何成慧　周镒如　陈文良　严济宽　译

随机振动概论

上海交通大学出版社

随机振动概论

(印)N.C.尼格姆著

何成慧　周鉴如　陈文良　严济宽　译

陈文良　校

上海交通大学出版社

N.C.Nigam
Introduction to Random Vibrations
The MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1983

内 容 介 绍

本书——《随机振动概论》是两卷著作中的第一卷．它对随机振动理论的分析方法作了很全面和新颖的论述，将这一领域的最新进展和经典材料结合起来，并用统一的方式来表达．书中第一章为绪论，第二、三、四、五章简略回顾了概率理论、随机变量和随机过程理论，讨论了一些重要的随机过程，第六章论述了可靠性分析所需要的随机过程性质，第七章以高度的一般性论述线性系统对于随机激励的响应理论，第八、九章则在这一框架内分别讨论离散系统和连续系统对于随机激励的响应，第十章论述非线性系统的响应则结合一些最新的主要成果．预定于 1984 年出版的第二卷则论述这一理论在疲劳、可靠性分析以及航空、海洋、机械、土建、地震等工程领域中的应用．本书每章末有习题，书后有附录，并有大量参考文献．它适合于研究生、工程技术人员、研究人员和教师阅读，也可作为高年级大学生的参考书．

随机振动概论
(印) N.C. 尼格姆著
何成慧等译　陈文良校
*
上海交通大学出版社出版
上海淮海中路 1984 弄 19 号
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂排版
印装
*
开本：787×1092 毫米 1/16　印张：14.875　字数：362,000
1985 年 6 月第一版　1985 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—5,000
统一书号：15324·12　科技新书目：99-244
定价：2.80 元

丛 书 前 言*

Nigam 教授在他两卷著作的第一卷中，对随机振动理论作了全面的和最新的论述。自从 Crandall 和 Mark (1963) 以及 Lin (1967) 出版了随机振动理论的经典著作以来，这一领域已取得许多进展。因此，Nigam 教授新著作的问世非常适合时宜。它将吸引众多的研究生、研究工作者和实际工作者等等。

本书优点之一是：它仅论述随机振动和随机过程的基本理论方面，而原始参考书目则广泛列出以供有兴趣的读者作进一步研究时查询。

Nigam 教授对研究生讲授这门课程已有多年，本书的组织反映了这一点。第二卷定于 1984 年出版，它将论述随机振动理论在疲劳、可靠性分析、飞机响应、风工程、离岸工程和地震工程中的应用。

H. Max Irvine

* 本书为美国麻省理工学院出版社出版的结构力学丛书之三。H.Max Irvine 为丛书编辑——译注

序

在振动问题中所固有的不确定性的概率处理，导致随机振动理论的发展。过去三十年来，它的基本理论以及在航空、土木、机械工程中的广泛应用，已经引起了人们的注意。随机振动目前在大多数学院中都是为研究生讲授的课程。许多规范和设计部门在实践中都规定了将它的理论应用于工程系统的分析和设计。

随机振动理论的近期主要教材是在1967年出版的。自此以后这一领域已经有了许多显著的发展。许多新版的振动理论书籍都包括随机振动理论的简要论述。本书——两卷著作中的第一卷——主要处理随机振动理论中的分析方面。试图将最新进展与经典材料结合起来，并用统一的和易读的方式来表述。它的姊妹卷正在准备中，她将包含航空、土木、机械工程中许多设计问题的应用等。虽然两卷是独立的，但是设计中概率方法的共同性把它们联系在一起。

本卷包括概率理论的简略回顾，随机变量和随机过程的简要论述，以及随机振动理论的完整讲解(包括离散和连续系统的线性和非线性性态)。附录A和B分别包括 Fourier 分析和常微分方程的有关论题。材料的组织和表达上有如下特点：

作为强有力的方法出现的离散状态法用来处理许多随机过程的性质，诸如水平跨越、峰(值)、包络线和首次跨越时间；随机过程的 Stieltjes 积分表达式，可用来对平稳和非平稳过程作统一处理；对线性系统理论的论述，带有很大程度的普遍性，这是为了说明它的优美和应用范围，离散和连续系统对于随机激励的响应，则在这一框架内展开；非线性系统响应这一章，结合了一些最新的主要成果，表明了对论题的统一观点。

