经济数学基础

〔苏〕A.N.卡拉西夫　等著

上册

上海科学技术文献出版社

经济数学基础

上册

A.П. 卡拉西夫
[苏] Э.М. 阿克秀金娜 著
T.И. 萨维利耶娃

须复芬
黄振勋 译
高国柱

上海科学技术文献出版社

经济数学基础

（上 册）

须[redacted]杜 译

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号）
新华书店经销
江苏宜兴县南漕印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11.75 字数 284,000
1988 年 1 月第 1 版 1988 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—4,500
ISBN 7-80513-065-5/O·03
定价：5.50 元
《科技新书目》149-311

译 者 的 话

本书由苏联 A. И. 卡拉西夫教授、З. M. 阿克秀金娜副教授和T. И. 萨维利耶娃副教授著，经苏联高等和中等专业教育部批准被用作苏联高等学校各类经济专业学生的教材和参考书，也适用于各类管理专业的学生．本书分上、下两册，系统地介绍了经济数学的基本原理和基本方法，内容全面、丰富．全书包括向量代数与解析几何、分析引论、微分学和积分学、常微分方程、线性代数、级数、概率论和数理统计、线性规划及其在经济上的应用，是同类书中较全面、系统的一本．为了使各类读者更好地使用此书，原书作者尽可能地简化了理论部分的叙述，在相当多的场合叙述非常直观，并列举了大量例题．此外在每章的结尾还有大量习题，且附有习题答案，以供读者参考．因此该书不仅适合于教学，还便于从事各类经济工作的同志阅读．本书也可作为各类经济专业自学考试的高等数学教材和参考书．

本书内容与苏联高等院校经济专业的现行高等数学大纲相符，由此也可看到苏联在现代经济领域中的数学基础，这正是译者翻译此书的目的之一．

尽管本书在理论上叙述较为直观、简洁，但仍保持立论严密完整，使读者在学完该书后，不仅能掌握所需要的数学知识，还能受到严格的数学思维方法的训练．

本书在翻译过程中承蒙复旦大学经济学系副教授马文奇同志仔细校阅，在此表示衷心感谢．

限于水平，译错之处在所难免，恳切希望读者批评指正．

译　者

1985 年 5 月于复旦大学

目　录

引　言

本教程要用到集合论和逻辑理论的某些概念，这里我们扼要地作一叙述.

关于集合的某些知识　集合这个术语用来表示物体的总体、汇集和系统. 例如，可以指欧洲各国的集合、车间里机床的集合、班级中大学生的集合、直线上的点集以及所有自然数的集合，等等.

在上述前三个例子中，每个集合都有有限个元素，这种集合称为有限集. 后两个例子中所指出的集合不是由有限个元素组成，称为无限集.

一个元素也没有的集合称为空集，用记号 $\varnothing$ 表示. 因为空集的元素个数等于零，所以空集是有限集，可作为空集的例子有平行直线的交点的集合.

通常集合用大写字母表示，其元素用小写字母表示. 假如 a 是集合 A 的元素，那末记为 $a\in A$ 或 $A\ni a$（读作"a 属于集合 A"或"集合 A 包括 a"）. 如果元素 b 不属于集合 B，则记为 $b\notin B$ 或 $B\not\ni b$.

由集合 B 的某些元素组成的集合 A，称为集合 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或者 $B\supset A$（读作："集合 A 包含在集合 B 中"）. 例如，B 是某个图书馆中图书的集合，而 A 是其中硬封面图书的集合，那末 $A\subset B$.

我们约定空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$；此外，在任何集合的子集中都包含有这个集合本身，即 $A\subset A$. 记号 $\in$,

$\ni$, $\subset$, $\supset$ 分别称为属于符号和包含符号.

如果两个集合 A 和 B 由同一些元素组成, 那末它们称为相等集, 可记为 $A=B$, 上述这个等式包括 $A\subset B$ 和 $B\subset A$.

集合多半以下列两种形式给出:

(1) 直接写出集合元素: $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$(例如, $X=\{1, 2, 5, 10\}$是数10的所有因子的集合; $N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$是一切自然数的集合);

(2) 指出集合所有元素具有的性质(例如, $X=\{x\in R \mid |x|\geqslant 1\}$是绝对值不小于1的一切实数的集合).

