数 值 积 分 法

Philip J. Davis
Philip Rabinowitz 著
冯振兴 伍富良 译
张 延 昌 校

高等教育出版社

内容提要

本书是根据Philip J.Davis和 Philip Rabinowitz著《METHODS OF NUMERICAL INTEGRATION》译出的．全书共分六章：引论、有限区间上的近似积分、无穷区间上的近似积分、误差分析、二维与高维近似积分、自动积分等．书末附有五个附录．

本书提供了主要的数值积分方法，还在附录中给出了一些实用程序，并详尽地列出了参考书目和文献．

该书可供高等学校计算数学专业师生参考，也可供从事科学计算的科技工作者、工程技术人员参考．

数值积分法

Philip J. Davis
Philip Rabinowitz
冯振兴 伍富良 译
张延昌 校

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
二二〇七工厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 25 字数 570,000
1986 年 6 月第 1 版 1986 年 6 月第 1 次印刷
印数 00,001--4,550
书号 13010·01089 定价 4.80 元

前　言

积分理论及其应用，是数学上重要的中心课题之一．在应用上，人们常常要求算出具体数值，因此数值积分就成了数值分析的一个基本问题．在更为复杂的计算问题中，数值积分也常常是一个基本组成部分．

说来有点自相矛盾，数值积分是既简单而又特别困难．说它简单，是指它往往用极其简单的方法就能圆满地得出解答．说它困难则包括如下两个方面的意思：第一，它可能要耗费过多的计算时间，乃至在某些不顺利的情况下几乎无法求解；第二，数值积分可能把人们引到纯理论分析与应用分析中某些最深奥的部门．甚至可以说，数值积分不仅仅涉及分析领域，实际上还涉及数学的各个领域；正因为积分这一内容已经成效显著地深入到各个数学领域，各个数学领域也时而反过来为如何高效率地计算积分提供特殊的方法与独到的见解．数值积分问题也可说是无止境的：看来，单凭搜罗为数有限的数值积分技巧，还不能包医百病，倒是有一点小小的创造性或独到见解却可能对解决问题大有帮助．

本书提供了所有我们认为是主要的那些数值积分方法．作者尽可能将此书写成既对程序编制人员有实际用处，又对理论工作者有所促进．本书有些部分的推演或许涉及了一些较深奥的分析结果；不过，我们希望书中的大部分最终结果，在叙述方式上都能做到使只需具备微积分基础知识的读者都能接受．

在电子计算机的推动下，过去近三十年间在数值积分领域中已经显现出极高的生产率．可以毫不夸张地宣告：目前已有可能创办一种专门致力于这一学科内容的学术杂志．现已发表的著作所涉及的范围，已包括从精巧的计算机程序到主要是对分析工作者（古典分析与泛函分析）感兴趣的那些十分理论化的问题．在搜集和编纂本书的素材时，我们发觉自己的处境委实就象小说家 Tristram Shandy 那样：他为了写好一天的生活内容，却要花费一年功夫．

在此，我们要感谢许多位提出过宝贵意见的朋友与同事，尤其要感谢 Harvey Silverman 博士，他曾帮助我们准备有关快速 Fourier 变换的资料．

还要向 Weizmann 科学院表示谢意，因为该院在 1970 年春季学期授予 **P. J. Davis** 以 Weizmann 研究员资格．与此同时，还应感谢海军研究所持久的支持．

目 录

第一章　引　　论

1.1　为何要数值积分?

