高等数学 第Ⅱ卷

一元微积分与微分方程

居余马 葛严麟 主编

清华大学出版社

高 等 数 学

第 Ⅱ 卷

一元微积分与微分方程

居余马　葛严麟　主编

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内 容 提 要

该书用现代数学的观点对传统的工科微积分和线性代数的内容体系进行了更新．全书以近代数学的基础知识（集合、关系、运算、映射）及群、环、域的基本概念开篇，突出数学的整体性和结构性；然后从线性空间的结构与线性映射的性质入手，阐述线性代数的内容，在讲述微积分和微分方程时充分利用线性代数知识；并增添了微分几何初步．全书知识结构新、基础厚、容量大，使用现代数学的语言和符号．全书分 3 卷，第Ⅰ卷为基础与代数，第Ⅱ卷为一元微积分与微分方程，第Ⅲ卷为多元微积分与微分几何初步．

本书是第Ⅱ卷，内容包括：实数；数值函数，极限与连续；导数与微分；微分学的基本定理及其应用；定积分与不定积分；函数的有限展开；广义积分；无穷级数（幂级数与傅里叶级数）；常微分方程与线性微分方程组．

本书可作为工科高等数学教材，亦可供有关人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　第Ⅱ卷：一元微积分与微分方程/居余马，葛严麟主编．—北京：清华大学出版社，1996

ISBN 7-302-02135-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①居…　②葛…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材③微分方程-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 13298 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
　　　　因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京密云胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：16.25　字数：418 千字
版　次：1996 年 8 月第 1 版　1997 年 12 月第 2 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02135-X/O・169
印　数：4001～7000
定　价：15.50 元

前　言

本教材是根据我们在清华大学土木系、计算机系和电机系的教学实践经验，按同名讲义修改而成.

目前国内流行的高等数学教材颇多，多年来在广大教师的努力下，用它们培养了不少人才. 然而从培养 21 世纪人才的角度来看，在各门学科加速相互渗透，以及随着计算机和信息技术的迅速发展而引起的各门科学和技术定量化趋势的背景下，需要进一步拓宽大学生的知识面和增强灵活反应的能力，作为大学重要基础课程的高等数学课，有必要把教学的重点从仅仅“为专业课程提供数学工具”扩展到“提高大学生的数学素质”上来，为此教学体系和内容也应作相应的调整和更新. 本教材就是在这种思想指导下进行的一种尝试.

对于“数学素质”，人们有不同的理解，但有几条是比较一致的，即：(1)对事物某一方面结构的归纳和抽象的思维能力，从具体到一般的联想能力，表现之一是能建立实际问题的数学模型；(2)正确的演绎推理习惯和动手计算的能力；(3)了解基本的数学语言，具有一定的自学能力，能通过自学了解某些新的数学工具和思想. 当然，提高“数学素质”不能只靠“高等数学”一门课，也不能只靠若干门数学课，而需要通过整个大学期间各种课内外的数学实践.

这本教材虽然对现行的工科微积分和线性代数的数学内容和体系作了较大的调整和更新，增加了近代数学的一些基础知识，增添了微分几何初步，并尽量使用现代数学的语言，但是，基于数学科学继承性很强的特点，加之我们的试验还是初步的，所以全书的

内容仍是以古典数学(主要是微积分、常微分方程和线性代数)为主. 关于内容的处理和体系的安排,我们强调了以下两点:

一、内容的整体性和结构性:分析、代数、几何仍是高等数学的基础,长期来一直把它们分门设课、孤立讲授(几何部分已基本取消),现在由于各门学科的发展以及现代数学对非线性和非局部问题研究的深入,它们之间的界线越来越模糊,因此有必要强调高等数学的整体性与结构性. 我们认为工科学生适当地学一些近代数学的基础知识,不仅可以使他们对于经典数学的内容有更深刻的理解,也可以开阔思路、提高他们抽象思维的能力和运用数学工具分析解决实际问题的能力;同时也有助于他们阅读使用数学较多的现代科技文献,并为他们继续学习和使用现代数学奠定必要的基础. 从数学的整体结构看,代数结构是基本的. 线性代数主要是研究有限维线性空间的结构和线性映射的性质;微积分则是研究 $R^1 \to R^1$ 和 $R^n \to R^1$ 的连续函数(更一般地是 $R^n \to R^m$ 的连续映射)的各种性质,极限方法和局部线性化是它的基本方法. 因此,掌握了线性代数的知识将有助于更深入、更简明地阐述微积分、微分方程和微分几何方面的很多内容. 基于这种考虑,我们把代数安排在微积分之前讲授,这样,学生更能领会数学的整体性和结构性,也便于增加一些新的内容. 例如,用线性映射定义微分,容易得到 $R^n \to R^m$ 的可微映射 f 的微分对应于 f 的雅可比矩阵以及可微复合映射的链法则,以及微分方程和微分几何的某些内容.

