误差理论与最小二乘法

〔苏〕 阿.依.马兹米什维里
王金庄 审校
吕福臣 刘光宗 译

煤 炭 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍了大地测量和统计观测成果的数学处理方法，阐述了概率论、误差理论和数理统计的基本知识与最小二乘法原理。论证了一维和多维空间内度量和统计的特征，根据观测值给出线性函数的估计。本课程的理论是根据向量-几何用线性代数的方法加以阐明，从而避免了烦琐的代数变换。用参数和联系数的方法整理测量数据，可以自由地设计出一些适用的数字表格，其中每一表格都描述一个几何模型。

本书为苏联高等学校矿山测量专业的教材，同时可供采矿企业的矿山测量工程技术人员参考。

书中有表格26张，插图24幅，参考文献42种。

责任编辑：吕代铭

А.И.Мазмишвили
ТЕОРИЯ ОШИБОК И МЕТОД
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ
Москва 《Недра》 1978

误差理论与最小二乘法
〔苏〕 阿.依.马兹米什维里
吕福臣 刘光宗 译
王金庄 审校

*

煤炭工业出版社 出版
（北京安定门外和平北路16号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本850×1168 1/32　　印张 10 5/8
字数 280 千字　　印数1—5,820
1984年10月第1版　　1984年10月第1次印刷
书号15035·2649　定价1.85元

前　言

莫斯科矿业学院的教学计划把《误差理论与最小二乘法》和《数理统计》合并为《测量与观测成果的数学处理》一门课程。在国内许多矿业高等学校和科、系里，教学计划仍规定这两门课程单独设课。本教材是根据这两门课程的大纲编写的。书中阐述了概率论、误差理论、最小二乘法和数理统计的基本理论，因而它可以供所有矿业高等学校矿山测量专业的学生使用。

为使课程观点统一，逻辑清楚，采用向量-几何解释的线性代数方法。用综合的简单运算代替烦琐的变换，把误差理论和数理统计纳入最小二乘法中，从而使教材明显地缩减了篇幅。

运用线性代数方法在平差元素权的计算及平差元素函数权的计算中，就没有必要采用不定系数理论。运用线性代数方法能够揭示间接观测和条件观测时待定参数的几何意义，可以简化实验数据处理过程，使之变为严格的数学表格——参数和联系数表格，在大地测量和矿山测量中所采用的传统的解线性方程组的高斯表格就是实例。

矿山测量工作必须经常处理越来越多的测量数据，这就需要把手工计算转变为机械运算。运用以矩阵理论为基础的线性代数方法可以实现这种转变。

由于教学计划未设线性代数课程，而要根据专门文献中的讲授过渡到矩阵计算语言，方法上是复杂的，本书介绍了过渡到新计算系统的几种方案中的一种，最小二乘法是这一方案的中心。按照这种方法进行运算可以求出误差理论和数理统计的全部主要参数——误差的状态、离散，误差的联系和集中。

根据大纲，在矩阵理论术语方面，教材内容没有超出实数域的范围，并限制在欧几里得空间内。从这个空间的基本概念出发，并利用专门文献按照独立工作的程序就可以改用单一空间内

的研究资料。考虑上述理由，教材编写注意了课程的理论方面。

本书手稿在出版社收到苏联国家标准机关关于《矿藏》出版社出版的书籍要执行16263—70国定全苏标准（a）的正式通知之前已交付排版，所以书中没有用术语《погрелиность》，仍用术语《ошибка》。*

作者感谢技术科学博士M. M. 马什莫夫和副教授、技术科学副博士A. B. 赫列布尼克夫，他们提出了改进教材内容的宝贵意见和建议。作者对技术科学副博士B. A. 费多琴克在整理教材手稿付印时给予的帮助表示衷心地感谢。

---

* 《ошибка》原文意义为错误，我们译为"误差"，而《погрешность》原文意义即为误差。——译者

原文中有一些符号排印有误，译文已加订正，不再分别加注。——译者

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

绪　　论

在科学技术发展的现阶段，采矿工业中矿山测量工作的主要任务是：

迅速、准确、完整地获得关于矿山巷道和钻孔的位置和状态、被开采的有用矿物和围岩的矿山地质特征、采矿时岩体内和地表发生的变化过程；

用现代化的设备和方法及时地处理大量的原始资料，估计取得成果的准确性并将它们反映在矿山图纸上；

从矿山测量和矿体几何的工作角度保证采矿企业的勘探、设计、建设和有用矿床的开采工作的顺利进行；

在矿床开采过程中编制毗连和邻近地区的矿山地质情况预报，以及进行岩层和地表移动预计，是采矿工作技术经济发展规划、现代化机械设备的合理运用和采矿企业管理自动化的基础。