数值积分是研究如何求出一个积分的数值. 这一课题的起源可追溯到古代，其中一个突出的例子是希腊人用内接与外接正多边形推算出圆面积的方法. 这种方法与本书的基本思想完全一致，也正是此法使阿基米德得以求出 π 值的上界与下界. 若干世纪以来，尤其是十六世纪后，已提出了多种数值积分法①，其中包括积分学基本定理、无穷级数、函数关系式、微分方程及积分变换的使用等. 最后，就是本书中至为重要的一个内容，即近似积分法，亦即用被积函数值的一种线性组合②来逼近所求积分:

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots\cdots + w_n f(x_n),$$
$$-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty. \tag{1.1.1}$$

在(1.1.1)式中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个积分点③ 或横坐标，通常是取在积分区间内；而数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是相应于这些积分点的 n 个"权". 有时，(1.1.1)式右端还可能出现被积函数的导数. (1.1.1)式常称为近似积分法则. 对这类数值方法，也采用机械求积法或近似求积法等术语.

目前已经有许多相当通用而完善的方法可用来计算积分值，因此人们也许会问: 为何还要研究和利用象(1.1.1)式这类原始的近似方法呢?回答很简单: 在数学上看来已完善的方法，不见得就切实可行，即便行得通，真用起来仍可能不利. 例如，积分学基本定理所概括的求积方法

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1.1.2}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不定积分(反微商). 若该不定积分非常简单而又便于使用，(1.1.2)式当然提供了一个算起来最快的积分法. 但大家知道，积分过程往往导出新的超越函数. 如简单积分 $\int dx/x$ 即可引出对数函数，它已不是代数函数；而积分 $\int e^{-x^2}dx$ 则将引出一个无法用有限个代数运算、对数运算或指数运算组合表示的函数. 即使不定积分是一个初等函数，且不必花费太大功夫就可求出，也仍然可能过于复杂，以致人们在采用(1.1.2)式之前还得三思而行. 例如

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2} - x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2} + x} \right\}. \tag{1.1.3}$$

---

① 这方面的发展简史与较早的专业内容，可参阅 Moors, Runge 和 Willers 的著作.

② 偶而也有采用非线性组合的，比如用有理函数或 ε-算法作外推时就是这样.

③ 积分点也常称为结点——译者注.

[在本书前一版本中，(1.1.3)式排错了，这回才(可望)是正确的. 你若想在一个不定积分表中找出个把错误来——或者是数学上的错误，或者是印刷错误，或者是结论只适用于某些参数值，等等，这种可能性也许比你所设想的要大. 正因如此，Klerer 和 Grossman[1]曾经专门研究了八种十分流行的数学用表，发觉表中这类差错率几乎超过百分之五. 可是，当他们作为研究结果而用计算机重新编制出不定积分表时，他们的表格也还是免不了有纰漏.]

采用(1.1.3)这种"精确"表达式时，所需运算次数是个根本问题. 请大家注意：用(1.1.3)求解答时，需计算对数和反正切——而这只能算到一定的近似程度. 所以说，这类表面上是"精确"的方法，一旦化成数值方法，也就变成近似的了.

还可能遇到初等的不定积分式所固有的困难. 这包括不定型、歧义性(或称多值性)以及对不同的参数范围表达式也将不同，等等.

采用闭型积分计算式时，还可能遇到另一类更为微妙的困难. 试考虑积分 $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx$，并设要算出 $n=1,2,\cdots,20$ 时的积分值. 用分部积分得到一个递推公式 $I_n=1-nI_{n-1}$，由于 $I_0=1-e^{-1}$，故可依次算得 $I_1,I_2,\cdots$. 对积分作一分析可知 $0<I_{n+1}<I_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$；但开头十多个积分值虽说可计算得较好，往后却发现 n 值越大，振荡的幅度也越大. 只有比较熟悉数值分析方法，才能做到用好的算式去求得好的数字结果.

研究近似积分法则的最后一个原因是：在许多情况下，我们所面临的问题是要从实验数据求出积分，这时理论上的积分式就可能完全用不上了.

参考文献 Babuska, Prager and Vitasek [1]; Boas and Schoenfeld [1]; Gautschi [1]; Klerer and Grossman [1,2]; Moors [1,chap. 8]; Runge and Willers [1]; Squire[4].

