

岩波講座 基礎工学 5

数理計画法Ⅱ

関根泰次 著

岩波書店



71.21
6.11
6-2

岩波講座 基礎工学 5

数 理 計 画 法

II

関 根 泰 次

36-153



岩波講座 基礎工学 5 数理計画法 II

(全19巻／第6回配布)

1968年6月26日 第1刷発行 ©

東京都千代田区神田一ツ橋2-3 株式会社 岩波書店／精興社印刷・松居社製本

目 次

はじめに

第1章 計画問題と最適化手法

1.1 計画問題と目的関数および制約条件	1
1.2 凸 極 性	4
1.3 凸計画法と非凸計画法	7
1.4 計画問題の分類	9

第2章 線形計画法

2.1 線形計画問題	11
2.2 線形計画法の応用	15
2.3 線形制約条件式の性質	18
2.4 最適解の決定法	34
2.5 双 対 性	61

第3章 特殊線形計画

3.1 線形計画とその変形問題	81
3.2 輸 送 問 題	82
3.3 ネットワーク・フロー	98
3.4 感 度 解 析	107
3.5 変数上下限の処理	127
3.6 整数解計画法	139
3.7 分 解 原 理	152
3.8 一般線形計画	163

第4章 非線形計画

4.1 非線形計画法と線形近似	169
4.2 ラグランジュの未定乗数法とクーン・タッカーの最適基準	173
4.3 2 次 計 画 法	182

4.4 最大傾斜法	193
-----------	-----

第5章 動的計画法

5.1 多段決定問題と動的計画法	205
5.2 関数方程式	207
5.3 多変数最適化問題	214
5.4 確率的多段決定問題	219
5.5 動的計画法の限界	223
さらに勉強するために	229

表紙カット製作：渡辺茂・榎屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

3.5 変数上下限の処理

a) 変数の上下限

線形計画の問題によっては変数のとりうる範囲に上下限の制約がつけられるものが少なくない。この場合でも通常のシンプレックス法で解き得ることはいうまでもないが、このような変数の数が多い時はいたずらに問題の規模を大きくし、計算時間を長びかせるので、計算技術上このような単純な方法は必ずしも得策ではない。

ところで変数の下限については、下限値を L_j とする時

$$x_j \geq L_j$$

なる関係は、新変数 x_j を用いて

$$x_j = x'_j + L_j$$

とおけば

$$x'_j \geq 0$$

となりふつうの非負条件に帰着できるので問題はない。

しかし、上限 U_j については

$$x_j = U_j - x'_j \quad (3.60)$$

とおいても、再び x'_j が

$$0 \leq x'_j \leq U_j$$

になってしまうので、本質的な解決にならない。

以上の考察により、われわれが注目せねばならないのはその上限値の取扱い方であることがわかる。

変数の中には上限値のあるものとないものがあるが取扱いの便宜上、すべての変数に上限があるものとして差支えない。これはいうまでもなく上限のないものに対しては $U_j = \infty$ かもしくは十分大きな U_j を割りあてておけばよいからである。そこでわれわれの問題は次のように書き表わすことができる。

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.61)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.62)$$

$$x_j \leq U_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

のもとで

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (3.64)$$

をもとめること。

(3.63)は新たに導入された制約条件式であるが、これを加えた(3.61)~(3.64)の線形計画を**拡張線形計画**と名付け(3.63)の条件を含まない原線形計画と区別することにする。

われわれの目的は拡張線形計画をそのまま取り扱わずに、もとの線形計画を解く過程で(3.63)の上限制約条件式を考慮にとっていくことにある。そのため上の二つの線形計画すなわち原線形計画と拡張線形計画の性質について次節で調べてみることにしよう。

b) 上限付き線形計画の性質

まず、上限付き拡張線形計画の基底解の性質についてしらべよう。

拡張線形計画の制約条件式の数は(3.61), (3.63)をふくめて全部で $m+n$ であり、変数の数は(3.61)のスラック変数を含めて $2n$ である。したがって基底変数の数は(退化はおきていないとして) $(m+n)$ 個となるが、これは大きくわけて次の三つに分類される。

