0)u_0 + (k^2 - m_0^2) = 0$$

其中，$b = k$，$c = 0$，$d = m_0$，$e = -1$.

若令 $p = 4 + km_0$，$q = k^2 - m_0^2$，则辅助方程变为

$$u_0^3 + pu_0 + q = 0$$

这就是方程(1.5)．对于一元三次方程 (1.5)，注意到

$$p = 4 + km_0 = 4\left[\frac{L^2}{h^2\cos^2\tau\ \mathrm{ctg}^2\tau} + 1 - \left(\frac{r}{h}\right)^2 \mathrm{tg}^4\tau\right]$$

因为一般讲 $0 \leqslant \tau \leqslant 45°$，并且 $h = r + R_0 > r$，故有

$$p > 0$$

而

$$q = \frac{16rL\sin\tau}{h^2\cos^2\tau\ \mathrm{ctg}^2\tau} > 0$$

所以三次方程 (1.5) 的根的判别式

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

从而可知方程 (1.5) 有唯一的实根 u_0，并且

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \leqslant 0$$

为以下应用方便，先证明几个引理．

引理 1.0 当 $L>0$ 时,方程(1.3)有正实根 $T\in(0,1)$,但无大于等于 1 的实根.

证明:先证方程(1.3)在(0,1)内有实根,为此记

$$f(T)=T^4+kT^3+m_0T-1$$

则

$$f(0)=-1<0$$

$$f(1)=k+m_0=\frac{4L}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}>0$$

根据连续函数的介质定理知,至少在(0,1)内有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,即方程(1.3)在(0,1)内至少有一实根.

再证方程(1.3)无大于等于 1 的实根. 事实上,若 $T\geqslant 1$,注意 $k>0$,则

$$\begin{aligned}T^4+kT^3+m_0T-1&=(T^4-1)+T(kT^2+m_0)\\&=(T^4-1)+T(k+m_0)+T(T^2-1)k\\&\geqslant(k+m_0)T\geqslant\frac{4LT}{h\cos\tau\operatorname{ctg}\tau}>0\end{aligned}$$

引理 1.1 设 $u_0=2u$,则 $k^2+8u\geqslant 0$.

证明:因 u_0 是方程(1.5)的根,故

$$u_0^3+pu_0+q=0$$

即

$$\begin{aligned}&(2u)^3+(4+km_0)(2u)+k^2-m_0^2\\&=8u^3+8u+2km_0u+k^2-m_0^2\\&=8u^3+k^2+8u+u^2k^2-u^2k^2+2km_0u-m_0^2\\&=u^2(8u+k^2)+(8u+k^2)-(ku-m_0)^2=0\\&(k^2+8u)(1+u^2)=(ku-m_0)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

所以

$$k^2+8u=\frac{(ku-m_0)^2}{1+u^2}\geqslant 0$$

此外,由上式易见:

$$ku-m_0=0\Longleftrightarrow k^2+8u=0$$

即当且仅当 $ku-m_0=0$ 时，$k^2+8u=0$. 而当 $ku-m_0\neq 0$ 时，有

$$\frac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}=\begin{cases}-\sqrt{1+u^2}, & \text{当 } ku-m_0<0 \text{ 时}\\ \sqrt{1+u^2}, & \text{当 } ku-m_0>0 \text{ 时}\end{cases}$$

引理 1.2 若 $ku-m_0>0$，则 $u+\dfrac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}>0$.

证明：若不然，则有

$$u+\frac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}\leqslant 0$$

$$u\sqrt{k^2+8u}\leqslant -(ku-m_0)$$

因为不等式两端皆负，故平方后可得

$$u^2(k^2+8u)\geqslant (ku-m_0)^2$$

从而

$$8u^3+2km_0u-m_0^2\geqslant 0$$

又因 $u_0=2u$ 为方程(1.5)的解，即

$$8u^3+8u+2km_0u+k^2-m_0^2=0$$

所以

$$8u+k^2\leqslant 0$$

又据引理 1.1，当 $ku-m_0\neq 0$ 时，$8u+k^2>0$，矛盾，所以，

$$u+\frac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}>0$$

引理 1.3 若 $ku-m_0<0$ 时，$u-\dfrac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}>0$.