1.2 用计算机作形式微分与积分

读者应当知道，现在已经有专为求不定积分而设计的计算机程序，若欲了解这方面的近著，可参阅 Moses 的文献[2]. 与其从数值分析的角度看这些程序，倒不如从人工智能与公式处理方面来看更加引人入胜. 有些量子力学问题业已在计算机上通过大量的符号操作得以解决；计算一个分子波形也许要作数千次积分，并用到成百个不同的公式. 据称这样做可得到非常精确的结果. 与此类似，有效域的多重积分也已使用 FORMAC 公式处理系统解决了.

最后，形式微分与牛顿法相结合，已被用来求解非线性方程组，且已用于求解微分方程组. 它还可能便于将近似积分应用于含有被积函数的高阶微商的那种公式.

参考文献 Fletcher and Reeves[1]; Juncosa[1]; Moore[1,2]; Moses[1,2]; Rall [2]; Schiff, Lifson, Pekeris and Rabinowitz [1]; Slagle [1]; Wactlar and Barnett [1].

1.3 数值积分及其在数学上的引人之处

尽管数值积分问题简单、方法实用(也许正因如此),纯数学家们对它还是极感兴趣. 约略回顾一下它的发展史即可看到,许多数学大师们都曾对这一领域作出过贡献;Archimedes, Kepler, Huygens, Newton, Euler, Gauss, Jacobi, Tschebyscheff, Markoff, Fejer, Polya, Szegö, Schoenberg 和 Soboleff 等就是其中的若干位.

在提出巧妙的课题与提供深刻的纯理论方法两方面,实践上都已有相当长的历史. 例如,在最近几年中,我们已运用等分布序列(它是 Diophantine 逼近论的一部分)作高维区域上的数值积分. 数论中的 Möbius 反演公式也已应用于 Fourier 系数的计算.

泛函分析方法已开始起作用,并可望有良好的前景. 数值积分在理论方面是有较深背景的,且已得到了广泛的发展. 不过本书在这方面将仅作浅短的探讨.

1.4 数值积分的局限性

熟练的程序编制人员应通晓各种处理积分的解析方法. 尽管在本书里讨论过多的解析方法会显得离题太远,但它们是十分重要的.在附录 1 中我们抄录了 M. Abramowitz 的一篇论文,它将对这些方面提供一个入门性的介绍. 程序编制人员还应知道: 大量积分的积分值已经制成表格;同时还应能考虑如何将要计算的积分化成已经有现成结果的形式.

正如我们看到的,当解析方法失效时,就采用数值积分. 只要合理使用并恰当控制,数值积分就能提供令人满意的解答. 但如果盲目地乱用——由于能设计出高级的计算机程序,使人们盲目采用——那末就可能导致严重失误.

只要可能,就要先对问题作分析,并化成恰当的形式再到计算机上运算. 要想使所得结果可靠,就需作分析. 而如果经过分析可以尽早找到能节省计算时间的计算方案,那么这种分析也是有价值的. 一种好想法可能抵得上成百小时的计算机时间①.

在各章节的例题中,我们将试图指明数值积分中所碰到的某些困难.

参考文献 Chai and Wertz [1].

1.4.5 关于数学用表和程序的使用

象 Gamma 函数(Γ 函数)等一些基本积分的数值表可以在 NBS(美国国家标准局) 的数学函数手册中查到. 有不少精心编制的定积分和不定积分表可供查阅,其中包括 Ryshik 和 Gradstein, Gröbner 和 Hofreiter, 以及 Erdélyi 等, Fletcher, Miller, Rosenhead, 以及 Comrie 编著的积分表.NBS 手册及其他积分表还常常收有关于如何加速不同参数范围内积分计算的资料.

有一批著作提供了用多项式和有理函数来逼近某些基本积分的内容,其中包括 Hart 等的著

① 这方面的一个突出例子是现在称作快速 Fourier 变换算法(FFT)的发现,见 3.9.5 节.

作和 Luke 的著作.