- (1) 変数 x_j およびそのスラック変数 x_j' が共に基底変数になっている場合。
- (2) x_j は基底に入っているが x_j' は非基底となっている場合。
- (3) x_j は基底に入っていないが x_j' が基底に入っている場合。

(3.60)の関係をみれば、 x_j と x_j' の間には、上の三つの場合以外の関係は存在しないことは明らかである。

さて上の(1)に属する x_j の数を N とすれば(2), (3)に属する x_j の数は $n-N$ となるが、(1)に属する各々の x_j に対しては x_j' が基底に入り、(2), (3)に属する変数は、 x_j または x_j' の中の一方向のみが基底に入るから、基底変数の総数は $2N+(n-N)=N+n$ となる。しかるに基底変数の総数は $m+n$ に等しいから、 $N=m$ でなければならない。いいかえれば x_j も x_j' もともに基底となる変数すなわち0と上限 U_j の間に存在する変数の数はちょうど m 個で、残りの変数はすべて0かもしくは上限 U_j に一致している。

そこで(1)に属する基底変数 x_j を $x_1, x_2, \dots, x_m$, (2)に属する基底変数を

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_l, x_f$ の残りの変数を非基底変数とすれば, 次のような結果が得られる.

$$\left. \begin{array}{ll} 0 < x_1 < U_1, & 0 < x_1' = U_1 - x_1 < U_1 \\ 0 < x_2 < U_2, & 0 < x_2' = U_2 - x_2 < U_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 < x_m < U_m, & 0 < x_m' = U_m - x_m < U_m \\ x_{m+1} = U_{m+1}, & x_{m+1}' = 0 \\ x_{m+2} = U_{m+2}, & x_{m+2}' = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_l = U_l, & x_l' = 0 \\ x_{l+1} = 0, & x_{l+1}' = U_{l+1} \\ x_{l+2} = 0, & x_{l+2}' = U_{l+2} \\ \vdots & \vdots \\ x_n = 0, & x_n' = U_n \end{array} \right\} l < n \quad (3.65)$$

さて上の基底解に対して原線形計画(3.61), (3.62), (3.64)(これにはスラック変数 x_f' は含まれていないことに注意)を標準形式に書き直してみると次のようになる.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \quad + a_{1,m+1}' x_{m+1} + \dots + a_{1,l}' x_l + a_{1,l+1}' x_{l+1} + \dots + a_{1,n}' x_n = b_1' \\ x_2 \quad + a_{2,m+1}' x_{m+1} + \dots + a_{2,l}' x_l + a_{2,l+1}' x_{l+1} + \dots + a_{2,n}' x_n = b_2' \\ \dots\dots\dots \\ x_m + a_{m,m+1}' x_{m+1} + \dots + a_{m,l}' x_l + a_{m,l+1}' x_{l+1} + \dots + a_{m,n}' x_n = b_m' \end{array} \right\} \quad (3.66)$$

$$c_{m+1}' x_{m+1} + \dots + c_l' x_l + c_{l+1}' x_{l+1} + \dots + c_n' x_n = z - z_0$$

ただし, いまの場合拡張線形計画の端点(3.65)に対しては上の標準形式で $x_1, x_2, \dots, x_m$ の値は必ずしも $b_1', b_2', \dots, b_m'$ にひとしくはなく, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} x_i &= b_i' - \sum_{j=m+1}^n a_{ij}' x_j \\ &= b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.67)$$

したがって

$$0 \leq b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j \leq U_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.68)$$

ならば, (3.67)は可能解となる. (3.68)の条件が満たされる時は, 拡張線形計画の可能基底解は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j \geq 0, & i &= 1, 2, \dots, m \\ x_{m+p} &= U_{m+p}, & p &= 1, 2, \dots, l-m \\ x_{l+q} &= 0, & q &= 1, 2, \dots, n-l \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

((3.69)で変数の数を考えると x_i ($i=1, 2, \dots, m$) のスラック変数を考慮にとって $2m + (l-m) + (n-l) = m+n$ となり, 前にのべたことと一致する.) またこの場合の目的関数の値は

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^l c_j' U_j$$

で与えられる.

