

彈性薄壁桿件的靜力學

Г. Ю. 詹涅里傑

Я. Г. 巴諾夫柯

著

科學出版社

699

彈性薄壁桿件的靜力學

Г. Ю. 詹涅里傑 著
Я. Г. 巴諾夫 柯

胡 海 昌 譯
解 伯 民

科 學 出 版 社

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко
СТАТИКА
УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ
ОГИЗ Гостехиздат, 1948

2432/15

彈性薄壁桿件的靜力學

翻譯者 胡海昌 解伯民
出版者 科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者 上海中科藝文聯合印刷廠
總經售 新華書店

1955年3月第一版
1956年12月第二次印刷
(滬)2,401—3,426

書號: 0171 印張: 8
開本: 787×1092 1/25
字數: 124,000

定價: (11)1.42 元

S1420503

序 言

在最近發展的應用彈性力學的問題中，薄壁桿件，即相當長的柱壳型桿件的彈性平衡問題，佔據着顯著的地位。這個問題的產生，起初是由於建築工程的需要，後來又成為航空工程師所重視的課題。

現在關於這個問題，已有大量的饒有興趣的理論著述和試驗材料，這些資料表明了關於薄壁桿件計算問題發展的巨大成就。這些成就中具有決定性的部分應歸功於蘇聯學者 B. 3. 符拉索夫(Власов)，A. A. 烏曼斯基(Уманский)，P. A. 亞達杜洛夫(Ададуров)等人。蘇聯學者創造性工作的特點，是在尋求解決這個問題的普遍方法，使之適合於具有任何載荷及邊界條件的各種截面形狀的薄壁桿件。

本書僅敘述了薄壁桿件的靜力學的現狀；穩定和振動係獨立的課題，不在討論之列。

應用材料力學中關於橫截面上法應力平面分佈的假定，來計算薄壁桿件一般是不合適的。對於開口截面薄壁桿件，當其具有內可變性時，這個假定將導致靜力不平衡的結果；對於閉合截面薄壁桿件，這個假定在許多場合將嚴重地破壞變形協調條件。因此在大多數的情形，必須跳出材料力學的範疇而尋求更準確的解答。

應用現代的壳體理論來解決薄壁桿件的問題只有在引進了某些補充的幾何性質的假設之後，才成為實際可行；否則問題將

變得非常繁雜，以致只有在具有最簡單的載荷和邊界條件的情形下才能求得解答。

彈性力學在現階段是按兩個方向發展的。一方面是繼續尋求彈性力學基本方程的準確或近似解，另一方面受到熱烈探討的是在研究彈性力學某些問題時，例如薄壁桿件、板和殼體，不是從全部方程出發，而是應用某些關於變形的假定。在這兩條途徑間有着密切的聯繫，而在不久前已成功地由彈性力學基本方程出發，近似地解決了板和殼體的某些問題，這就使我們有可能去研究近似理論中那些基本假定的準確程度。

現在的薄壁桿件理論是按彈性力學的第二個方向發展的，它預先採用了一些關於變形的假定。

薄壁桿件理論方面，蘇聯學派最重要的貢獻就在於作出了這些補充假設，這樣就合理地簡化了計算方法但同時保證了最小限度地損害結果的準確程度。

本書第一章首先研究薄壁桿件在最普遍基礎上的基本方程。

接着討論了 B. 3. 符拉索夫對於開口截面桿件以及 A. A. 烏曼斯基對於閉合截面桿件的實用理論，這些理論已應分地獲得工程界的讚譽（第二及第三章）。

第四章研究了各種簡化了的理論，這些理論除開符拉索夫和烏曼斯基的假設而採用了補充的假設。這些理論雖然不具有普遍性，但在某些場合是相當有效的。

第五章的內容具有原理上很重要的意義，本章討論了 P. A. 亞達杜洛夫的關於具有不能變形的側面的薄壁桿件之一般理論

的基礎。

這個理論的主要任務在於控制由實用理論所得結果之準確程度，和解決某些實用理論根本不能解決的問題。

在結論中則簡略地敘述了薄壁桿件理論發展的主要階段。

在闡述現在的薄壁桿件理論時，我們盡力注意到方法上的嚴整性，以便能從同一觀點來分析各種不同的方法，在若干地方引用了作者自己研究的結果。

我們在和 А. И. 盧爾也(Лурье)教授和 А. А. 烏曼斯基教授的討論中得到很多有價值的意見，Р. А. 亞達杜洛夫和本書編輯 А. И. 切克馬立夫(Чекмарев)曾作了許多重要的指正，作者謹對他們表示深切的感謝。