在"Communications of the Association for Computing Machinery(计算机协会通讯,简称 CACM)中,时常有各种 ALGOL 和 FORTRAN 程序发表,这些程序收集在 Collected Algorithms from CACM(CACM 的算法集锦)中,并附有每种算法的论证与评价.而这本算法集锦也在定期更新.

IBM 系统/360 科学子程序包拥有近十个 FORTRAN 和 PL/I 语言程序,用来计算积分型特殊函数. Numerische Mathematik (数值数学) 手册丛书则是一本 ALGOL 程序的汇编总集.

参考文献 ACM [1]; Erdelyi 等[1,2]; Fletcher, Miller, Rosenhead and Comrie [1]; Gröbner and Hofreiter [1]; Hart 等[1]; IBM [2,3]; Luke [5,7]; NBS [1]; Ryshik and Gradstein [1].

1.5 黎曼(Riemann)积分

我们将只考虑黎曼可积函数.对单变量函数,这一概念可以阐述如下:设 $y=f(x)$ 是有限区间 $[a,b]$ 上的一个有界函数.用坐标点

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_n=b$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个子区间.令 ξ_i 为第 i 个子区间内的任意点: $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$,并取和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{1.5.1}$$

这种和式就称为黎曼和。用 Δ 表示最大子区间的长度: $\Delta=\max\limits_i(x_i-x_{i-1})$,再考虑形如(1.5.1)式那样的黎曼和序列 $S_1, S_2, \cdots\cdots$,其对应的最大子区间长度 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots$ 均趋近于零,即 $\lim\limits_{m\to\infty}\Delta_m=0$.如果对任意的这类序列和任选的 ξ_i 值,序列 $\{S_m\}$ 趋近于同一极限 S,就说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有黎曼积分 S:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.5.2}$$

一个有界函数 $f(x)$ 有黎曼积分的充要条件是 $f(x)$ 几乎处处连续.特别,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,它当然有黎曼积分.同样,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且除开有限个间断点之外均连续,那么它亦有黎曼积分.

下面是黎曼积分的基本性质.设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上有界并黎曼可积,则

$$\int_a^a f(x)\,dx=0, \tag{1.5.3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+h}^{b+h}f(x-h)\,dx, \tag{1.5.3.5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx, \tag{1.5.4}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx, \tag{1.5.5}$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1.5.6}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.5.7}$$

若在$[a,b]$上几乎处处有$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)dx. \tag{1.5.8}$$

特别是，若在$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.

若$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都递增或都递降，则

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\geqslant\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.5.8.5}$$

若$f(x)$和$g(x)$的类型互反(一个递增另一个递降)，那么上式的不等号应反过来。

若f是$[a,b]$上的有界黎曼可积函数，则$|f|$也有界黎曼可积，并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1.5.9}$$

Schwarz, Hölder 和 Minkowski 不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}. \tag{1.5.9a}$$

若$p>1$且$p^{-1}+q^{-1}=1$，则有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.5.9b}$$

若$p\geqslant 1$，则有

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{1.5.9c}$$

广义中值定理

令$f(x)$和$g(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上连续，且对于$a\leqslant x\leqslant b$, $g(x)\geqslant 0$，则存在一个ξ值$(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{1.5.10}$$

第一中值定理

令$f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上连续，则存在一个ξ值$(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi). \tag{1.5.11}$$

若对

$$a\leqslant x\leqslant b,$$
$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \tag{1.5.12}$$

则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a). \tag{1.5.13}$$

积分学基本定理

若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $F'(x)$ 在该区间上黎曼可积，则

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{1.5.14}$$

实际上，下列叙述就够了：若 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一不定积分，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{1.5.15}$$

分部积分

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b)-f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{1.5.16}$$

只要假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续可微就够了.

若将 $[a,b]$ 分成 n 等分，且 ξ_i 取各个子区间的右端点，便得到一个特殊的黎曼和:

$$S_n = h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh), \tag{1.5.17}$$

这里

$$h=(b-a)/n.$$

若 ξ_i 取成左端点，则得

$$S_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh). \tag{1.5.18}$$

参考文献 P. Franklin [1, p. 194]; Goldberg [1, 第 7 章]; Hobson [1, 第 6 章].