用 $A\cup B$ 表示的集合称为两个集合 A 和 B 的并, 由属于集合 A 或 B 的一切元素组成.

用 $A\cap B$ 表示的集合称为两个集合 A 和 B 的交, 由 A 和 B 共有的所有元素, 即由同时属于集合 A 和集合 B 的元素组成.

例 1 设 $A=\{-2, -1, 0, 3, 5\}$, $B=\{-2, 0, 4, 5\}$, 则 $A\cup B=\{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{-2, 0, 5\}$. 式中, A, B, $A\cup B$, $A\cap B$ 是由本身的元素给出的有限集.

例 2 设 $X=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $Y=\{y \mid 2\leqslant y\leqslant 4\}$($X$ 和 Y 是满足给定的不等式的实数的集合), 那么并集 $X\cup Y=Z=\{z \mid 1\leqslant z\leqslant 4\}$, 交集 $X\cap Y=V=\{v \mid 2\leqslant v\leqslant 3\}$.

如果集合 X 和 Y 不具有共有的元素, 那末它们的交是空集: $X\cap Y=\varnothing$.

如果集合 B 的每一个元素对应于集合 A 的唯一的元素, 并且反之集合 A 的每一个元素对应于集合 B 的唯一的元素, 那末就说在集合 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系.

假如在集合 A 和 B 的元素之间可以建立一一对应, 那末这两个集合称为是等价集, 且记为 $A\sim B$.

与自然数集 $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$等价的任何集合, 称

为可列集. 显然, 一切可列集彼此是等价的.

实数与数集 其元素为实数的集合, 称为数集.

实数这一概念在中学教科书中已作过介绍, 提醒一下, 实数的集合 R 是有理数的集合 Q 和无理数的集合 I 的并集: $R=Q\cup I$.

集合 Q 是所有正、负整数和分数的并. 无理数是无限不循环的小数 (如 $\sqrt{2}$, $\pi=3.141592\cdots$). 集合 R 的子集中也有自然数的集合 $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 和整数的集合 $Z=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.

在上述所有的集合之间存在下列关系式: $N\subset Z\subset Q\subset R$; 此外, $I\subset R$.

在本教程中我们仅仅考察实数, 因此为了简易起见, 所谈到的"数"将都是指"实数".

数 x 的绝对值(即模)当 $x\geqslant 0$ 时就是这个数本身; 若 $x<0$, 则是数 $-x$, 即

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{若 } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{若 } x<0. \end{cases}$$

例如, $|4|=4$, $|0|=0$, $|-2|=-(-2)=2$.

可见, 除去零以外, 任何实数的模都是正数.

实数在几何上表示数轴上的点, 数轴即具有选定的正方向、原点和比例的直线.

与任何实数 x 对应的是数轴 Ox 上位于与原点 O 的距离为 $|x|$ 的点 $M(x)$, 如果 $x>0$, 它位于原点的右方, 若 $x<0$, 它位于左方. 反之, 与数轴上的任何点对应的是唯一的实数. 可见, 实数集合等价于数轴上的点集. 因此, 在谈到术语"数 x"时常常谈到"点 x", 在考察数集时同时考察相应的数轴上的点集.

对于任何 $a>0$, 不等式 $|x|<a$ 表示点 x 在数轴上与原点的

距离小于 a，而不管它是在原点的右方或左方．因此，点 x 一定在点 $-a$ 和 a 之间，即不等式 $|x|<a$ 等价于两个不等式 $-a<x<a$．

量词．逻辑记号 在叙述本教程的某些章节时，我们将使用以下记号：$\forall x$——“对于一切 x”、“对于任意的 x”；$\exists x$——“求出这样的 x，使得…”，“至少存在一个 x…”，它们分别称为普遍性和存在性的量词．例如，记号 $\forall x\geqslant 0$ 读作：“对于任何非负的 x 值”；表达式 $\exists n\in N$ 表示：“在自然数集合中存在这样的数 n”．