さて(3.69)は拡張された線形計画の可能基底解, すなわち, (3.61)~(3.63)で与えられる制約領域の端点をあらわしているが, これは(3.66)の原線形計画領域の端点とはならず, 一般にこの多面体領域の内部の点か, または多面体領域の表面上の(端点以外の)一点をあらわしている.

c) 最適性の条件

さて(3.66)の標準形式をみでみると, (3.69)が拡張線形計画の最適解であるためには(3.69)の基底解 $x_{m+1}, \dots, x_l$ の係数 $c_{m+1}', \dots, c_l'$ が非正, 非基底解 $x_{l+1}, \dots, x_n$ の係数 $c_{l+1}', \dots, c_n'$ が非負なることが必要かつ十分である. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} c_{m+p}' &\leq 0, & p &= 1, 2, \dots, l-m \\ c_{l+q}' &\geq 0, & q &= 1, 2, \dots, n-l \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

これは(3.70)の条件が満たされていれば x_{m+p} が U_{m+p} より小さくなる場合, もしくは, x_{l+q} が正になる場合は必ず(3.66)の目的関数 z の値が z_0 より大きくなるためである.

(3.70)の条件が満たされていない時は, この条件を破る変数を(3.69)から変更せねばならないわけであるが, いままでと同じく(3.70)の条件からもっと

も大きくはずれたものを選ぶことになる。すなわち

$$c_s' = \max(c_{m+1}', c_{m+2}', \dots, c_l', -c_{l+1}', -c_{l+2}', \dots, -c_n')$$

なる c_s' をもとめこれに対する x_s を基底変数に入れればよい。

d) 基底変数の変更

まず本節 b) 項にあげた三つの分類のうちの (1) に属する変数すなわち x_{l+1} , $\dots, x_n$ の中の一つを基底変数に入れるべき場合を考えてみよう。われわれとしてはいままでの基底変数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ の中で基底変数から除くべきものを定めなければならない。

まず新しく導入された基底変数 x_s のとるべき値について考えてみると (3.66) から

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j - a_{is}' x_s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

となるが

$$x_{i_0} = b_{i_0}' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

とおけば (x_{i_0} は基底をかえる前の基底変数の値で $x_{i_0} > 0$)

$$x_i = x_{i_0} - a_{is}' x_s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

となる。しかるに、 x_i は 0 と U_i の間に存在しなければならないから、

$$x_{i_0} - a_{is}' x_s \geq 0 \quad (3.71)$$

$$x_{i_0} - a_{is}' x_s \leq U_i \quad (3.72)$$

でなければならない。(3.71) については

$$x_s \leq \min_{a_{is}' > 0} \frac{x_{i_0}}{a_{is}'} = \frac{x_{r_{10}}}{a_{r_{1s}}'} \quad (3.73)$$

(3.72) については

$$x_s \leq \min_{a_{is}' < 0} \frac{U_i - x_{i_0}}{-a_{is}'} = \frac{U_{r_2} - x_{r_{20}}}{|a_{r_{2s}}'|} \quad (3.74)$$

また

$$x_s \leq U_s \quad (3.75)$$

しかるに x_s は (3.73) ~ (3.75) の範囲でできるだけ大きくえらびたいわけであるから、 x_s は次のようにえらばよい。

$$x_s = \min \left(\frac{x_{r_1 s}}{a_{r_1 s}'}, \frac{U_{r_2} - x_{r_2 s}}{|a_{r_2 s}'|}, U_s \right) \quad (3.76)$$

さて(3.76)で括弧内のはじめの値がえらばれた場合には(3.71)から x_{r_1} が0になるので, この x_{r_1} を非基底変数に入れるべきことがわかる. また括弧内の2番目の値がえらばれた時は $x_{r_2} = U_{r_2}$ になるので x_{r_2} を(3.66)の基底からはずして(1)グループから(2)グループにうつすことになる. また(3.76)で括弧内の3番目の値がえらばれたときは(3.66)の基底変数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ は変化せず, x_s が(1)グループから(2)グループにうつるのみである.

以上の基底変数の変更は通常の方法で行なわれる.

次に(2)に属する変数 $x_{m+1}, \dots, x_l$ の中の一つを基底変数に入れる場合について考えてみる.