1.6 反常积分

若积分式中的被积函数或积分域无界，则这种积分就是大家熟知的*反常积分*（也称为非正常积分或广义积分——译者注）. 这类积分可定义成某种(正常)积分的极限.

1. $[0,\infty)$ 上的积分

定义

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r f(x)\,dx,$$

只要上式极限存在. 至于 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 和 $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ 的定义也类似.

2. $(-\infty,\infty)$ 上的积分

定义有两种.

定义 A

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx,$$

这是一般常用定义。

定义 B

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx,$$

这就是所谓哥西积分主值，常记作 $P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

只要上述两种极限均存在，定义 A 和定义 B 中的极限值就应当相等，但也可能在定义 A 中的极限不存在而定义 B 中的极限存在。

3. 无界被积函数

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上定义但在 $x=a$ 的邻域内无界。

定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to a^+}\int_{r}^{b} f(x)\,dx,$$

只要式中极限存在。

被积函数在上限的邻域中无界时，定义也类似。

设 $a<c<b$，且 $f(x)$ 在 $x=c$ 附近无界，这时积分的哥西主值 $P\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 由下列极限定义：

$$P\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+}\left[\int_{a}^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^{b} f(x)\,dx\right].$$

一种常用的主值积分是希尔伯特(Hilbert)变换：

$$g(x) = P\int_{a}^{b} \frac{f(t)}{t-x}\,dt,\ -\infty\leqslant a<b\leqslant\infty,\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.6.1}$$

希尔伯特变换存在的充分条件是 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上满足 Lipshitz 条件。这意味着存在常数 $k>0$ 和 $0<\alpha\leqslant 1$，使得对 $[a,b]$ 中任意两点 t_1 与 t_2 有

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant k|t_1-t_2|^{\alpha}. \tag{1.6.2}$$

1.6.5 Riemann-Stieltjes 积分

Riemann-Stieltjes 积分在数值运算中经常遇到，故我们对它作一简要的说明。

将区间 $[a,b]$ 作如下分划：

$$a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=b. \tag{1.6.5.1}$$

设有在 $[a,b]$ 上定义的函数 $f(x)$. 若存在一个常数 M 使得对所有分划均有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M, \tag{1.6.5.2}$$

则就说 f 在 $[a,b]$ 上是有界变差的。这类函数记作 $BV[a,b]$. 使(1.6.5.2)式对所有分划均成立的最小的值 M 称为 f 在 $[a,b]$ 上的变差，记作 $V(f)$ 或 $V_a^b(f)$.

一个函数，当且仅当它是两个有界的非减函数之差时，才属于 $BV[a,b]$ 类，有时就以此作为 BV 类函数的定义。注意，若 $f\in BV[a,b]$，则 f 在 $[a,t]$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 上的变差 $V_a^t(f)$ 是 t 的有界非

减函数，因此也属于 $BV[a,b]$类.

只要给定在$[a,b]$上定义的两个函数，再给定一组分划和一批点 ξ_k，$x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$，就可形成 Riemann-Stieltjes 和式:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1})). \tag{1.6.5.3}$$

若 $g(x)\equiv x$，它就变成寻常的 Riemann 和了. 与 1.5 节一样，取 $\Delta=\max\limits_k(x_k-x_{k-1})$，这是分划的范数. 考虑一个形如(1.6.5.3)的和式的序列 $S_1, S_2, \cdots$，在极限情况下其对应的分划范数趋近于零. 若对于任意的这类序列和任取的对应 ξ_k 值，序列$\{S_m\}$均有同一极限值 S，就说 $f(x)$具有关于求积函数(integrator function)$g(x)$的一个 Riemann-Stieltjes 积分，并记作

$$S=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{1.6.5.4}$$

Riemann-Stieltjes 积分存在的充分条件是 $f\in C[a,b]$，$g\in BV[a,b]$，反之亦然.

