陈材侃 编著

重庆出版社

计算流体力学

（川）新登字010号

责任编辑　张镇海
封面设计　徐赞兴
技术设计　刘黎东

陈材侃　编著
计算流体力学

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新华书店经销　重庆印制一厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张11.125 插页6 字数267千
1992年12月第一版　1992年12月第一版第一次印刷
印数：1—2,000
*
ISBN 7-5366-1888-3/O·17
科技新书目275—754

定价：8.20元

内容提要

本书全面介绍计算流体力学中的几类基本方法：有限差分、有限元、边界元和有限基本解方法，并充分讨论各种方法的理论基础及应用。书中引用作者近年来的一些研究成果，提出由差分算子变换求过渡矩阵的新方法和稳定性的二类六种定义。在稳定性讨论和有限元曲边单元等方面都有独到的新见。

本书内容丰富，概念清晰，深入浅出，易于自学。可供流体力学、计算数学、航空、船舶海洋工程、液压机械等专业师生、研究生及有关专业科技人员参考。

序　言

计算流体力学是当代迅速发展的一门新学科，它着重研究运用大容量高速数字电子计算机解决流体力学问题的各类数值方法。本世纪60年代以来，随着计算机的飞速发展和各种稳定、精确、快速算法的出现，计算流体力学逐渐形成一门独立的学科，显示出解决科学理论和工程实际问题的巨大潜力，目前在航空、造船、气象、海洋、水力、液压及石化等工程领域都有广泛应用。

流体力学这门古典学科可分为理论、实验和计算流体力学三个分支学科。理论流体力学的任务在于探讨流体运动的物理规律，建立描述规律的严密完备的连续介质数学模型，并在某些假定条件下寻求封闭形式的分析解。理论分析给出的流动图形结果清晰、普遍、有指导意义。但是控制流体运动的偏微分方程大多是非线性的，有时出现奇异性，因而只是在少数特殊情况下才能得到分析解。如果问题的物理性质或边界形状复杂，就求不出解析解。

实验流体力学建立在相似理论的基础上，主要研究实验方法、设施、仪器和数据处理等内容。各类低速、跨、超音速风洞，各类拖曳、空泡、操纵、循环水池，水工模型等一直是航空、造船及水利工程领域的重要实验设施。实验结果比较真实，是检验理论和计算的重要标准。但是实验耗资昂贵，实验条件受到许多限制，如模型尺度限制，洞壁、池壁边界影响，不能同时满足几个相似准则，有测量误差等。

计算流体力学以理论流体力学和计算数学为基础，是这二门学科的交叉学科。主要研究把描述流体运动的连续介质数学模型离散成大型代数方程组，建立可在计算机上求解的算法。广义而言，可从流动现象出发，直接建立满足流动规律的、适定的离散数值模型，而不必经由已有的流体力学偏微分方程组。但是，由于理论流体力学给出的数学模型十分成熟，我们仍以它们作为研究的基础。通过时、空离散化，把连续的时间离散成间断有限的时间，把连续介质离散成间断有限的空间模型，从而把偏微分方程转变成有限的代数方程。因此，数值方法的实质就是离散化和代数化，离散化——把无限信息系统变成有限信息系统；代数化——把偏微分方程变成代数方程。而离散的数值解一般可用两种形式给出：网格点上的近似值，如差分法；单元中易于计算的近似表达式，如有限元、边界元法。

一般来说，物理现象可用偏微分方程、积分方程和变分问题来描述。求解它们的主要数值方法可分为有限差分、有限元、边界元和有限基本解方法等。图0—1给出了数值方法的主要分类，它概括了本书要介绍的内容。差分法特别适于求解非定常问题（抛物型、双曲型），但不善于表现复杂的曲线边界。如果采用微分方程定解的网格设计技术，那么网格计算本身就是椭圆型方程定解问题。更甚之，边界是可变动的，则每一时步都得算边值问题，计算量很大。有限元、边界元法首先是在固体力学中发展起来的，而后才移植于流体力学中，所以它们用于流体力学计算的历史比差分法要晚。这两种方法适于求解有复杂边界的定常问题（椭圆型）。求解非定常方程时由于每一时步都要解大型代数方程组，一般运算工作量大于有限差分法。但它们在处理复杂的曲线边界时十分灵活方便，求解步骤规范化，易于编制通用程序。有限基本解方法更适于求解有无穷远边界的绕流问题。而其它方法处理无穷远边界时会带来截断误差。边界元法也适于求解