二、在内容的安排上处理好一般和具体的关系:学生"数学素质"的培养有个思维习惯的建立过程(尤其在抽象能力的培养方面),教师做好这一点并不容易. 人们常常以"学生不容易接受"为理由,回避了培养学生抽象思维能力所遇到的一些矛盾,在教学过程中过份强调"从具体到一般". 其实教学是传授人类长期积累的知识,这与本身通过实践去获取知识有所不同. 正确的教学原则应该是:"宏观上从一般到具体"(指总的内容安排),"微观上从特殊

到一般”(指具体内容的讲授). 这样先见森林，再见树木，使学生扩大视野，又摆出问题，不回避矛盾，充分调动学生学习的积极性；而对每个重要的抽象概念，则必须注重介绍其实际背景，循序渐进.

鉴于以上原则，首先要考虑如何引导学生进入高等数学的领域，即把教学的起点放在何处. 我们从近代数学的基础知识——集合、关系、运算和映射以及基本代数结构——群、环、域的基本概念开篇，目的是使学生在中学数学的基础上，对数学的整体认识上一个台阶，了解高等数学与中学数学的重大差别，从而激发起学生探索新事物的积极性与学习大学数学的浓厚兴趣. 在此基础上，按下列次序安排教学内容和体系.

第 I 卷内容包括：集合、关系、运算；基本代数结构——群、环、域的基本概念；线性空间与内积空间；映射与线性映射；矩阵；行列式；线性方程组；特征值与特征向量以及矩阵的标准形(相似标准形与二次型矩阵的合同标准形)；空间解析几何. 这里，我们对传统的“线性代数”的教学体系作了大的调整，突出了线性空间的结构和线性映射两大核心内容的地位和训练，并用它们来统率矩阵的计算、方程组的解的结构、矩阵的标准形和二次型的标准形. 这里我们以具体的三维几何空间和 R^n 为背景，抽象出一般线性空间的公理化定义；以一组几何向量在线性运算下有没有一个向量可用其余向量线性表示为背景，抽象出线性相关性的定义；用类比物质世界中万物与 100 多个化学元素间的关系，讲线性空间的“基”的概念；讲线性映射时，从一元线性函数提出，以 CAD(计算机辅助设计)中常用的投影、比例、错切、旋转和镜象变换为例，使学生理解 R^2，R^3 中的线性变换均把直线变为直线，而非线性变换则将直线变为曲线，这种从具体到一般的微观安排，使学生通过具体模型来理解抽象的线性空间和线性映射的概念，它有助于培养学生从实际问题中抽象出数学问题的归纳和抽象思维能力以及应用理论分析解决具体问题的能力.

第Ⅱ卷内容包括:实数理论;数值函数、极限与连续;导数与微分;微分学基本定理及其应用;定积分与不定积分及定积分的应用;函数的有限展开;广义积分;无穷级数(数项级数、幂级数与傅里叶级数);常微分方程与线性微分方程组.

第Ⅲ卷内容包括:点集(开集、闭集、连通性);多元函数与向量函数($R^n \to R^m$ 的映射)的概念,极限与连续性;多元微分学(包括 $R^n \to R^m$ 的可微映射的 Jacobi 矩阵及可微复合映射的链法则);微分几何初步——空间曲线与空间曲面的基本知识(曲线的切线和法平面,主法线,副法线,弗雷耐标架,弧长,曲率,挠率;曲面的表示,切平面,曲面的第一、第二基本形式,法曲率、主曲率、高斯曲率);重积分及其应用;第一类曲线积分与曲面积分;第二类曲线积分与曲面积分;常义和广义含参量积分.