本书试图作为研究生的教科书和有关工程师的参考书。振动基本理论则是本课程的必需先修课。对于已经修了研究生级的概率理论和随机过程课程的学生来说，本书内容可作为一学期课程讲授。但是，如果概率理论和随机过程基础不具备的话，那末书中材料，再补充某些问题的应用，可在两学期内讲授。本书包括最新文献以及例题和习题。

自1969年以来，我一直在印度工学院Kanpur讲授研究生的随机振动课程，并对工业界的工程师和科学家开了一系列关于随机振动及其应用的讲座。本书是在这些讲授的讲稿基础上发展起来的。这些手稿的严格整理则是1981年在 California 工学院讲学时进行的。1982年在 Waterloo 大学讲授研究生的随机振动课程时完成了全部书稿。准备手稿时在 California 工学院和 Waterloo 大学所花费的一些时间，向我提供了一个机会，使之有可能结合许多最新进展和成果。

我为曾有机会受教于印度和美国的一些最杰出的教师而感到荣幸。本书是献给这些教师的，以表示他们给我知识和鼓舞的礼物的感激之意。我的几个学生—— S. Narayanan(印度工学院，Madras)，D. Yadav(印度工学院，Kanpur) 和 R. S. Khandelwal(Roorkee 大学)——曾协助我准备手稿。印度科学院 (Bangalore) 的 Iyengar 博士和 Waterloo 大学的 Karmeshu 博士阅读了部分手稿并提供了有益的评论和建议。Thapar 学院的 G.S.Giare 帮我阅读了证明并准备了索引。

在手稿准备过程中曾得到印度政府教育部质量改进规划项目下的财经支持，对此深表感谢。手稿的最初打印工作是在 Kanpur 由 L.S.Bajpai 做的；最后的打印工作则在 Waterloo 由 Cynthia Jones 完成。美工部分则是 Vijay Kumar 做的。我的妻子 Shashi 对开始本书的写作工作首先给予了鼓励，并在她的支持和理解下使整个工作变得非常愉快。

N. C. Nigam

目　录

第一章 绪　论

不确定性是所有自然界及人为现象所固有。但是不确定性的水平，也就是随机的程度则是各不相同的。当随机程度较小时，则相应问题可在确定性的范畴内处理，亦即问题可用平均值的方程表示，而忽略在平均值附近的变化。因为不确定性为一切问题所固有，这种围绕平均值的变化在确定性方法中，用诸如安全因子或载荷因子这样的概念来估算。这种因子反映了相应问题中不确定性粗糙的定量估计，并且是用非直接的方式来估计。当不确定水平高、或需要高的精确度(如在宇航应用中)来描述系统性态时，则概率方法为系统的分析和设计提供了一个合理和现实的基础。概率方法基本上为不确定性的定量处理提供了一种手段。这包括识别不确定性的源，构造它们的概率模型，并把这些结合到问题的公式化表示中去。概率方法最有意义的特色，是将注意力集中于每一个不确定性的源，并使估价系统性态对于这种不确定性水平变化的敏感性成为可能。因此它提供了一个基础，用来识别重要的不确定性的源，并通过质量控制，或更好地理解和建立模型来减低不确定性的水平，从而提供了改善系统性能的一个框架。

概率方法的中心特色是对不确定性作系统处理。不确定性定量方面的最初兴趣受到碰运气游戏的启发，这导致概率古典理论的发展。科学和工程的进步为概率理论广泛应用于多种多样问题铺平了道路。这导致概率理论作为一门严格的数学学科迅速发展，它包括随机变量及其推广——随机过程的理论。这一理论在物理中第一次找到它的应用是在二十世纪初，它被用来解释 **Brown 运动**(Einstein, 1905)。在本世纪的前半叶，它得到迅速发展，并推动了物理学和天文学的发展(Chandrasekhar, 1943)。随机过程理论在工程上最有意义的应用首先发生在通信领域，用来处理信号中的噪声 (Rice, 1944; Rice, 1945; Middleton, 1960)。人们很快地认识到，这一理论为更切合实际地处理大量工程问题(包括结构/机械系统的分析和设计)，提供了有力的工具 (Bolotin, 1961)。随机过程理论广泛应用于振动问题是在 1950 年左右开始的，并导致叫做**随机振动**的一个新的领域的发展。随机振动理论迅速发展，并已使我们对结构/机械系统动力性态的了解有了显著的改进(Crandall, 1958; Crandall, 1963a; Crandall 和 Mark, 1963; Robson, 1963; Lin, 1967)。