Г. 詹涅里傑, Я. 巴諾夫柯

目 錄

序言	i
第一章 彈性薄壁桿件靜力學的基本方程	1
§ 1. 引言	1
§ 2. 稜柱形薄壁桿件平衡的微分方程	2
§ 3. 稜柱形薄壁桿件平衡的積分方程	9
§ 4. 問題的超靜定性	14
§ 5. 薄壁桿件靜力學的變形假設	15
§ 6. 彈性薄壁桿件靜力學的全部方程	21
第二章 開口截面彈性薄壁桿件平衡的實用理論	31
§ 1. 基本方程	31
§ 2. 扇性性質	42
§ 3. 約束扭轉方程的解	54
§ 4. 雙力偶的作用, 雙力矩	65
§ 5. 連續桿	70
§ 6. 圍繞建造固定軸的扭轉	77
§ 7. 關於約束效應的衰減, 聖維那原理的適用性	81
§ 8. 基本方程的變分推導	87
第三章 閉合截面彈性薄壁桿件平衡的實用理論	93
§ 1. 基本方程	93
§ 2. 問題的變分方程	100
§ 3. 問題的近似方程	104

§ 4. 扇性特徵	110
§ 5. 扭轉微分方程的解法	115
§ 6. 約束效應的衰減	118
第四章 彈性薄壁桿件平衡的簡單理論	121
§ 1. 應用法應力線性分佈這一假設的可能性	121
§ 2. 基於將薄壁桿件代以一組只承受縱向內力的細筋 和繫於其上的只承受剪切的表皮的方法，靜定的 問題	129
§ 3. 基於將薄壁桿件代以一組只承受縱向內力的細筋 和繫於其上的只承受剪切的表皮的方法，超靜定 的問題	135
第五章 彈性薄壁桿件平衡的一般理論	139
§ 1. 基本方程	139
§ 2. 截面的幾何特徵	148
§ 3. 變形後仍為平面的截面上剪應力的決定	152
§ 4. 歸結於薄壁桿件聖維那問題解答的問題	158
§ 5. 在任意邊界條件下問題的解法	162
§ 6. 具有兩個對稱軸的閉合截面薄壁桿的約束扭轉 問題的解法	163
§ 7. 一般問題解法的要點	178
結論	186
參考文獻	190

第一章 彈性薄壁桿件靜力學的基本方程

§1. 引言

在彈性力學和結構力學中，凡物體之最大橫向尺寸，較其長度為相當小時稱之為桿。桿又因三個特徵尺寸之比例而分為兩類。

第一類的桿，其橫截面的兩個尺度是同級的數量（圖 1）。在第二類桿，其三個基本尺度是屬於不同級的數量，在橫截面上一個方向的尺度較之另一方向的尺度為相當小（圖 2）。這樣的桿稱為薄壁桿件。

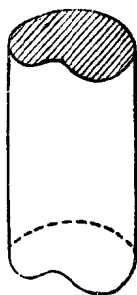


圖 1

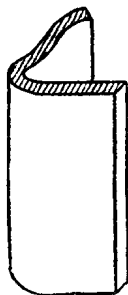


圖 2

根據側面的形狀不同，桿件又分為稜柱形的、錐形的、自然扭曲的等等。

上面的關於桿件的幾何分類基本上還只是表示了不同類型桿的質的方面，由彈性力學的觀點看來是不夠的，還必須用桿件各點位移大小之情況來補充說明。必須區別桿件各點的“大”的和“小”的彈性位移。因為在具有一個或兩個小尺度的物體上，各點之相對位移可能是和這些小尺度同級大小，此時已不能應用線性彈性力學的方程，所以僅是幾何的分類還不足以說明問題的性質；兩個幾何上完全一樣的桿件，在同樣的載荷作用下，由於它們材料的不同而可能具有本質上不一樣的位移。

在彈性力學教程中所敘述的彈性桿件平衡的古典問題 [聖維那(Saint-Venant)、克勒勃許(Clebsch)、斯捷克洛夫(СТЕКЛОВ)、亞爾曼塞(Almansi)等] 涉及上述的第一類稜柱形桿, 桿之各點在變形時位移很小。