上述概念的一个推广是：若 $f\in C[a,b^*]$，$g\in BV[a,b^*]$，这里对每个 b^*都有 $a<b^*<b$，有$\lim\limits_{b^*\to b}\int_a^{b^*}|f(t)|dV_a^t(g)<\infty$，则称 f 是对 g 绝对可积的.

下面列出 Riemann-Stieltjes 积分的一些基本性质.

$$\int_a^b (c_1f_1+c_2f_2)dg=c_1\int_a^b f_1dg+c_2\int_a^b f_2dg; \tag{1.6.5.5}$$

$$\int_a^b fd(g+h)=\int_a^b fdg+\int_a^b fdh; \tag{1.6.5.6}$$

$$\int_a^b fdg=\int_a^c fdg+\int_c^b fdg, \qquad a<c<b. \tag{1.6.5.7}$$

若在$[a,b]$上 $f_1\leqslant f_2$ 且 g 在该区间上非减，则

$$\int_a^b f_1dg\leqslant\int_a^b f_2dg, \tag{1.6.5.8}$$

$$\left|\int_a^b fdg\right|\leqslant(\sup|f|)V_a^b(g). \tag{1.6.5.9}$$

若 $f\in C[a,b]$，$g\in C'[a,b]$，则

$$\int_a^b fdg=\int_a^b fg'\,dx. \tag{1.6.5.10}$$

上式右边的积分是一个普通的 Riemann 积分.

若 $w(t)\geqslant0$且$\int_a^b w(t)dt<\infty$，如果令 $g(x)=\int_a^x w(t)dt$，则 Riemann-Stieltjes 积分就简化为加权的 Riemann 积分:

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b w(x)f(x)dx. \tag{1.6.5.11}$$

作分部积分:

$$\int_a^b fdg=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b gdf. \tag{1.6.5.12}$$

若 $f\in C[a,b]$ 而 g 非减，则

$$\int_a^b f dg=f(\xi)\int_a^b dg,\text{其中 } a\leqslant\xi\leqslant b \tag{1.6.5.13}$$

(第一中值定理).

若 f 非减而 $g\in C[a,b]$，则

$$\int_a^b f dg=f(a)\int_a^\xi dg+f(b)\int_\xi^b dg,\quad a\leqslant\xi\leqslant b \tag{1.6.5.14}$$

(第二中值定理).

设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，再令 $g(x)$ 在 (t_{k-1},t_k) 中取常值 g_k，在 (a,b) 中的各个 t_k 点处 $g(x)$ 发生跳跃 $u_k=g_{k+1}-g_k$，在 a 点则也可以有跳跃 $u_0=g_1-g(a)$，而在 b 处则可以有跳跃 $u_n=g(b)-g_n$. 再设 $f(x)$ 在各个 t_k 点处连续，则

$$\int_a^b f dg=\sum_{k=0}^n u_k f(t_k). \tag{1.6.5.15}$$

参考文献 Smirnov (Смирнов) [1，五卷第一章].

1.7 高维 Riemann 积分

本节将给出二维 Riemann 积分的定义. 可很容易地推广到高维情形. 用 R 表示长方形区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$，将它的边界分划为：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$c=y_0<y_1\cdots<y_m=d$. 用 R_{ij} 表示子矩形区 $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$，$y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}$，并在每个 R_{ij} 中取一个点 p_{ij}. 假定 G 是将 R 分成矩形 R_{ij} 的一个网络，则用 $d(G)$ 表示 R_{ij} 的最大对角线长度. 现在便可作出如下定义.

二重积分 $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$ 存在并取值 I 的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$ 使得对任意的 $d(G)\leqslant\delta$ 的网络 G 和任意选取的点 p_{ij}，有

$$\left|I-\sum_{i,j}f(p_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{1.7.1}$$

和式 $\Sigma f(p_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ 称为二维的 Riemann 和.