在矿山测量工程技术人员广泛而复杂的生产活动中，测量和统计观测成果具有特别重要的意义，由它可以获得原始资料，对这些资料只能用取平均值方法进行整理和分析。

早在远古的时候，人们就已经知道取平均值。从科学意义上讲，平均值问题成为研究人员注意的中心已有二百多年。开始，从事天文和测量研究的数学家对上述问题特别感兴趣。后来，著书立说研究这个问题的学者越来越多。平均值理论和平均值估计的一般问题和个别问题的研究范围不断扩大。对于矿山测量工程技术人员来说，在现代的生产条件下，平均值问题发展成为更加复杂的问题。

在寻找有用矿物的过程中，在多次的大地测量和统计观测时产生一个随机误差系列，它是由在所有条件和情况下都不能排除掉的基本误差的总体或者集合所构成。因此，任意一个测量系统的数字概念，都表示一个对应于地面系统的近似模型。同样，根

据统计观测的数据研究得出的任何现象的数字概念，都可以表示为相应于实际发生的现象的一个近似模型。把测量模型复原，即准确地把原模型用实际形式表示，这在任何条件下都是不可能的。但是，用数学方法处理观测成果可以建立一个近似模型，这个近似模型与实际相差最小，即与实际模型最近似。这时近似模型相对于实际模型还应区别以下两种情况：一种是在实际模型内各元素之间准确的相互关系在理论上是已知的；一种是在实际模型内各元素之间的联系是未知的。

对第一种情况，矿山测量工作就是在地面上建立测量系统的近似模型，对第二种情况则是建立该地区表示有用矿物分布的近似模型。在这两种情况下处理实验模型的数学形式是一样的，但是在第一种情况下处理成果的最终估计比在第二种情况下简单些，因为在地面测量中，通常把实际模型与理论模型相比较。而在第二种情况下没有比较的可能，因此就产生了确定可靠边界的必要性，在这个边界以内有用矿物分布的统计模型可以认为是可靠的。

实践说明，把测量模型复原为其原型，最好的方法是根据勒让德-高斯或者高斯-马尔可夫表格，即按最小二乘法来实现。最小二乘法的理论能使近似模型走样最小，并且在平均值上与原型最相似。因此，如果在这个理论的基础上建立统计运算的数学模型，则这个模型在平均值上也是最佳的。

建立统计运算的数学模型表格是一项工程技术性质的任务。可是，制定这种表格，不仅有实际意义而且有科学价值。利用它可以取得误差最小值并以足够的精度给出测量与观测成果的估计。建立数学模型表格，是一个工程经济问题，是发展任何工业企业不可缺少的条件，根据这种表格来规划所给定的精度范围内的实验程序。这个问题与平均值的统计运算预计有关。

解决这个问题有不同的方法。其中许多方法是建立在概率论定律的基础上，而且在许多情况下与极小值、极大值或最大或然值的原则相联系。在测量实践中经常利用误差理论和最小二乘

法。同一些公式可以得出线-角和高程测量的估计并作为这类测量预计（预测）的基础。在矿山测量的实践中，当变换任何方法都不可能时，才开始采用数理统计的方法。误差理论和数理统计的公式属于估计理论范围内的同一类特征，并且是最小二乘法估计的组成部分。因此，将这些特征联结到有逻辑联系的公式组中，就可以建立根据最小二乘法进行统计运算的估计和预计的合适的模型表格。同时要注意，任何种类的统计关系在逻辑上都不能引起由于工艺的，经济的，自然的和许多其它因素产生的因果关系。

第　一　章

课程的数学知识

§1　线性代数基础

三维以上的空间几何　欧几里得几何有三维，平面——两维，直线——一维。就通常意义上理解，我们的空间直觉限制在三维。但是在很多情况下，应用超出三维空间界限的多维或者n维空间的概念是完全适用的。n维空间的术语可以做为表达一般几何概念范围之外的数学思想的形象语言来研究。