細桿理論研究在大彈性變形時的第一類桿件; 當然, 這個理論的線性近似也可用於計算桿件小變形的情形。

現有的薄壁桿件理論, 則是研究在小變形情形下的第二類桿件。關於這類桿件大變形的計算問題尙未經探討, 這個問題屬於殼體的非線性理論, 不在本書範圍之內。

§ 2. 稜柱形薄壁桿件平衡的微分方程

由稜柱形薄壁桿件的定義可知, 它可以看成是柱形薄殼沿母線切出的一部分 (開口截面桿件), 或者是相當長的封閉柱形殼 (閉合截面桿件)。

與桿件表面等距離的點構成的面稱為中曲面, 我們用坐標 z 與 s 來確定中曲面上各點的位置, 坐標由中曲面的母線以及與其垂直的一條曲線開始計算。 z 的起點置於殼體的一個端截面, s 的起點對於所有橫截面都一樣, 現暫不規定。

現由殼體內用四個垂直於中曲面的截面 $z, z+dz, s, s+ds$ 切出單元體 (圖 3) 並列出其平衡方程。

我們將所有的外力與內力化簡到

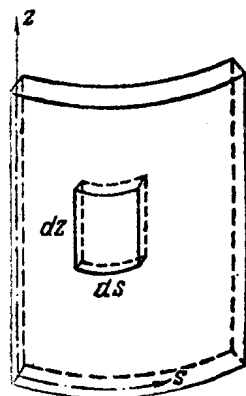


圖 3

中曲面上，換句話說，我們用靜力相等的分佈於中曲面上的力，來代替實際分佈的外力及內力。這樣我們就可以研究中曲面上一個單元的平衡來代替殼體單元的平衡。

中曲面上單位長度的內力與內力偶的分量以 $T_s, T_z, S_s, S_z, N_s, N_z, G_s, G_z, H_s$ 和 H_z 來表示（圖 4 及圖 6）。其中 T 表示法向力， S 表示剪切力， N 表示橫力， G 表示彎矩， H 表示扭矩。符號 T, S, N, G, H 的下標表示這些內力或力偶所作用線段的法線方向。作用於中曲面單位面積上的外力之分量則以 p_s, p_s, p_n 表示。

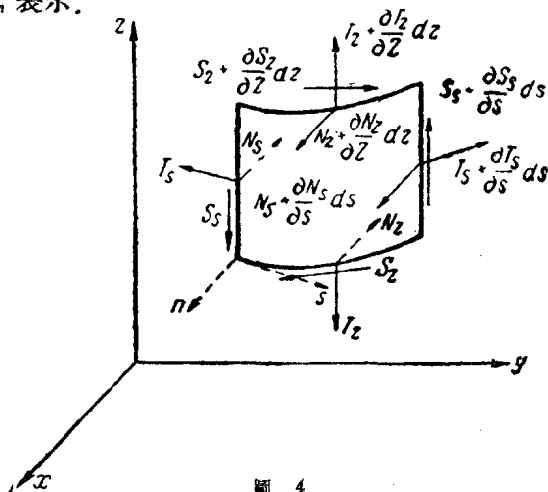


圖 4

將所有力投影於母線方向，則得：

$$\left(T_s + \frac{\partial T_s}{\partial z} dz\right) ds - T_s ds + \left(S_s + \frac{\partial S_s}{\partial s} ds\right) dz - S_s dz + p_s dz ds = 0$$

消去 $dz ds$ 後得：

$$\frac{\partial T_s}{\partial z} + \frac{\partial S_s}{\partial s} + p_s = 0. \quad (1)$$

在切線方向的平衡條件給出：

$$\left(T_s + \frac{\partial T_s}{\partial s} ds\right) dz - T_s dz + \left(S_z + \frac{\partial S_z}{\partial z} dz\right) ds - S_z ds + N_s d\beta dz + p_s dz ds = 0. \quad (2)$$