在第Ⅱ,Ⅲ卷中,我们从极限运算的完备性需要出发,阐述了微积分的基础——实数理论,首先用较直观的无穷小数来引入实数,然后用柯西有理序列的等价类加以严格定义,证明了实数的稠密性和完备性;对于定积分,从较直观的阶跃函数入手,通过极限过程,证明了阶跃函数在有有限个第一类间断点情况下的黎曼可积性;讨论了 R^n 到 R^m 的映射的连续性、可微性问题;增添了微分几何的初步知识.此外,还充分利用线性代数的工具,深化了很多内容(如线性微分方程的理论、线性微分方程组的解法等)的研究.

总之,本教材与传统的工科微积分和线性代数教材相比较,在体系上注重数学的整体性,使分析、代数与几何互相渗透、互相促进;在内容方面,知识结构比较新,基础比较厚,知识面比较宽,并尽量使用现代数学语言.

教材的内容一般应比课堂讲授的内容更丰富一些.本教材中加注“*”或“**”的部分,一般都可不在课堂上讲授,因而也不作为教学的基本要求.对习题的安排也遵循同样的原则,为使读者更好地掌握书中内容,我们选编了大量的训练题,这些题目分成三个

档次：一是不加注“*”的题(这是教学的基本要求)；二是加注“*”的题；三是补充题. 后两类题比较难，一般都是证明题或是与正文中加注“*”内容相对应的题. 这些题是否作为教学的要求，教师可根据学生的水平而定.

使用本教材还要考虑与物理课相配合的问题. 我校物理课安排在一年级第二学期，为使学生具有必要的微积分知识以适应物理课的要求，我们在第一学期大约用 30 个课内学时，讲授极限、导数、微分、定积分的基本概念；微分法与基本的积分法；以及定积分的物理应用. 其中有关的理论问题到第二学期系统讲授微积分时再加以讨论. 相应地，我们把第 I 卷的第 8 章安排在第 II 卷的常微分方程之前讲授，把第 I 卷的第 9 章安排在多元微积分之前讲授.

本教材适用学时(课内)为 248—272，分三学期安排，周学时分别为 6，6，3.5 或 5，每学期 16 周.

参加本教材编写工作的有：萧树铁、居余马、葛严麟、胡金德、林翠琴、杜建博和吕志等同志. 使用本教材的前身(校内讲义)进行教学的还有郑建华、宋斌恒、罗贵明、黄鸿选、项阳、李正茂，他们对本教材的编写都提过很多宝贵意见，学校教材委员会的白光义、杨积康及清华大学出版社的潘真微同志对本教材的出版给予了热情的支持，在此，我们一并表示衷心的感谢.

更新工科微积分和线性代数的教学内容和体系是一个迫切而又艰难的课题，应该从各种不同的角度探索“更新”的路子，我们的探索和尝试只是初步的，希望能起到抛砖引玉的作用. 我们盼望“更新”能呈现百花齐放的局面. 由于受我们的水平和经验所限，本教材不妥之处在所难免，恳请同行专家及热心的读者批评指教.

编　者

1994 年 9 月于清华园

目　　录

第1章 实　　数

微积分主要是研究函数变化的局部性质和整体性质. 极限方法与局部线性化方法是研究函数变化性质的基本方法. 极限理论是微积分的基础.

微积分包含一元微积分与多元微积分两大部分. 一元微积分是研究一元函数变化的性质. 我们知道一元函数 f 是 R 的子集 D 到 R 的映射,要研究一元函数 f 的变化性质,就必须在实数集上对函数 f 作极限运算. 对于实数,我们虽然已经知道数轴上的点与实数一一对应,全体有理数与全体无理数构成实数集. 然而,究竟什么是实数,无理数与有理数有什么关系,至今我们并不清楚. 大家知道,在数轴上有理数是稠密的(即任意两个有理点之间有无穷多个有理点),但有理点不能充满数轴(即有理点是不连续的). 正因为如此,在有理数集上作极限运算是不能保证封闭的(即极限值不一定是有理数,关于这一点以后将论述),为了使极限运算封闭,必须把有理数集扩充为实数集. 如同为了使除法运算封闭,必须把整数集扩充为有理数集一样.

这一章将阐述什么叫实数,从而搞清楚实数的结构,并介绍实数完备性的几个等价命题. 这些是极限理论的基础,也是微积分的基础. 为了使读者对数的结构有一个完整的认识,我们将从自然数集、整数集、有理数集讲到实数集、实数域.