外部绕流问题而不会造成截断误差。

早期，数值方法在弹道学、天体力学和原子能研究中有非常成功的运用。现代，计算机可完成所有宇航轨道计算，而不需进行实验。有限元法用于飞行器结构设计，使得精度不断提高，选取的安全系数逐渐降低，从而更好地解决了飞行器设计中极为突出的一对矛盾——强度与重量的矛盾。流体力学问题比以上问题更复杂。从数学上讲偏微分方程是非线性的，有时含有奇异性，有的方程是非标准型的；从物理上讲流动既包含着迁移、扩散、波动、突跃和平衡等基本物理现象，也包含着空泡、激波、碎波和湍流等特殊的甚至机理尚不清楚的现象。即便如此，经过计算流体力学工作者的长期努力，已经取得了许多重要的进展，创立了许多理论和方法。目前，已发展了任意三维物体的无升力或有升力理想绕流的计算方法，能成功地计算机身—机翼组合体的流场和载荷，同样也可以计算船舶的无分离流场。对于粘性紊流，当前通常采用求解平均Navier—Stokes方程和适当的紊流模型的方法。采用最先进的超级电子计算机直接求解三维N—S方程，已可计算紊流中的大尺度运动，但对小于差分网格的小尺度紊流还需采用半经验的紊流模型。

数值方法可以容易地改变计算条件，研究复杂初边值条件下的流动现象，具有灵活、经济、限制较少的优点，同时也有它本身的困难和局限性。目前尚无成熟的非线性偏微分方程数值方法的数学理论，没有严格的稳定性分析、误差估计和收敛性证明的方法，有时甚至解的存在性和唯一性都是有疑问的，而流体力学中大多是这种难以处理的非线性问题。离散化不仅改变了方程解的精度，而且也改变其性质，引进数值粘性和数值弥散等虚假的物理现象。数值方法只能分辨相对于网格尺度而言的长波现象。为提高分辨率而减小网格，又受到计算机容量、速度的限制。另外，数值方法只能给出离散数据或单元近似函数，不能提供任何

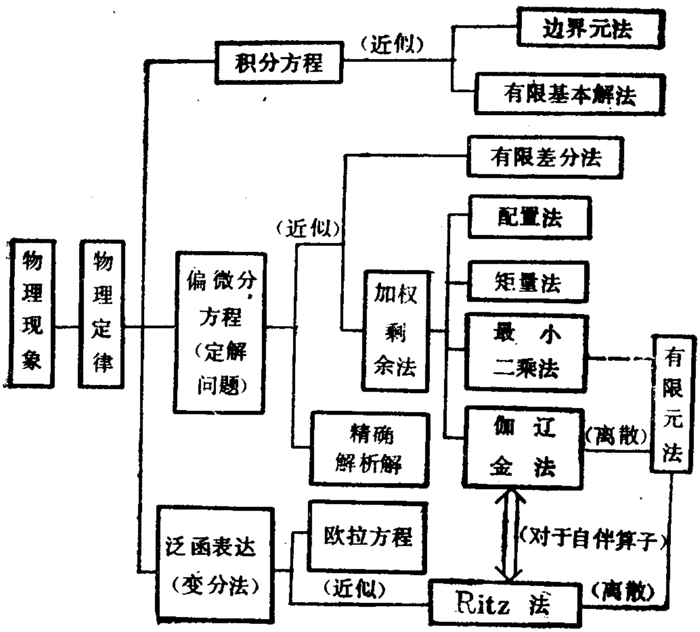
有物理意义的函数关系，因而不能代替解析结果。数值计算的反复调试过程更类似于物理实验而不是理论分析，因此类比于物理模拟，我们称数值计算为数值模拟。随着计算机技术的发展及对流动现象物理本质的深入了解，今后一定能够建立更好的方法，解决越来越多的理论研究和工程设计问题。计算流体力学为研究流体运动提供了新的途径和广阔前景。