前と同じようにして(3.66)から

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j - a_{is}' x_s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(ただし $\sum'$ は $j=s$ については除くことを表わす)

いま

$$\bar{x}_{i_0} = b_i' - \sum_{j=m+1}^l a_{ij}' U_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

とおけば

$$x_i = \bar{x}_{i_0} - a_{is}' x_s, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.77)$$

となるが, 上式において $x_s = U_s$ とおけばこの x_i は(3.66)の基底解となる. x_s に対する目的関数の係数 c_s' は正すなわち $c_s' > 0$ であるから, x_s はできるだけ小さくすることがのぞましい.

$a_{is}' > 0$ の時は x_s を減少させれば x_i は増加するが, x_i は U_i をこえることは許されないから

$$\bar{x}_{i_0} - a_{is}' x_s \leq U_i$$

すなわち

$$x_s \geq \max_{a_{is}' > 0} \frac{\bar{x}_{i_0} - U_i}{a_{is}'} = \frac{\bar{x}_{r_1 s} - U_{r_1}}{a_{r_1 s}'}$$

でなければならない.

また $a_{is}' < 0$ の時は (3.77) の x_s を減らすことは x_i が減少することを意味するので、 x_s の限度は

$$\bar{x}_{is} - a_{is}' x_s \geq 0$$

すなわち

$$x_s \geq \max_{a_{is}' < 0} \frac{\bar{x}_{is}}{a_{is}'} = \frac{\bar{x}_{rs}}{-|a_{rs}'|}$$

でなければならない。さらに

$$x_s \geq 0$$

なる条件を考えれば x_s をできるだけ小さくするという立場からして x_s の値は次のようにえらぶべきである。

$$x_s = \max \left(\frac{\bar{x}_{rs} - U_{rs}}{a_{rs}'}, \frac{-\bar{x}_{rs}}{|a_{rs}'|}, 0 \right) \quad (3.78)$$

(3.78) の括弧内の最初の項がえられた時は x_{rs} が U_{rs} にひとしくなるので x_{rs} のスラック変数が非基底解になり、 x_{rs} は (1) グループから (2) グループに属することになる。もちろん x_{r1} は (3.66) で非基底変数に入る。

括弧内の第2項がえられる時は x_{rs} が 0 となるので、この変数は (1) グループから (3) グループに変化し、(3.66) の非基底解となる。

括弧内の第3項がえられる時は $x_s = 0$ は依然として (3.66) の非基底解で (3) グループから (2) グループに変化するのみである。もちろんこのときは (3.66) の基底変数に変化はない。

例 3.6 いままでにたびたび用いた例

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & & = 7 \\ x_1 - x_2 & + x_4 & = 4 \\ x_1 + 3x_2 & & - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 & & - x_6 = 4 \end{array} \right\}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

で

$$x_1 \leq 1$$

なる制約を付け加えてみよう。

まず出発点として、基底変数を x_2, x_4, x_5, x_6 として上式を標準形式に書けば

次のようになる。

$$\left. \begin{array}{rcl} x_2 & + x_1 + x_3 & = 7 \\ x_4 & + 2x_1 + x_3 & = 11 \\ x_5 & + 2x_1 + 3x_3 & = 15 \\ x_6 - x_1 + x_3 & = 3 \end{array} \right\}$$

$$x_1 - 2x_3 = z - 14$$

さて上式で z を小にするには x_1 をできるだけ小さく ($x_1=0$), x_3 をできるだけ大きくすればよいが x_3 は上限がないのでこの値を十分大きくすると x_2, x_4, x_5, x_6 の基底解が負になってしまう。そこで x_3 のとりうる最大の値は

$$x_3 = \min\left(\frac{7}{1}, \frac{11}{1}, \frac{15}{3}, \frac{3}{1}\right) = 3$$

である。この場合 x_3 を基底に入れると同時に x_6 を非基底にしなければならない。これを行なえば

$$\left. \begin{array}{rcl} x_2 & + 2x_1 - x_6 & = 4 \\ x_4 & + 3x_1 - x_6 & = 8 \\ x_5 & + 5x_1 - 3x_6 & = 6 \\ x_3 - x_1 + x_6 & = 3 \end{array} \right\}$$

$$-x_1 + 2x_6 = z - 8$$

この式から z をできるだけ小さくするには x_6 を小に (したがって $x_6=0$), x_1 をできるだけ大きくすればよいが, x_2, x_4, x_5, x_3 が負にならないためには

$$x_1 = \min\left(\frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \frac{6}{5}, 1\right) = 1$$