证明：同引理 1.2.

结论： 由引理 1.0 至引理 1.3 得：

(1) 四次方程(1.3)的正根不大于 1，即切点 x 坐标为正。

(2) $ku-m_0=0\Longleftrightarrow k^2+8u=0$； 当 $ku-m_0\neq 0$ 时，$k^2+8u>0$，且

$$\frac{ku-m_0}{\sqrt{k^2+8u}}=\begin{cases}-\sqrt{1+u^2}, & ku-m_0<0\\ \sqrt{1+u^2}, & ku-m_0>0\end{cases}$$

(3) 当 $ku - m_0 > 0$ 时，$u + \dfrac{ku - m_0}{\sqrt{k^2 + 8u}} > 0$。

(4) 当 $ku - m_0 < 0$ 时，$u - \dfrac{ku - m_0}{\sqrt{k^2 + 8u}} > 0$。

以下我们将根据 $ku - m_0$ 的情况，分别讨论四次方程(1.3)的根。

首先，由于 $u_0 = 2u$ 为辅助方程(1.5)的根，故由四次方程

$$T^4 + kT^3 + m_0T - 1 = 0$$

可推出(详见附录C)

$$\left(T^2 + \frac{k}{2}T + \frac{u_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2}{4} + u_0\right)T^2 + \left(\frac{k}{2}u_0 - m_0\right)T + \left(\frac{u_0^2}{4} + 1\right)$$

或

$$\left(T^2 + \frac{k}{2}T + u\right)^2 = \left(\frac{k^2}{4} + 2u\right)T^2 + (ku - m_0)T + (1 + u^2) \qquad (1.6)$$

当 $ku - m_0 = 0$ 时，$k^2 + 8u = 0$，则式(1.6)化为两个二次方程

$$T^2 + \frac{k}{2}T + u = \pm\sqrt{1 + u^2}$$

即

$$T^2 + \frac{k}{2}T + u = \sqrt{1 + u^2} \qquad (1.7)$$

$$T^2 + \frac{k}{2}T + u = -\sqrt{1 + u^2} \qquad (1.8)$$

设式(1.7)的解为 T_{11}，T_{12}，则

$$T_{11} = \frac{-\dfrac{k}{2} + \sqrt{\dfrac{k^2}{4} - 4(u - \sqrt{1 + u^2})}}{2}$$

$$T_{12}=\frac{-\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}-4(u-\sqrt{1+u^2})}}{2}$$

因为 $k>0$，$u\leqslant 0$，所以要 $T>0$，必须取正号,即

$$T_{11}=\frac{-\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}-4(u-\sqrt{1+u^2})}}{2}$$

又设 (1.8) 的解为 T_{21}，T_{22}，则

$$T_{21}=\frac{-\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}-4(u+\sqrt{1+u^2})}}{2}$$

$$T_{22}=\frac{-\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}-4(u+\sqrt{1+u^2})}}{2}$$

因为

$$u+\sqrt{1+u^2}>0$$

所以

$$\frac{k^2}{4}-4(u+\sqrt{1+u^2})<\frac{k^2}{4}$$

故 T_{21},T_{22} 或为共轭复根 $\left(当\ \frac{k^2}{4}-4(u+\sqrt{1+u^2})<0\ 时\right)$，或为小于零的实根 $\left(当\ \frac{k^2}{4}-4(u+\sqrt{1+u^2})\geqslant 0\ 时\right)$，均非所求。

所以,当 $ku-m_0=0$ 时，四次方程 (1.3) 只有一个正实根

$$T_1=T_{11}=\frac{-\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}-4(u-\sqrt{1+u^2})}}{2}$$

根据引理 1.0，它必须满足 $0<T_1\leqslant 1$。

当 $ku-m_0\neq 0$ 时,注意 $k^2+8u>0$，于是四次方程 (1.6) 为