自1981年以来，作者一直为华中理工大学船舶海洋工程水动力学专业的硕士、博士研究生教授计算流体力学。结合十年的教学经验和科研成果写成此书。希望本书能简洁全面地介绍几类基本方法；充分注重各类方法的理论基础；举例说明方法在流体力学中的应用。同时作者在本书中提出了一些新的见解：用差分算子变换求过渡矩阵的新方法。首先定义了平移算子的富利叶积分变换，接着证明过渡矩阵等于差分算子的变换，然后将这种方法推广到显式、隐式、多层格式和差分方程组等普遍的情况。而且在差分部分的论述中都采用了这种简便灵活的方法。归纳出二类六种互相等价的稳定性定义，深入地分析了差分方程的误差、稳定性和收敛性。把有限元法的等参元概念推广到曲边单元，讨论了曲边三角形单元和曲边四边形单元等。书中还引用了作者近年来的一些科研成果。作者把这些新的材料提供给读者，希望能对读者有所启示。由于作者的水平所限，若有不妥之处，亦望指正批评。

本书的出版得到钱伟长教授的热情关怀和支持，作者在此表示衷心感谢，同时重庆出版社从出版基金中拨款资助，使得本书得以问世，作者对该社及各位致以真诚的谢意。

陈材侃

1991年夏，于华中理工大学



物理现象
物理定律
积分方程
（近似）
边界元法
有限基本解法
偏微分方程（定解问题）
（近似）
有限差分法
配置法
矩量法
加权剩余法
最小二乘法
伽辽金法
有限元法
（离散）
精确解析解
泛函表达（变分法）
欧拉方程
（对于自伴算子）
（近似）
Ritz 法
（离散）

图0—1 数值方法分类

目　　录

第一编　有限差分法

第二编　有限元法

第三编　边界积分方程法

第一编 有限差分法

流体力学问题常常用偏微分方程表示，因此可直接把偏微分方程组转变成代数方程组，求近似数值解。有限差分法通过用差商代替微商，用差分方程逼近微分方程，并根据原问题的初边值条件合理地给出离散化代数方程的初边值条件，从而实现离散化、代数化这一过程。

第一章 差分格式构造方法

构造差分方程的方法是多种多样的。对应于一个偏微分方程，可以建立各不相同的差分方程，它们的解都是原偏微分方程的近似解，也可以用不同的方法得到相同的差分方程。本章以一维平流方程为例，介绍几种常用的差分方程构造方法。

§1 泰劳级数展开法

考虑双曲型一维平流方程及初值条件

$$\begin{cases} u_t+au_x=0,\ t>0,\ -\infty<x<\infty & (1\text{-}1a) \\ u(x,\ 0)=f(x) & (1\text{-}1b) \end{cases}$$

问题求解域为x—t的上半平面。在上半平面上画出两族平行于坐标轴的直线，把求解域分成矩形网格。网格线的交点称为节点，x方向上网格线之间的距离Δx称为空间步长，t轴方向上网

格线之间的距离Δt称为时间步长，见图1-1。这样两族网格线可记为

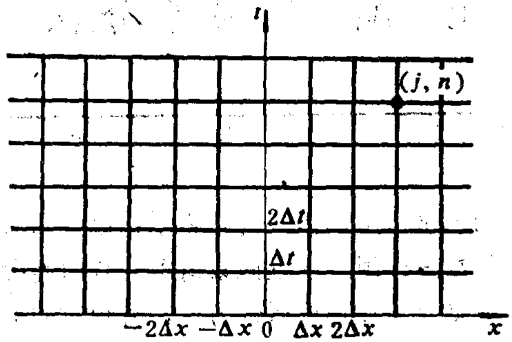


图1-1　网格剖分

$$x=x_j=j\Delta x,\qquad j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$
$$t=t_n=n\Delta t,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