我们将首先用确定性分析方法，来给出分析和设计一个稳定的结构/机械系统的大概轮廓。然后我们来检查不确定性怎样带来了概率方程，并由此产生了问题的新的方面。系统分析和设计的分析方法的最显著特色是**理想化**的过程。大部分现实的结构/机械系统具有复杂的几何和材料性质，并在复杂的环境条件下工作。为了对这种系统进行分析处理，必须建立它的理想模型、它的环境、以及它们之间的相互作用。理想化过程本质上包括为建立数学模型所作的简化假定，使这些模型在分析上是易于处理的、而又产生可以接受的结果。这紧密地联系于特定研究的目标以及在描述系统性态时可以接受的精确度。

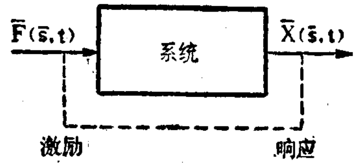

图 1.1　系统、激励和响应的方块图

图 1.1 是一个方块图，它表示了系统、系统和环境的相互作用以及响应。虚的迴线指系统具有反馈。虽然可以在更普

遍的范围内，来讨论系统分析和设计问题的解析和公式化表示，但下面的讨论则仅局限于结构/机械系统的动力性态。系统的分析和设计可通过包括如下步骤的反复循环来完成：

1. 建立一个理想化的数学模型 $\bar{F}(\bar{s}, t)$ 来代表系统和它的环境间的相互作用。$\bar{F}(\bar{s}, t)$ 中的自变量 $\bar{s}\in S$ 和 $t\in T$ 分别指三维空间和时间。通常把 $\bar{F}(\bar{s}, t)$ 叫做**激励**。

2. 建立一个系统的理想化数学模型。这一模型将激励与**响应矢量** $\bar{X}(\bar{s}, t)$ 通过如下形式的方程联系起来：

$$L(\bar{a}, \bar{d}, \bar{s}, t)[\bar{X}(\bar{s}, t)] = \bar{F}(\bar{s}, t), \tag{1.1}$$

其中 $L(\quad)$ 是一数学算子；$\bar{a}$ 为包含已知的系统参数的矢量，叫做**系统参数矢量**；$\bar{d}$ 是包含设计变量的矢量，叫做**设计矢量**。

3. 系统地分析，以确定系统对于激励的响应。这可用符号表示为

$$\bar{X}(\bar{d}, \bar{s}, t) = L^{-1}[(\bar{F}(\bar{s}, t)], \tag{1.2}$$

其中 L^{-1} 代表逆运算子。

4. 用响应参数将约束用式子表示出来，以满足系统的强度和其它运行方面的要求。这些可用如下形式的一组不等式来表示：

$$g_i(\bar{X}(\bar{d}, \bar{s}, t)) \geqslant r_i, \quad i=1, 2, \cdots, n, \ t\in T, \ \bar{s}\in S. \tag{1.3}$$

5. 进行系统设计，包括最优化。这里包含了选择 $\bar{d}$ 以满足约束［方程(1.3)］和使目标函数 $W(\bar{d})$ 最优化。

理想化的过程对于完成这一系列步骤来说是基本的。例如，如果系统和环境之间的相互作用包含流体流经一个固体，那末在建立流体引起的激励的数学模型时，就必须对流体的性质(气体还是液体，非粘性还是粘性)、流(层流还是湍流)、以及热条件(绝热还是等温)作出假设。一个结构/机械系统可以模型化为离散的或连续的元件，它们显示线性或非线性性态。由方程(1.3)给出的约束，代表了系统要求的理想化数学模型。对设计循环的每一阶段作出的假设，在设计完成以前必须得到证实。

这一对于系统分析和设计的讨论，是建立在确定性方法基础上的。为了了解不确定性如何进入这种公式化表达式及其含义，让我们考虑三个典型的例子：

1. **椅子脚的设计** 考虑一只椅子，具有均匀圆截面的铅垂的直脚。设脚的高度和材料是规定了的，并设脚可模型化为均匀铅垂柱。脚可能受压破坏，要是压应力超过抗压强度 σ_C 的话；它也可能失稳。脚的结构设计包括确定它的圆截面直径 d，使它不致受压破坏或失稳。如果脚的设计载荷是规定了的——譬如说，F——那末设计的直径简单地就是下列两个不等式中较大的一个：