若 $f(x,y)$ 在 R 上连续，则 $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$ 存在. 更为一般些，若 $f(x,y)$ 在 R 上除了一个面积为零的点集外均有界且连续，则积分存在.

如要处理非矩形有界区域 B 上的二重积分，可按下述思路去作. 取一个矩形域 R 包容 B，将 $f(x,y)$ 由 B 延拓到 R：当 $(x,y)\notin B$ 时，定义 $f(x,y)=0$. 最后，定义 $\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy$.

若 B 为平面上有面积的有界集①，且 $f(x,y)$ 在 B 上有界，在 B 的一切内点处连续，则 $\iint\limits_B f(x,y)$

① 有些二维点集没有面积，但这一细节对数值分析来说是无关紧要的.

$dx\,dy$ 存在，其值与所取的包含B的矩形域R无关.

下面是二重积分的基本性质. 设 $f(x,\ y)$ 和 $g(x,\ y)$ 在有面积的有界区域B上连续并有界，则

$$\iint_B dx\,dy = B\text{ 的面积}, \tag{1.7.2}$$

$$\iint_B f\,dx\,dy + \iint_B g\,dx\,dy = \iint_B (f+g)\,dx\,dy, \tag{1.7.3}$$

$$\iint_B cf\,dx\,dy = c\iint_B f\,dx\,dy, \tag{1.7.4}$$

$$\left|\iint_B f\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_B |f|\,dx\,dy. \tag{1.7.5}$$

若对一切$(x,y)\in B$，$f(x,y)\geqslant 0$，则

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0. \tag{1.7.6}$$

若 $B=B_1\cup B_2$，且 B_1 与 B_2 的公共部分仅有零面积，则

$$\iint_B f\,dx\,dy = \iint_{B_1} f\,dx\,dy + \iint_{B_2} f\,dx\,dy. \tag{1.7.7}$$

Fubini 定理

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.\end{aligned} \tag{1.7.8}$$

化成累次积分

设 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在$a\leqslant x\leqslant b$上连续，并设在该区间上 $\phi(x)\leqslant\psi(x)$，将 $x=a$，$x=b$，$y=\phi(x)$ 和 $y=\psi(x)$ 所围成的区域称为B. 则若 $f(x,y)$ 在 B 中连续，就有

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1.7.9}$$

中值定理

令B为一有界的开连通平面集，设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 均在B中连续、有界，并设在B中 $g(x,y)\geqslant 0$，则B中必有一个点(ξ,η)使得

$$\iint_B f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\iint_B g(x,y)\,dx\,dy. \tag{1.7.10}$$

高维区域上的哥西主值亦可照直定义. 设函数在 B 域中 P_0 点处是奇异的，而将圆盘(或球) $|P-P_0|\leqslant r$ 记作 C_r，将 B 域除去 C_r 后的区域 $B-C_r$ 记作 B_r，则规定

$$P\iint_B f\,dV = \lim_{r\to 0}\iint_{B_r} f\,dV. \tag{1.7.11}$$

这方面的详细内容可参考 Mikhlin 或 Tricomi 的原著.

参考文献 Buck [1,第三章]; Mikhlin[1]; Tricomi [1].

1.8 更一般的积分

熟悉 Lebesgue 积分一类更一般的积分理论的读者可看出，前面介绍的方法并不适用于计算这类积分. 我们现在要讨论的近似公式是:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \tag{1.8.1}$$

而在极限情况下(当 $n\to\infty$ 时),则可能呈如下形式:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n w_{in} f(x_{in}). \tag{1.8.2}$$

我们知道,这种公式对一切 Riemann 可积函数都是可行的. 例如,只要在上式右端用 Riemann 和就可以了. 于是,若函数 f 在一组 $\{x_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots)$ 处的值是任意变化的,而这组 $\{x_i\}$ 集的测度为零,那么积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 作为 Lebesgue 积分其值不变. 然而,(1.8.2)式右端的值却可变. 这意味着(1.8.2) 这种计算格式已不适用. 为了建立这种近似积分式的一种恰当的理论,人们必须利用象"矩" $\int_a^b x^n f(x)\,dx$ 或 Fourier 系数 $\int_a^b e^{inx} f(x)\,dx$ 这一类本身已经是所论函数积分的数充作基本数据.