网格节点$(x_j,\ t_n)$简记为$(j,\ n)$，则节点处的函数值可记为

$$u_j^n=u(x_j,\ t_n)=u(j\Delta x,\ n\Delta t)$$

为求出偏导数的各种基本差分表达，首先对空间坐标将函数u作如下泰劳级数展开

$$u_{j+1}^n=u(x_j+\Delta x,\ t_n)=u_j^n+(u_x')_j^n\Delta x+\frac{1}{2}(u_x'')_j^n\Delta x^2+\frac{1}{6}(u_x''')_j^n\Delta x^3+O(\Delta x^4)\qquad(1\text{-}2)$$

$$u_{j-1}^n=u(x_j-\Delta x,\ t_n)=u_j^n-(u_x')_j^n\Delta x+\frac{1}{2}(u_x'')_j^n\Delta x^2-\frac{1}{6}(u_x''')\Delta x^3+O(\Delta x^4)\qquad(1\text{-}3)$$

利用这两个展开式，可以导出偏导数的几种基本差分表达式。

（1）一阶中心差商

(1-2)式减去(1-3)式，然后等式两边除以$2\Delta x$：

$$\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}=(u_{x}')_{j}^{n}+\frac{1}{6}(u_{x}''')_{j}^{n}\Delta x^{2}+O(\Delta x^{3})$$

由此可得

$$(u_{x}')_{j}^{n}\cong\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}+O(\Delta x^{2}) \tag{1-4}$$

(1-4)式称为一阶偏导的一阶中心差商表达。它具有Δx^{2}阶的截断误差，记为$R=O(\Delta x^{2})$，或说具有二阶精度。当Δx趋于零时，截断误差R也趋于零，因此说差商与微商是相容的。

（2） 一阶向前差商

(1-2)式两边同时减去u_{j}^{n}，然后等式两边同除以Δx，整理得到

$$(u_{x}')_{j}^{n}=\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j}^{n}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{1-5}$$

一阶向前差商具有一阶精度，$R=O(\Delta x)$，它与微商也是相容的。

（3） 一阶向后差商

同一阶向前差商的推导方法一样，从(1-3)式得到

$$(u_{x}')_{j}^{n}=\frac{u_{j}^{n}-u_{j-1}^{n}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{1-6}$$

一阶向后差商具有一阶精度。

（4） 二阶中心差商

把(1-2)和(1-3)式相加，可以推出二阶偏导数的二阶中心差分表达

$$(u_{x}'')_{j}^{n}=\frac{u_{j+1}^{n}-2u_{j}^{n}+u_{j-1}^{n}}{\Delta x^{2}}+O(\Delta x^{2}) \tag{1-7}$$

它具有二阶精度，$R=O(\Delta x^{2})$，二阶中心差商与二阶偏导也是相容的。

同样可以导出对时间偏导数的有限差分表达。如对时间的一阶向前差分表达为

$$(u_t')_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{1-8}$$

其截断误差为$R=O(\Delta t)$。

有了以上的差商公式，就可以用差商代替偏微分方程(1-1a)中的微商，构成逼近偏微分方程的差分方程。差分方程加上离散化的初始条件就得到差分格式。当用一阶向前差商逼近时导数，分别选用三种不同的空间一阶差商来逼近空间偏导数时，对于定解问题(1-1)式可以构成三种差分格式。

(1) 中心差分格式

用一阶中心差商逼近空间偏导，把(1-4)和(1-8)式代入(1-1a)式得到差分方程。把初值条件(1-1b)式写成离散的初值条件，即得中心差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ u_j^0 = f(x_j) \end{cases}$$

写成便于计算的格式

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ u_j^0 = f(x_j) \end{cases} \tag{1-9}$$

格式截断误差$R=O(\Delta t, \Delta x^2)$，差分方程中用到$n+1$时间层上的一个节点和$n$层上的三个节点。差分方程中用到的时空层上的格点称做差分星座。中心差分格式的差分星座如图1-2(a)所示。$\lambda=\Delta t/\Delta x$称为网格比。

(2) 向前差分格式(右偏)

用一阶向前差商逼近空间偏导，并写成便于计算的形式

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ u_j^0 = f(x_j) \end{cases} \tag{1-10}$$