1.1 自然数 · 整数 · 有理数

1.1.1 自然数集 N

人类在认识自然和改造自然的实践中，对数的认识是从自然数开始的. 自然数从 1 算起，全体自然数组成的集合叫做自然数集，记作 N，即

$$N = \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}. \tag{1-1}$$

自然数集关于通常的数的加法和乘法运算是封闭的，这两种运算“+”和“·”都满足结合律、交换律. 因此，$\langle N:+\rangle$、$\langle N:\cdot\rangle$都是可交换的半群.

自然数是可比大小的，在 N 中比大小的二元关系“$\leqslant$”是偏序关系，也是全序关系. 因而，N 是全序集，而且是良序集(因为 N 的任何非空子集都有最小元). 在第 I 卷中已经讲过，数学归纳法原理正是以 N 是良序集为基础的.

自然数的计数方法，最常用的是十进制和二进制. 当然还有 60 进制(1 分钟=60 秒，1 小时=60 分)，12 进制(1 年=12 个月)等等. 所谓计数方法，就是把一个数写出来的方法.

十进制计数，以 0,1,2,…,9 十个数码来计数. 例如 1085 指的是

$$\begin{aligned}1085 &= 1\times 10^3 + 0\times 10^2 + 8\times 10^1 + 5\times 10^0\\ &= 1000 + 80 + 5.\end{aligned}$$

二进制计数，以 0,1 两个数码来计数，例如二进制的 1010111 指的是

$$2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 87.$$

即二进制的 1010111 等于十进制的 87.

二进制用 0,1 表示数，把数与逻辑联系了起来，可用 1,0 分别

表示“是”、“非”.计算机计数是以开关电路的两种状态“开”、“关”来计数的，所以计算机采用二进制计数.

一个十进制的数，如何用二进制来表示呢？以十进制的 109 为例：

$$
\begin{aligned}
109 &= 2\times 54+1=2\times(2\times 27+0)+2^0\\
&=2^2(2\times 13+1)+0\times 2^1+2^0\\
&=2^3(2\times 6+1)+2^2+0\times 2^1+2^0\\
&=2^4(2\times 3+0)+2^3+2^2+0\times 2^1+2^0\\
&=2^5(2\times 1+1)+0\times 2^4+2^3+2^2+0\times 2^1+2^0\\
&=2^6+2^5+0\times 2^4+2^3+2^2+0\times 2^1+2^0=1101101.
\end{aligned}
$$

所以十进制 109＝1101101（二进制）.也可以用由 2 做除数的除式（余数写在右侧）得到.即由

$$
\begin{array}{r|rll}
2 & 109 & & \\ \hline
2 & 54 & +1 & （第\ 1\ 次余数）\\ \hline
2 & 27 & +0 & （第\ 2\ 次余数）\\ \hline
2 & 13 & +1 & （第\ 3\ 次余数）\\ \hline
2 & 6 & +1 & （第\ 4\ 次余数）\\ \hline
2 & 3 & +0 & （第\ 5\ 次余数）\\ \hline
 & 1 & +1 & （第\ 6\ 次余数）
\end{array}
$$

得到十进制 109＝1101101（二进制），其中第 k 位数（从右往左计位数）是第 k 次余数（$k=1,2,\cdots,6$）最后一位数（第 7 位数 1）是最后一次（第 6 次）的商数.

按照上述方法，易得十进制 109＝301（六进制），因为

$$
\begin{array}{r|rll}
6 & 109 & & \\ \hline
6 & 18 & +1 & （第\ 1\ 次余数）\\ \hline
 & 3 & +0 & （第\ 2\ 次余数）
\end{array}
$$

一般，p 进制数（$p\geqslant 2$）

$$d_n d_{n-1}\cdots d_2 d_1 d_0 = d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \cdots + d_1 p^1 + d_0 p^0,$$

其中 $d_i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$i=0,1,2,\cdots,n$，等式右端算出来的数为十进制数.

定理 1.1 任一自然数都可以唯一地用 p 进制表示（$p\geqslant 2$）.