となる。すなわち x_1 はその上限値 1 にひとしくしておけばよい。この場合 x_2, x_4, x_5, x_6 は (1) グループに, x_1 は (2) グループ, x_3 は (3) グループに属することになる。しかもこのとき目的関数 z の係数 $-1, 2$ は (3.70) の最適性の条件をみたしているのだから、最適解は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= 4 - 2x_1 = 2, & x_3 &= 3 + x_1 = 4 \\ x_4 &= 8 - 3x_1 = 5, & x_5 &= 6 - 5x_1 = 1, & x_6 &= 0 \\ z_{\min} &= 8 - x_1 = 7 \end{aligned}$$

この場合の最適解は図 3.42 で与えられる。

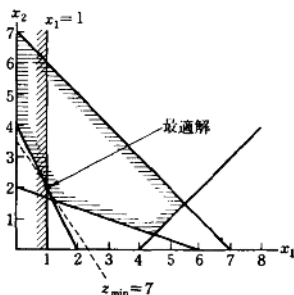


図 3.42 変数に上限のある場合

e) 上限付き輸送問題

2.2 節で扱った輸送問題ではわれわれは出発点 i から目的地 j に至る輸送路の輸送量 x_{ij} に上限がないものと仮定した。しかし、この種の制限が課せられることは実際問題としてきわめて自然なことであろう。また、一般のネットワーク・フローで輸送費用を最小にする流れのパターンを見出す問題が上限付きの(中継輸送を許す場合の)輸送問題に帰着できることもすでに知った通りである。

そこでこの項では、上限付き輸送問題について前項までの結果を応用してみよう。

まずわれわれの問題は、通常の輸送問題

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, & i &= 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, & j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0 \\ z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (3.80)$$

を解く際に

$$x_{ij} \leq U_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.81)$$

の制限を考慮にとりながら解いていくことにある。

この場合まず第一に問題になるのは、はたして上の問題に可能解が存在するか否かということである。容易に想像しうるように U_{ij} が次第に小さくなって

いけば上の条件を満たす解は存在しないであろう。このように輸送量に制限がない場合には必ず可能解が存在したのに反し、輸送量に制限のある時は可能解が必ずしも存在するとは限らないということは両者の間の大きな差である。ここではこの可能解を見出す問題は後にゆずるとして、出発点となる可能解が存在しなにかの方法でそれが見つかった場合に、いかにして最適解に到達するかという問題についてまず第一に考えてみることにしよう。

上限付き輸送問題に対して(3.70)に相当する最適条件を導いてみると(3.79)の各式に対するシンプレックス乗数を u_i, v_j として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &\geq u_i + v_j && \left\{ \begin{array}{l} (3.79), (3.80) \text{ の輸送問題} \\ \text{の非基底解のうち, その値が} \\ 0 \text{ となるものに対して} \end{array} \right\} \\ c_{ij} &\leq u_i + v_j && \left\{ \begin{array}{l} (3.79), (3.80) \text{ の輸送問題} \\ \text{の非基底解のうち, その値が} \\ U_{ij} \text{ に等しいものに対して} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

もしある可能解に対するシンプレックス乗数が(3.82)の条件を満たしていないならば、(3.82)の条件から最もはなはだしく外れた x_{ij} を基底解に入れる必要がある。この変数は現在0か U_{ij} かに等しくなっているはずであるが、これが0の場合(すなわち(3.82)のはじめの式が満たされていない時)はその変数を3.2節b)項と同じように θ と置けばよいし、後者の場合には U_{ij} から $U_{ij} - \theta$ と置き換えてやればよい。その後の操作、すなわち θ の値を具体的にいくらにえらぶかは、各変数が各々その上限値を越えない範囲でできるだけ大きな値にえらび、(3.82)の条件が満足するまでこれをくり返せばよい。