$$d \geqslant \left(\frac{4F}{\pi\sigma_c}\right)^{1/2} \tag{1.4a}$$

或

$$d \geqslant \left(\frac{64Fl^2}{\alpha\pi^3 E}\right)^{1/4}, \tag{1.4b}$$

其中 l 是脚的高度；α 是为了考虑稳定性所假定的固定系数；E 是 Young 氏弹性模量。

困难在于建立设计载荷。当人坐到椅子上时，载荷就作用到脚上。因为人的重量是不确定的，作用在脚上的载荷也就是不确定的。我们不能对载荷规定一个上界，因为一个人的重量是没有上界的。除了载荷的不确定性，对于材料性质 E 和 σ_C 也有不确定性。众所周知，从一个试件到另一个试件，材料的性质是围绕着平均值变化的，因而关于这些性质的规定值中，就

有一个不确定性的因素．由于制造公差，脚的高度也是变化的，因而关于它的值也有一个不确定因素。必须注意，依靠较好的质量控制，在 E、σ_C 和 l 中的不确定性可以减小到较小程度。

2．**运载火箭的结构设计** 运载火箭是一个复杂的结构/机械系统。与设计有关的不确定性的主要来源是(Bendat 等人，1961)：

a．在运输到发射台过程中，由于地面诱发的振动导致支承激励的随机性。

b．地面风的激励，风速在空间和时间上都显示随机波动。

c．每一级燃烧时推力的随机波动，包括质量的随机波动，这使质量参数变为时间的随机函数。

d．由于喷气噪声和边界层湍流引起的随机激励。

e．在大气中飞行由于阵风引起的激励。

f．材料性质、制造误差和装配中的不确定性。

3．**离岸平台的结构设计** 离岸结构承受由于风、海浪和地震(如果位于地震区)引起的载荷。

a．由于风的速率和方向的随机波动以及流的分离和涡的发放的随机性，使得由风所引起的载荷在空间和时间上都是随机的。关于风暴的发生、持续的时间和其它特性也有不确定性。

b．由海浪引起的载荷在空间和时间上都是随机的，这是因为波高、波速和方向的随机性，以及围绕结构的流场的随机性．由风所引起的载荷与由浪所引起的载荷之间有某种相关性。

c．地震引起的地面诱发的激励在性质上是随机的．关于地震的发生、它的大小、震源深度以及震中距离等，都有不确定性。

从上述典型的结构/机械系统例子中，可以清楚地看到，在这些系统的分析和设计的某些方面有大的不确定性．最显著的不确定性的来源常常是环境，通过它与系统的相互作用产生随机激励．通过一个或多个系统参数以及(1.3)式中的约束变量，不确定性也可以进入方程．因为响应在性质上是随机的，约束变量也可能是随机的，因而不等式约束就不能确定性地表示．这些必须用概率的语言来叙述．事实上，随机载荷下关于“破坏”的结构和描述必须作为整体来看待。

为了分析和设计在随机振动环境下工作的系统，必须要有：(1) 对于概率理论、特别是随机变量和随机过程理论的了解；(2) 给定了激励的概率结构以后，确定响应的概率结构的方法；(3) 可靠性尺度，用概率语言来表示加于系统性态上的约束(“破坏”)(Narayanan 和 Nigam，1978)。本书的第二——五章用来简略地复习概率论以及对随机变量和随机过程作简明阐述．第六章讨论了为发展可靠性尺度所需要的随机过程基本性质．本书的其余部分则包括确定响应的概率结构的方法，而激励的概率描述为给定．为了论述离散和连续系统的线性和非线性性态，应用了时域和频域两种方法。

第二章　概率论：基本记号与公式

2.1　引　言

概率论为处理大量物理问题中所固有的不确定性提供了一个数学方法。最初，概率论局限于与碰运气游戏相联系的随机事件及其相应的概率计算的狭隘领域。对这些问题，概率的古典定义，即“结果中有利的次数与(等可能性)结果的总次数的比值”，是恰当的。随着时间的推移，概率论在广泛多样的物理问题中找到了应用，并发展成为一门演绎学科。要全面地论述概率论超越了本书的范围。在本章中，对于为理解以下数章所需要的概率论的某些定义和公式，则不加证明地予以介绍。要对这一吸引人的主题有更深入的了解，请读者去学习专门的教科书，例如，Loéve(1963)，Papoulis(1965)，以及 Feller(1968, 1966)。