另一方面，若 $w(x)$ 是固定的 Lebesgue 可积权函数，而 $f(x)$ 仅限于有界的 Riemann 可积函数，则公式 $\int_a^b w(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n w_{in} f(x_{in})$ 有意义,这里 w_{in} 与 f 无关.

1.9 函数的光滑度与近似积分

所有插值理论和逼近论中的一个普遍现象是: 用通用的办法算得的近似结果，其好坏程度跟所论函数的光滑度有关. 函数愈光滑,近似程度就愈好，且近似序列也收敛得愈快. 使"光滑程度"这个词含义更严密的概念包括连续性、连续可微的次数,函数的幅度,解析性以及在复平面上的解析范围.

按照光滑度由低至高的顺序排列,则有:

(a) 在区间$[a,b]$上 Riemann 可积的有界函数($R[a,b]$类).

(b) 在$[a,b]$上的有界变差函数($BV[a,b]$类).

(c) 在所论区间上分段连续的函数.

(d) 在$[a,b]$上连续的函数($C[a,b]$类).

(e) 在$[a,b]$上满足 α 阶($\alpha\leqslant 1$) Lipschitz 条件的函数($\mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$类).

(f) 在$[a,b]$上具有一阶连续导数的函数($C^1[a,b]$类或$C'[a,b]$类).

(g) 在$[a,b]$上有 n 阶连续导数的函数($C^n[a,b]$类).

(*h*) 在包含积分区间的某个 B 域上解析的函数($A(B)$类).

(*i*) 整函数,即在 $|z|<\infty$ 的范围内有收敛的 Taylor 展开.

(*j*) 次数$\leqslant n$ 的多项式函数($\mathscr{P}_n$ 类).

虽说逼近论还能很好利用其他几种函数类,但上面列出的函数类是本书所采用的基本函数类.

1.10 权 函 数

考虑形如$\int w(x)f(x)dx$ 的积分,往往要比考虑简单积分$\int f(x)dx$ 反而方便. 这里 $w(x)$ 通常(但不一定总是)设成在积分区间内非负,且在讨论过程中均认为是固定的函数,而 $f(x)$则是可变函数. 函数 $w(x)$ 称为权函数(简称权),且通常将它规格化,即

$$\int_a^b w(x)dx=1. \tag{1.10.1}$$

积分$\int_a^b w(x)f(x)dx$ 可以理解成 $f(x)$的一种加权平均.

本书假定被积函数 $w(x)f(x)$是 Riemann 可积的,可以是正常可积,也可以是反常可积. 同时,设

$$\int_a^b w(x)dx<\infty. \tag{1.10.2}$$

这个条件意味着我们只考虑可积的奇异性. 例如

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx,$$

其中 $f(x)$在零的邻域内有界.

1.11 一些有用的公式

下面列出另一些常用公式.

1. 简单区间上的变量置换

令 $g'(u)$为区间 $c\leqslant u\leqslant d$ 上的连续函数,并设 $g(c)=a, g(d)=b$. 设$f(x)$对 $c\leqslant u\leqslant d$的一切点 $x=g(u)$均连续,则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(u))g'(u)du. \tag{1.11.1}$$

变量置换可改善被积函数的连续性.

例 在积分 $I=\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$ 中,被积函数在 $x=0$ 处的导数是无穷大. 令 $x=u^2$,得 $I=2\int_0^1 u^2\sin u^2 du$,此时被积函数已没有奇点.

应当注意的是,还可能出现相反的情形(即变量置换后出现奇点).