さて、以上の計算の出発点となる x_{ij} の可能解を見出すには、いろいろの方法が考えられるが、そのもっとも簡単な方法は3.3節c)項でのべたラベリング法を用いることである。すなわち図3.43のようなネットワークをつくり、各出発点と新しく設けた流入点 s 、および各目的地と新しく設けた流出点 t との間の弧の容量をそれぞれ a_i, b_j とし、この s と t の間の最大流量 F をもとめてみる。この F の値が

$$F = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.83)$$

にひとしければ、これが可能基底解となる(可能解だけでなく基底解にもなる

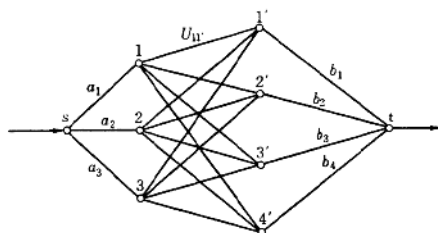


図 3.43 上限付き輸送問題

ことについては読者の考察にゆだねる). F の値が

$$F < \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

の場合には可能解は存在しないことになる.

例 3.7 図 3.44 の問題に対し, 各輸送路の容量 U_{ij} を図 3.45 のように定めて, 最小輸送コストを与える流れのパターンを求めてみよう.

まず, このネットワークの最大流量をもとめてみると図 3.46 のようになり

		消費地				
		1	2	3	4	
工場	1	3	4	2	0	7
	2	5	3	2	2	
	3	0	4	2	1	
		b_j				8

図 3.44 c_{ij} の表

		消費地			
		1	2	3	4
工場	1	4	3	2	0
	2	0	4	1	2
	3	2	0	6	4

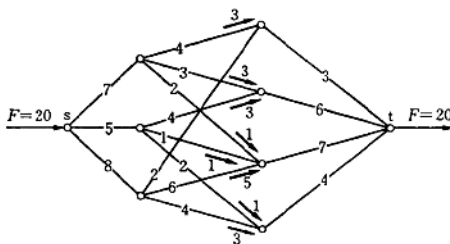
図 3.45 U_{ij} の表

図 3.46 最大流量のパターン

(3.83)の条件が満たされて可能基底解が存在することがわかる。この場合の流れのパターンは図3.47のようになる。図において各機目の左上隅に記したのは U_{ij} の値である。このパターンでは基底解は

$$x_{11} = 3, \quad x_{13} = 1, \quad x_{22} = 3, \quad x_{24} = 1, \quad x_{33} = 5, \quad x_{34} = 3$$

の六つであり、非基底解のうち、その上限値にあるものは

$$x_{12} = 3, \quad x_{23} = 1$$

の二つ、他はその値が0の非基底解である。そこで3.2節c)項と同じようにして、 u_i, v_j の値を定めると図3.48のようになる。図3.48で☆を付したのは上の基底解、*印は上限値にある非基底解である。この図から $c_{ij} - (u_i + v_j)$ を

	1	2	3	4	
1	4	3	2	0	7
		3	3	1	
2	0	4	1	2	5
			3	1	
3	2	0	6	4	8
			5	3	
	3	6	7	4	

図3.47 最大流量に対する可能基底解

$u_i \backslash v_j$	3	2	2	1
0	3*	2*	2*	1
1	4	3*	3*	2*
0	3	2	2*	1*

図3.48 u_i, v_j の決定

0	2*	0	-1*
1	0	-1	0
-3*	2	0	0

図3.49 $c_{ij} - (u_i + v_j)$ の決定

	1	2	3	4	
1	4	3	2	0	7
	$3-\theta$		3	$1+\theta$	
2	0	4	1	2	5
			3	1	
3	2	0	6	4	8
	θ		$5-\theta$	3	
	3	6	7	4	

図3.50 可能基底解の改善

	1	2	3	4	
1	4	3	2	0	7
		2	3	2	
2	0	4	1	2	5
			3	1	
3	2	0	6	4	8
		1		4	
				3	

図3.51 新しい可能基底解

$u_i \backslash v_j$	3	5	5	4
0	3*	5*	5*	4
-2	1	3*	3*	2*
-3	0*	2	2*	1*

図3.52 図3.51に対する u_i, v_j

0	-1	-3	-4*
4	0	-1	0
0	2	0	0

図3.53 $c_{ij} - (u_i + v_j)$ の表