2.2　集合论：定义和运算

在集合论的范畴内来介绍概率的概念是方便的。

2.2.1　定义

一个集合定义为个体的集成。构成一个集合的个体称为集合的**元素**。一个集合可以是有限的或无限的，这要根据元素的数目是有限还是无限而定。一个无限集合可以是可列的或不可列的。一个集合如果不包含任何元素，则叫**空集**或**零集**。

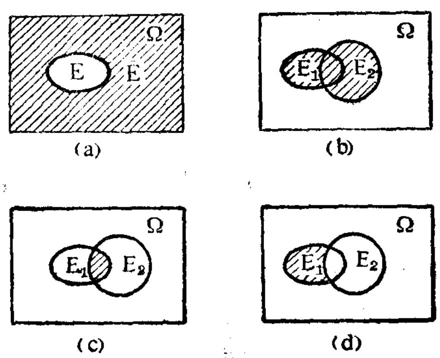

图 2.1　表示集合运算的 Venn 图

考虑两个集合 A 和 B。表达式 $A\subset B$ 和 $A\in B$ 是等价的，两者都表示 A 的每一个元素皆包含于 B。于是 A 叫 B 的**子集**。我们假定空集是任何集合的子集。

2.2.2　运算

令 Ω 表示最大的集，称为**全集**。在以下讨论中，我们将只考虑 Ω 的子集。

1. **补(或余)**　令 $E\in\Omega$，E 的补，记为 $\overline{E}$，是一个集合，它包含 Ω 中不属于 E 的所有元素。补的运算可以用图 2.1a 的 Venn 图来说明，图中全集 Ω 用矩形表示，而集 $\overline{E}$ 则用 Ω 中的阴影面积表示。

2. **并**　设 E_1、$E_2\in\Omega$，且 $E=E_1\cup E_2$。符号 $\cup$ 表示两个集合的并。集合 E 叫做集合 E_1 与 E_2 的并，并包含属于 E_1 或者 E_2 的所有元素。图 2.1b 中的阴影面积表示 E。

3. **交**　设 E_1、$E_2\in\Omega$，且 $E=E_1\cap E_2$。符号 $\cap$ 表示两个集合的交。集合 E 称为集合 E_1 和 E_2 的交集，它包含同时属于 E_1 和 E_2 的所有元素。图 2.1c 中的阴影面积表示 E。如果两个集合的交是一个空集，则称它们为**互不相容的(或互斥的)**。

4. **差**　设 E_1、$E_2\in\Omega$，且 $E=E_1-E_2$。符号 $-$ 表示两个集合差的运算。集合 E 称为集合 E_1 与 E_2 的差，并包含了不包含在 E_2 中的 E_1 的元素。图 2.1d 中阴影面积表示 E。

以上定义的四种集合运算不是独立的，例如：

$$E_1 \cup E_2 = \overline{\overline{E_1} \cap \overline{E_2}},\quad E_1 \cap E_2 = \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}},\quad E_1 - E_2 = E_1 \cap \overline{E_2}. \tag{2.1}$$

并与交的运算服从交换、分配和结合律，亦即

$$\begin{aligned} &E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1,\\ &E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3,\\ &E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3; \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3),\\ &E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3). \end{aligned} \tag{2.4}$$

n 个集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \Omega$ 的并与交可表示为

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n,\quad \bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n. \tag{2.5}$$

2.3 概率的概念

概率的古典定义是基于有利结果数目与结果总数之比的概念。这一比值是靠想象所有可能结果的数目与有利结果数目而确定的。这一定义要求每一种可能结果是等可能性的。虽然古典定义对于包含有限数目结果的简单问题是合适的，但用它来处理其它问题就碰到了困难。对于古典定义的先验概念的显著改进则是基于试验的**相对频率**的概念。在给定试验中，事件发生的相对频率是作为比值的极限而得到的，也就是试验重复进行次数趋于无限时，试验中事件发生的次数与实验进行的总次数比值的极限。概率的这一相对频率的定义是吸引人的，因为它提供了一个从试验数据来计算概率的基础。但是要在此基础上把概率论建立为一门演绎的学科，则这一定义不是一个合适的基础。为此人们必须选择一个公理化结构。关于相对频率和概率的公理化概念，我们都将进行讨论。