按照欧几里得的观点，直线和曲线被看作纯粹几何对象。后来笛卡儿用代数方法解释几何理论。随后产生了新的见解：数x或两个数x、y或三个数x、y、z做为起始数和基本的分析对象，并且被具体化为直线上，平面上，空间内的点的形式加以讨论。在这种解释中几何语言是为了确定数与数之间的关系，使几何对象失去它们的独立的与不相关的值且假设一对数x、y是平面上一点，满足线性方程

$$(x,\ y) = ax + by + c = 0,\quad c\text{——常数}$$

的一对数的总体是一条直线。

三个含有三个未知数x，y，z的线性方程

$$L_1(x_1,\ y_1,\ z_1) = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0$$
$$L_2(x_2,\ y_2,\ z_2) = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 + d_2 = 0$$
$$L_3(x_3,\ y_3,\ z_3) = a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 + d_3 = 0$$

表示三个平面。这些方程的解归结于确定三维空间内三个平面的交点。

n个含有n个未知数的线性方程组

$$L_1(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n) = 0$$
$$L_2(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = 0$$

构成n个超平面

$$L_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n + b = 0$$

n个超平面的交线表示在n维空间内的n个含有n个未知数的线性方程组的解。

描述数学事实的这种几何方法的优点在于，主要地是不依赖于空间的维数n或者空间度数的代数性质的状态，当$n \leqslant 3$时，在一般空间的概念里它们能够简化。

现代文献证明，用代数方法概括的几何概念是很有益的。爱因斯坦相对论理论就是一个例子，他把事件的空间坐标x，y，z与时间坐标t联合成一个空间-时间四维的簇x，y，z，t。使《空间-时间》从属于这种解析表格并赋予它以Н.И.罗巴切夫斯基的非欧几里得几何的性质，就可以相当简单地描述很多非常杂复的情况。n维空间在天文、大地测量，统计学，力学和数学本身中都是很有用的。

数字表达式 从一个最简单的例子可以看出，矿山测量工作者和大地测量工作者要和三种不同性质的数打交道。

令平面上一点O的位置没有误差，又令从点O到点M的距离和方向已被测得。于是点M的位置就受边长和角度的测量误差的影响。由此可以明显地看出，边长误差导致线段OM延长或缩短ΔS值，因而使点M产生纵向位移。角度误差导致这个线段在点O旋转$\Delta\alpha$角度，并使点M产生横向位移。这些误差的共同影响使点M沿MM′方向移到点M′，它既不与纵向位移一致，也不与横向位移一致。

令σ_s与σ_α是直线位移和角度位移引起的均方误差。设$\sigma_s = \sigma_\alpha$。这时可以用一个圆描述点M可能位移的边界。若$\sigma_s \neq \sigma_\alpha$，则这个圆将变为椭圆。

若点M的确定误差是最小的，则这个点的位置将是最佳的。但是在纯量形式中的最小误差由均方误差σ_s与σ_α的最小值表示，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在向量形式中用最小位移MM′的长度和方向表示，在张量形式中用二次中心曲线（圆或椭圆）表示。

测量控制点的系统是互相联系的，所以全部点位移的总和导致测量控制网的总的歪曲与变形，因此导致由测量控制的几何内容为条件的全部理论关系的破坏。

测量控制网的总变形是个别畸变的函数，其表示形式为：

纯量形式，即用点M的函数来表示，这个函数对于每个点相应地有一个确定的值；

向量形式，即用点M的函数来表示，此函数对于每个点相应地有一个确定的值和一个确定的方向；

张量形式，即用点M的函数来表示，此函数的矩阵为n阶方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

利用这类数字表达式，可以在算术，代数与几何形式中讨论大地测量的，统计的和任何数量的运算。

纯 量 和 向 量

纯量 某些一次观测成果，用数字

$$x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots,\ a_1,\ b_1,\ c_1\cdots\cdots$$

即带有一个下标的一些纯量来表示。每一个纯量反映一个点。

向量 观测值 x 或 a 的多次观测成果，用数列

$$x = [x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n],\quad a = [a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n]$$