參考圖 5, $N_s d\beta dz$ 這一項的出現並不難了解. 圖 5 表示單元的截面 $z = \text{const}$. 在中曲面之截線 $z = \text{const}$ 上相距 ds 之兩點之法線夾角為 $d\beta$, $d\beta$ 與該線的曲率半徑 $R(s)$ 有下列關係：

$$\frac{1}{R} = \frac{d\beta}{ds}. \quad (3)$$

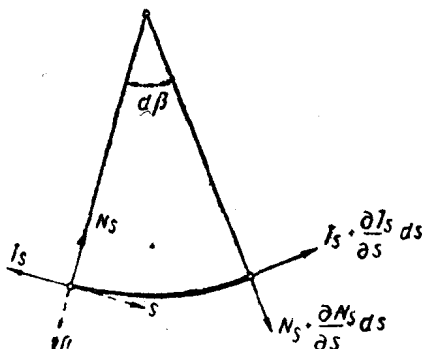


圖 5

應用 (3) 式, (2) 可寫為：

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{N_s}{R} + p_s = 0. \quad (4)$$

將全部作用於單元上的力投影到曲線 $z = \text{const}$ 的外法線方向 (圖 5), 便得到第三個平衡方程：

$$\left(N_s + \frac{\partial N_s}{\partial s} ds\right) dz - N_s dz + \left(N_z + \frac{\partial N_z}{\partial z} dz\right) ds - N_z ds - T_s d\beta dz + p_n ds dz = 0,$$

或：

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_z}{\partial z} - \frac{T_s}{R} + p_n = 0. \quad (5)$$

作用於中曲面單元上所有力之合力矩在 $z = \text{const}$, $s = \text{const}$, 及曲線 $z = \text{const}$ 之向外法線等三個方向之投影應該等於零, 這樣又得到三個方程(在圖 6 上僅表明了 G_z , G_s , H_z , H_s 等力矩向量):

$$\begin{aligned} \left(H_s + \frac{\partial H_s}{\partial z} dz \right) ds - H_z ds + \left(G_s + \frac{\partial G_s}{\partial s} ds \right) dz - \\ - G_z dz - N_s dz ds = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(H_s + \frac{\partial H_s}{\partial s} ds \right) dz - H_z dz + \left(G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} dz \right) ds - \\ - G_z ds + N_z dz ds = 0, \end{aligned}$$

$$-S_s ds dz + S_z ds dz - H_s d\beta dz = 0.$$

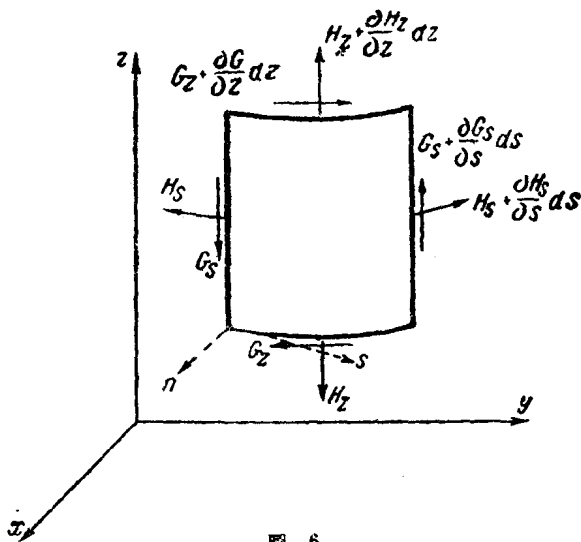


圖 6

簡單地化簡以後，便得：

$$\frac{\partial H_s}{\partial z} + \frac{\partial G_s}{\partial s} - N_s = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial s} + \frac{\partial G_s}{\partial z} + N_s = 0, \quad (7)$$

$$S_s - S_s + \frac{H_s}{R} = 0. \quad (8)$$

因此，六個靜力學方程(1)，(4)——(8)中包含有十個未知的力及力矩。未知數的數目多於方程的數目就表示了壳體問題的超靜定性。

如果再引用一些關於應力沿壳體厚度分佈狀況的假設，則可使超靜定的次數減低。

在所有閉合截面薄壁桿件的理論中，都假設在截面 $z = \text{const}$ 上法應力 σ_s 和剪應力 τ_{zs} 沿壳體厚度均勻分佈；如此則在某點 z, s 之合內力將為：

$$T_s = h(s) \cdot \sigma_s(z, s); \quad S_s = h(s) \cdot \tau_{zs}(z, s). \quad (9)$$

此處 $h(s)$ 表示壳體在該點的厚度。

由這個假設可知 $N_s = 0$ ，因為在截面 $z = \text{const}$ 上只有力 T_s 與 S_s 。簡單的計算證明力矩 G_s 和 H_s 亦將因此假設而等於零：

$$G_s = \sigma_s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} n \, dn = 0, \quad (10)$$

$$H_s = \tau_{zs} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} n \, dn = 0, \quad (11)$$