概率论通过所谓试验的概念而得到直观的意义，试验就是一个简单真实的或概念上的实验。试验是一种理想化的实验，它的可能结果假定是知道的，没有任何含糊。包含一个试验所有可能结果的集合，称为**样本空间** Ω。样本空间中的每一个元素，称为一个**样本点** ω。如果样本空间只包含一个样本点，则只有一种可能结果，试验就是确定性的。一个样本空间可能是有限的或无限的，取决于试验的可能结果是有限个还是无限个。一个样本空间如果只包含有限多个样本点，或者包含可以排列成简单序列 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots$ 的无限多个点，则叫做**离散的样本空间**。下面是关于试验和相应的样本空间的几个例子：

试　　验	样本空间	注
抛硬币	(H, T)	有限样本空间
掷骰子	$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$	有限样本空间
在时间区间 $(0, T)$ 内一个机场上飞机到达的数目	$(n: n$ 为整数$)$	可列无限样本空间
飞机着陆时的铅垂速度	$(x: 0 \leqslant x < \infty)$	不可列无限样本空间

一个**事件**是样本空间的子集，对它可赋予一定的概率。一个事件如果只包含一个样本点，则称为**简单的**（或**不可分解的**）事件；否则叫做**复杂的**（或**可分解的**）事件。在掷骰子例子中，得到一个特定整数，譬如说 5，是一简单事件，而出现偶数则是一复杂事件。

2.3.1 相对频率

经验告诉我们，当试验次数增多时，一个随机事件发生的相对频率在重复试验中趋向于一个可认识的极限。这种现象称为**统计规律性**；并且当试验次数趋向无限时，相对频率的极限值就是问题中事件发生的概率。为了计算相对频率，试验必须在相同条件下重复。

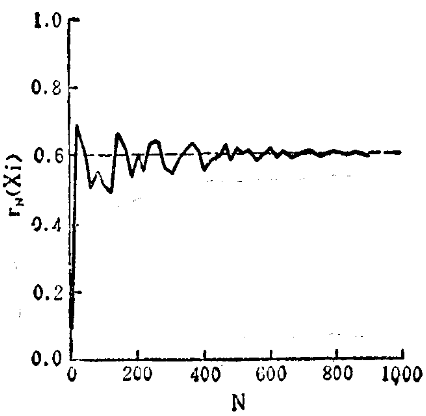

图 2.2 相对频率

考虑一个试验，其离散样本空间为 $\Omega:(x_1, x_2, \cdots x_n)$。设 N 为总的试验次数，而试验中样本点 x_1、x_2, …, x_i, …, x_n 观察到的次数分别为 N_1, N_2, …, N_i, …, N_n。显然，

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N. \tag{2.6}$$

x_i 发生的相对频率定义为

$$r_N(x_i) = N_i/N. \tag{2.7}$$

图 2.2 是相对频率作为 N 的函数的曲线。可以看到相对频率的值在一个极限值附近振荡，并且当 N 增大时趋向于收敛于它。此外，由(2.6)和(2.7)式，显然有

$$0 \leqslant r_N(x_i) \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} r_N(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} N_i = 1. \tag{2.8}$$

所描述的极限过程的数学叙述为

$$\lim_{N\to\infty} P(|r_N(x_i) - p| > \varepsilon) = 0, \tag{2.9}$$

其中 $P(\ )$ 表示包含在括号内事件的概率；$p = P(x_i)$ 是 x_i 发生的概率；ε 为一任意小的正数。方程(2.9)称为 **Bernoulli 大数定律**。

大数定律提供了计算事件概率的直观的理解和实际的方法。但是很清楚，从观察到的数据来进行实际的概率计算必然是近似的，这是由于实际数据总是有限的。

2.4 公理和定理

在 2.3 节中介绍了概率，将它作为定义于样本空间的一个集合函数。我们先叙述支配这一集合函数的一组公理，然后推导出一些定理，从而展开概率的数学理论。

考虑一个集合 $E \in \Omega$。我们假设下述公理：

公理 1

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1. \tag{2.10}$$

公理 2

$$P(\Omega) = 1. \tag{2.11}$$

公理 3

如 E_1, E_2, …, $E_n \in \Omega$ 是互不相容的，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i). \tag{2.12}$$

基于这些公理，可以证明下述诸定理。

2.4.1 互补事件定理

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E). \tag{2.13}$$

2.4.2 全事件定理

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \tag{2.14}$$

重复应用上述定理，可以证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right). \tag{2.15}$$