即向量来表示。每个向量反映一个线段或一条直线的长度和方向。

半径-向量 我们建立两个坐标系统（图 1）并在每一个坐标系中画一个同样的半径-向量。在图1a上给出斜角的，或任意的

系统，在图1б上给出直角的，或正交的系统。

用向坐标轴上投影表示半径-向量a，将得到几何的，代数的和算术形式的这个向量的符号

$$a = [a_1,\ a_2]$$

这样的符号，当它表示斜角和直角坐标系内平面上同一个半径-向量的意义时具有普遍性，但是，在这些坐标系内投影的长度是不同的：

$$a_1' \neq a_1;\quad a_2' \neq a_2$$

由这些投影构成的几何图形不同，有平行四边形和矩形，它们的半径-向量a都是对角线。

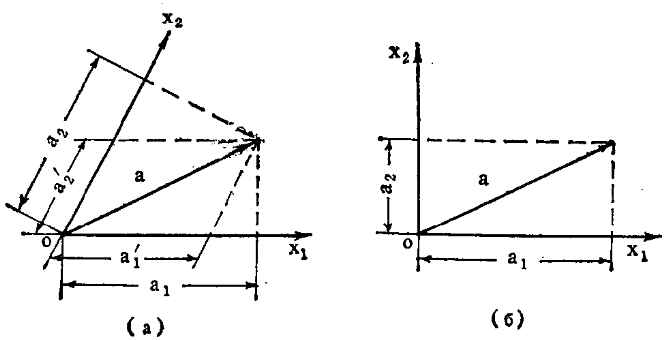

图 1

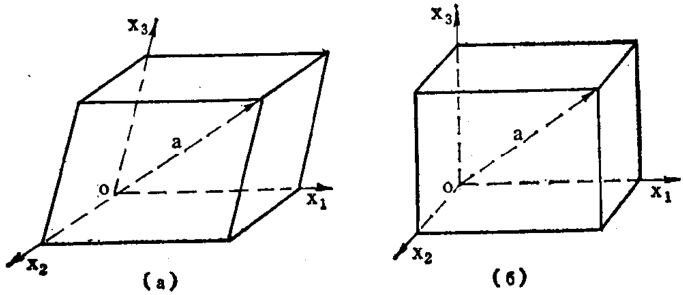

图 2

投影相等：

$$a_1' = a_1,\ a_2' = a_2$$

与图形的恒等性只有在唯一的一种情况下才能成立，即当斜角坐标系内坐标轴x_2围绕原点旋转到与x_1轴成垂直的位置。

我们把半径-向量 a 移向一般空间内的斜角坐标系(图2a) 和直角坐标系 (图2б)的原点。在这个空间内同一个半径-向量 a 将由三个一组的数 $a = [a_1,\ a_2,\ a_3]$
表示。

但是,这个半径-向量在斜角和直角坐标系内的投影长度不同的，所以，$a_1 \neq a_1'$； $a_2 \neq a_2'$； $a_3 \neq a_3'$。

在测量学的意义上，建立在这些向量投影上的几何图形，象建立在棱（斜角的与直角的平行六面体）上的一样，也是不相同的。但是在拓扑学的意义上，即在几何形式的一般描述的意义上，这两个坐标系统内却有一个同一类型的图形——平行六面体。用类似的方法可以讨论图 1 上的图形，并把它们归为一个类型——平行四边形。

现在我们讨论几个更普通的概念。假设需要表示在空间运动着的飞机随时间变化位置。那么从飞行的起点，即计算系统的原点起，飞机某一时刻在空中的位置可用半径-向量

$$a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]$$

即用四个一组的数，或四个投影表示。

考虑到飞机的速度，我们得到由五个一组的数，即五个投影表示的半径-向量

$$a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5]$$

考虑到所有影响飞机运动的其他因素，将有用 n 个数或投影表示的半径-向量

$$a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n]$$

这里 n ——一个自然数，等于决定飞机飞行位置的所有因素的个数。

在三个以上的投影中建立一个向量是不可能的，但是对它的

实际内容或意义是完全可以想象的。

自由向量 在坐标系统之外，符号

$$a = [a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n]$$

表示自由向量，这里a_1，a_2，……，a_n——分量或向量的分支量。

向量的平行移动 利用平行移动的办法可以将任意一个自由向量归到给定的坐标系统的原点，这时向量的长度和方向不变。于是，自由向量具有半径-向量的位置。

向量的维数 根据定义，向量 a 的分量个数表示它的维数。所以，向量

$a_{11} = [a_1]$———一维

$a_{12} = [a_1,\ a_2]$——二维

$a_{13} = [a_1,\ a_2,\ a_3]$——三维

………………………………

$a_{1n} = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$——n 维或多维。

这些向量的维数可以用两个下标 a_{1n} 表示，第一个下标表示行，第二个下标表示行内的分量个数。

向量的转置 行中的向量通过转置可以在列中表示出来：

$$a_{21} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad a_{31} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad a_{n1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