记号 $\Rightarrow$ 表示逻辑结果．$A\Rightarrow B$ 表示：“从 A 得到 B”或者“假如实现 A，那末 B 成立”．

记号 $\Leftrightarrow$ 用来表示逻辑上的等价性，$A\Longleftrightarrow B$ 表示“从 A 得到 B，并且反之从 B 得到 A”．

例如，写 $|x-x_0|<a\Longleftrightarrow x_0-a<x<x_0+a$ 表示 $|x-x_0|<a$ 等价于 $x_0-a<x<x_0+a$．

本书常用记号

N—— 一切自然数的集合；

Z—— 一切整数的集合；

Q—— 一切有理数的集合；

I—— 一切无理数的集合；

R—— 一切实数的集合，数直线；

R^2—— 数平面上一切点的集合；

R^3—— 数空间的一切点的集合；

$\in$—— 属于(属于记号)；

$\subset$—— 包含记号；

$\varnothing$—— 空集；

$\forall$—— 对于任意的(普遍性量词)；

$\exists$—— 存在，求（存在性量词）；

$\cup$—— 并集；

$\cap$—— 交集；

$\Rightarrow$—— 得到，（蕴涵记号）；

$\Longleftrightarrow$—— 当且仅当（等价性记号）。

第一篇　向量代数与解析几何初步

第一章　向　　量

§1　n 维向量及其运算

n 个有序实数称为向量，记为* $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，这里 x_i 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个元素(或称第 i 个坐标)**.

向量的维数定义为它的坐标数或它的特征数. 例如，(2, 5) 是二维向量，(2, −3, 0) 是三维向量，(1, 3, −2, −4, 7) 是五维向量，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 维向量.

只有在向量具有相同的维数和相同的对应坐标的情况下，向量才相等. 由此可见，向量的坐标不允许交换位置，如，$(0, 5, -3) \neq (-3, 0, 5)$.

所有坐标都等于零的向量：$\mathbf{0}=(0, 0, \cdots, 0)$，称为零向量.

向量按确定的规则能够进行线性运算：加法、数乘、减法. 因此，向量代数得到了广泛应用，特别是在经济学的研究中，它能够用一个数集符号表示，且可象独立的数那样进行运算. 下面我们在向量上引进线性运算.

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与实数 λ 的乘积是向量

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) \tag{1.1}$$

---

* 向量也可写成列坐标的形式

** 向量的坐标在力学上称为向量的分量——译者注

即当向量与数相乘时，它的每个坐标与此数相乘.

由向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能够得到负向量 $-\boldsymbol{x}=(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$.

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的和是向量

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n) \tag{1.2}$$

即相同维数的向量相加时，逐项相加它们对应的坐标.

经济学上的量一般是多维的，因此可用向量来方便地表示. 例如，某组商品可规定为向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而相应的价格规定为向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

如果在企业的生产计划中将产品的产量确定为商品的正值，将消耗确定为负值，那么就可以得到产出——消耗向量 $\boldsymbol{y}^k=(y_1^k, y_2^k, \cdots, y_n^k)$，这里 y_i^k 为第 k 个企业商品 i 的产量(消耗量)，且假设 y_i^k 为正(负)，而 $k=1, 2, 3, \cdots, m$.

产出——消耗的总的经济向量 $\boldsymbol{y}$ 由全部 m 个企业的产出——消耗向量之和所确定:

$$\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}^k=\left(\sum_{k=1}^{m}y_1^k, \sum_{k=1}^{m}y_2^k, \cdots, \sum_{k=1}^{m}y_n^k\right).$$

[希腊字符 Σ(西格马)用来表示求和]

显然

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})&=(x_1, x_2, \cdots, x_n)+(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)\\&=(0, 0, \cdots, 0),\end{aligned}$$

即相反向量的和为零向量.

利用相反向量的概念可以定义向量的减法运算:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})&=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\&\quad+(-y_1, -y_2, \cdots, -y_n)\\&=(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots, x_n-y_n),\end{aligned}$$

即在两个相同维数的向量相减时，把它们对应的坐标逐项相减.