因為無論 σ_z 和 τ_{zs} 都與沿中曲面的法線計算的坐標 n 無關。

對於開口截面的桿件，上述假設則將不足。為要明瞭這點，我們可以回想一下稜柱形薄壁桿件受端力偶扭轉時，其聖維那解的一些性質，這個問題是我們在下面所研究的問題中之最簡單者。

如所周知，在這類桿件自由扭轉時，截面 $z = \text{const}$ 上的剪應力沿截面厚度（沿坐標 n ）有顯著的變化。這些剪應力的力矩構成總扭矩的一部分 $\bar{M}_z$ ；總扭矩的另一部分則由較小的內力 N_z 所構成。

因此，雖然 (11) 式可認為適合於閉合截面薄壁桿件，但它對於開口截面的桿件卻不甚適合，因為在這種情形，必須認為 $H_z \neq 0$ ，同時還應考慮到內力 N_z 所構成的扭矩。要同時考慮這兩點，最簡單的方法（也可說是在文獻中唯一應用的方法）是放棄 (11) 式而用另外一個式子來補充假設 (9)，這個式子將表示由於上述原因所發生的扭矩 $\bar{M}_z$ 與單位長度的扭轉角 θ 之關係，我們將該式寫成在聖維那問題中的形式： $\bar{M}_z = C\theta$ ，其中 C 為自由扭轉的剛度； θ 為單位長度的扭轉角。

就薄壁桿件而言， C 之值可按下列近似公式計算：

$$C = \frac{\mu}{3} \int_{s_1}^{s_2} h^3(s) ds,$$

其中 s_1 及 s_2 為邊緣的 s 值。

當 N_z 的力矩頗大時， N_z 本身依然微小，故可認為 $N_z = 0$ ，而其力矩又可以在形式上歸之於 H_z 之積分，換句話說，可以認為：

$$\bar{M}_z = C\dot{\theta} = \int_{s_1}^{s_2} H_z ds. \quad (12)$$

通常都假設這種形式上的更換不至於過分改變中曲面上法應力和剪應力的分佈。

總結上面的假設，我們得到：

開口截面桿件	閉合截面桿件
$N_z = 0$	$N_z = 0$
$G_z = 0$	$G_z = 0$
$\bar{M}_z = C\dot{\theta}$	$H_z = 0$

將 N_z 及 G_z 之值代入靜力學方程(7)中，使得：

$$\frac{\partial H_z}{\partial s} = 0,$$

亦即根據我們的假設， H_z 僅為坐標 z 之函數。通常都假設

$$H_z = 0.$$

對於開口截面的桿件，因為在壳体邊緣 $s = s_1$, $s = s_2$ 上 $H_z = 0$ ，所以上式是一個自然的結果；對於閉合截面的桿件，則 $H_z = 0$ 的假設相當於我們再假定 τ_{xz} 與坐標 n 無關——與 τ_{xy} 一樣。

當 $H_z = 0$ 時，靜力學的最後一個方程(8)就採取了剪內力成對定理的形式：

$$S_z = S_z.$$

因此我們在以後只寫 S 而不加下標

現將壳型桿件的平衡方程之最後形式寫在下面：

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial s} + p_z = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{N_s}{R} + p_s = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} - \frac{T_s}{R} + p_n = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial G_s}{\partial s} - N_s = 0. \quad (16)$$

在這四個方程裏面，對於開口截面桿件有六個未知數 (T_z , T_s , S , N_s , G_s , H_z)，而對於閉合截面桿件則有五個未知數 (T_z , T_s , S , N_s , G_s)。

由這個比較可以看出問題的超靜定次數已經減少；但即使如此，靜力學方程仍不足以求出全部未知函數，因此還必須考慮變形協調條件或利用變形假設。

§ 3. 稜柱形薄壁桿件平衡的積分方程

在建立薄壁桿件的理論時，應用平衡方程的積分式較之應用微分式 (13) — (16) 更為方便。如將中曲面單元沿直角坐標軸 x , y , z 方向之四個平衡方程沿全弧線 s 積分，則得：

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} T_z ds + q_z = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} S \frac{dx}{ds} ds + q_x = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{s_1}^{s_2} S \frac{dy}{ds} ds + q_y = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{M}_z + \int_{s_1}^{s_2} S r ds \right) + \dot{m}_z = 0. \quad (20)$$