用类似的办法可把列向量变为行向量。我们假定向量的原始形式是以列的形式给出

$$a_{21},\ a_{31},\ \cdots\cdots,\ a_{n1}$$

因而，这些向量表示为行的形式是

$$a_{12}^*,\ a_{13}^*,\ \cdots\cdots,\ a_{1n}^*$$

这里*——转置记号。

矩　　阵

定义 用下标（左边）和文字（右边）形式表示的数字表格

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots x_{nk} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \cdots\cdots g_1 \\ a_2 & b_2 \cdots\cdots g_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & b_n \cdots\cdots g_n \end{pmatrix}$$

是矩阵；组成这些表格的数是矩阵元素。每一个元素在矩阵中占有一定的位置。左面矩阵里的元素有两个下标：第一个表示行数，第二个表示列数。所以元素 a_{ij} 位于 i 行和 j 列相交处。有下标的矩阵可以缩写为

$$[x_{ij}]$$

这里 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$；$j=1, 2, \cdots\cdots, k$，它们是确定矩阵的相应行数与列数的下标。

有文字符号表示的矩阵不能简写，它在高斯变换中有重要作用。

矩阵的形式 在运算实践中出现方阵，长方阵。行矩阵或列矩阵是长方阵的个别形式。

矩阵的维数和阶 长方阵的维数可以是 $n\times k$，$k\times n$，$r\times n$，$n\times r$，$i\times j$……等类型的任意一些符号，这里第一个下标表示行数，第二个下标表示列数。若第一个下标的数值大于第二个下标的数值，则长方阵是缩短的，或是垂直的，反之，则长方阵是延长的，或是水平的。

若行数等于列数，则矩阵是方阵，用一个下标或者两个相同的下标确定方阵的阶。

矩阵的符号与记号 矩阵用带有下标的大写拉丁字母表示。例如，符号

$$A_{nk},\ B_{rn},\ C_{sp},\ \cdots$$

表示长方阵，而符号

$$N_{kk},\ R_{nn},\ M_{ss},\ \cdots$$

表示方阵。

矩阵用

$$\|\ \ \|,\ [\ \ ],\ (\ \ ),\ \{\ \ \}$$

几种类型的记号来标明。

符号与记号的选择可以是随意的，但在著作中使用它们时最好能保持典型性，通用性和统一性。

方阵的多样性 方阵能起重要作用。

零矩阵0，它的所有元素都等于零。对于每一对nn值，有许多不同的零矩阵。

单位矩阵EE，在主对角线上的所有元素都等于1，而在主对角线两侧的所有元素都是零。对于每一对nn值，有许多个单位矩阵。

对角矩阵D，这里$d_{ii} \neq 0$，$d_{ij}=0$；数d_{ii}——D矩阵的对角元素。

纯量矩阵CE，这里C——纯量；E——单位矩阵。

三角矩阵A或B，这里对于A中主对角线下侧的或对于B中主对角线上侧的所有元素都等于零，A称为上三角矩阵，B称为下三角矩阵。

对称矩阵S，对于所有的i与j，$S_{ij}=S_{ji}$。

矩 阵 代 数

恒等的或相等的矩阵 若包含相同的行数与列数，且对所有的r与s，$a_{rs}=b_{rs}$，则矩阵A与B恒等或相等。

矩阵的转置 若在矩阵A_{mn}中行与列互换，而不改变其中各元素的分布，得到有n行与m列的新矩阵，用符号A^*_{nm}表示，则矩阵A^*_{nm}称为A_{mn}的转置矩阵。

矩阵加法 若矩阵A与B是同阶或同维，则

$$C_{mn}=A_{mn}+B_{mn}$$

是两个同阶矩阵之和，其元素为

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$$

这时各被加数仍保持通常的性质：可交换性，即交换律

$$A+B=B+A$$

与结合性，即结合律

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com