式中每一个和包括不同事件的所有不同组合。

2.4.3 条件概率：定义

令 $P(E_2|E_1)$ 是在 E_1 已经发生的条件下，E_2 发生的概率。如 $P(E_1)>0$，则 $P(E_2|E_1)$ 定义为

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}, \tag{2.16}$$

如 $P(E_1)=0$，则 $P(E_2|E_1)$ 无定义。如

$$P(E_2|E_1) = P(E_2). \tag{2.17}$$

则叫作事件 E_2 **独立于** E_1，这意味着

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2). \tag{2.18}$$

2.4.4 联合事件定理

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) = P(E_2)P(E_1|E_2). \tag{2.19}$$

反复应用方程(2.19)，可以证明

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)\cdots P\left(E_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right). \tag{2.20}$$

如 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是互相独立的，则对 $k_1, k_2 = 1, 2, \cdots, n$ 的所有组合，有

$$P\left(\bigcap_{i=k_1}^{k_2} E_i\right) = \prod_{i=k_1}^{k_2} P(E_i) \tag{2.21}$$

以及

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(E_i)P(E_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P(E_i)P(E_j)P(E_k) + (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} P(E_i) \tag{2.22}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i). \tag{2.23}$$

如所有事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是某一事件——譬如说，E_i——的子集，则称这些事件是**完全嵌镶的事件**，并有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \max_j [P(E_j)] = P(E_i). \tag{2.24}$$

习　题

2.1 用补与并的运算来表达对两个集合 E_1 与 $E_2 \in \Omega$ 进行交与差的运算。对全集 $\Omega:(n:n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 与 $E_1:(1, 2, 3)$、$E_2:(2, 3, 4, 5)$ 证实答案。

2.2 用代数方法证实下述诸关系式：

a. $(\overline{E_1 \cup E_2}) = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$.

b. $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} = (E_1 \cap E_2)$.

c. $(E_1 \cup E_2) - E_2 = E_1 - (E_1 \cap E_2) = E_1 \cap \overline{E_2}$.

d. $(E_1 - E_1 \cap E_2) \cup E_1 = E_1 \cup E_2$.

2.3 一试验由掷一次骰子组成。试进行 1000 次试验，并计算当试验次数分别为 100、500 和 1000 次时，下列事件发生的相对频率：

a. E_1：(整数 4 发生)，

b. E_2：(奇整数发生)，

c. E_3：(整数 $\leqslant 4$ 发生)。

将事件 E_1 和 E_3 发生的相对频率作为所掷次数的函数，用图表示。建立基于古典定义的这些事件发生的先验概率，并讨论试验的结果。

2.4 一试验由掷两个骰子(一个接着另一个)组成。试进行 1000 次试验，并计算下列事件发生的相对频率：

a. E_1：(两次投掷中出现的整数之和为 4)，

b. E_2：(两次投掷中出现的整数之和为 7)，

c. E_3：(第一次投掷出现整数 3，以及第二次出现 4)。

假定(1)两个整数发生的先后次序不加区别，以及(2)两个整数发生的顺序加以区别；试对这两种情况，建立基于古典定义的事件 E_1 和 E_2 发生的先验概率。将这两个结果与基于试验的计算结果相比较。

计算事件 E_3 和 $E:(E_3|E_2)$ 发生的相对频率，并将它和根据古典概率定义得到的结果相比较。

2.5 两个事件的并可表示为两互不相容事件的并：

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1 \cap E_2).$$

试用类似的方法表示三个事件 E_1, E_2 以及 E_3 之并。利用以上结果，证明

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

2.6 试证如事件 E_1, E_2, E_3 是互不相容的，且 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，则

$$P(A|E) = \frac{P(A|E_1)P(E_1)}{P(E)} + \cdots + \frac{P(A|E_n)P(E_n)}{P(E)},$$

由此，如

$$P(A|E_i) = P(B|E_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则

$$P(A|E) = P(B|E).$$

如果诸事件 E_i 不是互不相容的，上述结论对吗？

2.7 在一机场上飞行班次 1 和 2 按计划表应独立地于 10:00 和 10:15 到达，并停留 30 分钟。对以往几年中到达情况的分析表明，飞行班次 1 和 2 在时间区间 9:45—10:45 和 10:00—11:00 内是随机地到达的。试求在特定的一天中，下列事件发生的概率：

a. 飞行班次 2 比 1 先到；

b. 飞行班次 1 和 2 并不相遇；

c. 飞行班次 1 和 2 重叠的时间超过 10 分钟。