证 欲证“可以表示”，只要证明命题 $P(n)$：“$\forall\ a<p^n(a\in N)$，有

$$a = d_m p^m + d_{m-1}p^{m-1} + \cdots + d_1 p^1 + d_0 p^0, \qquad ①$$

其中：$d_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，$i=1,2,\cdots,m$；$d_m\neq 0$，$m<n$”对一切 n 都成立. 用数学归纳法证明命题 $P(n)$ 成立.

当 $n=1$ 时，$a<p$，则 $a=d_0p^0=d_0$，命题成立. 假设命题对 n 成立，现在考虑 $n+1$ 的情况.

设 $a'\in N$，且 $a'<p^{n+1}$ 但 $a'\geqslant p^n$. 则由 p^n 除 a' 得

$$a' = dp^n + r, \qquad ②$$

其中 $0\leqslant r<p^n$，$1\leqslant d<p$. 当 $r=0$ 时，命题显然成立；当 $0<r<p^n$ 时，根据归纳假设，有

$$a' = dp^n + d_m p^m + d_{m-1}p^{m-1} + \cdots + d_1 p^1 + d_0 p^0, \qquad ③$$

③题对 $n+1$ 也成立，从而命题 $P(n)$ 对一切 n 成立. 下面再证唯一性.

设 a 有 p 进制的两种表示，除了表示式①外，还有

$$a = d'_m p^m + d'_{m-1}p^{m-1} + \cdots + d'_1 p^1 + d'_0 p^0, \qquad ④$$

①，④式作为 a 的两种表示，对应的系数 d_k 与 d'_k（$k=0,1,2,\cdots,m$）至少有两个不等（因为如果只有一个系数不等，则①，④两式不等）. 假设 i,j 是使 $d_k\neq d'_k$ 的最小和最大的自然数 k，则由①式与④式相减得

$$d_i - d'_i = -\sum_{k=i+1}^{j}(d_k - d'_k)p^{k-i}, \qquad ⑤$$

而⑤式不可能成立（因为 $|d_i-d'_i|<p$，$p\nmid d_i-d'_i$，但 p 可整除⑤

式右端)，故①，④两式对应系数必全相等. 唯一性得证. ■

1.1.2 整数集 Z

在自然数集 N 中；减法运算不封闭. 为使减法运算封闭，自然数集 N 必须扩充为整数集 Z(即必须引入数 0 与负整数)，

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\}. \tag{1-2}$$

整数集 Z 关于通常的数的加法和乘法构成一个交换环，即 $\langle Z:+\rangle$ 是一个加法群；$\langle Z:\cdot\rangle$ 是一个可交换的半群；乘法对加法满足分配律.

整数集 Z 也是全序集(即任意两个整数都可比较大小)，但不是良序集(即 Z 存在没有最小元的非空子集).

1.1.3 有理数集 Q

在整数集 Z 中，除法运算不封闭. 为使除法运算封闭，整数集 Z 必须扩充为有理数集 Q(即必须引入分数)，

$$Q = \{p/q \mid p、q \in Z, q \neq 0\}. \tag{1-3}$$

有理数集 Q 关于数的加法和乘法构成一个域，即 $\langle Q:+\rangle$ 是一个加法群，单位元为数 0；$\langle Q^*:\cdot\rangle$ 是一个交换群(其中 $Q^* = Q\setminus\{0\}$)；乘法对加法满足分配律.

有理数集 Q 也是全序集，但不是良序集.

任一个有理数 p/q 都是有限小数(包括整数)或无穷循环小数. 事实上(这里不妨设 $q>p>0$，把 q 除 p 的式子用带余除法的形式写作：

$$p=0q+r_1, 10r_1=d_1q+r_2, \cdots, 10r_{k-1}=d_{k-1}q+r_k, \cdots,$$

其中 $\{r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots\}$ 为余数集.

如果 $\exists\, k\in N$，使 $r_k=0$，则 p/q 是有限小数；如果除不尽，即余数集为无穷集时，由于 $0<r_k<q$, $k=1,2,\cdots$，则必存在 $i, j\in N$ $(i<j)$，使 $r_i=r_j$，从而 p/q 为无穷循环小数，即

$$\frac{p}{q} = 0.d_1d_2\cdots\dot{d}_i\cdots\dot{d}_{j-1}.$$

有理数集是稠密的，即在数轴上任何两个有理数点 x_1,x_2 之间有无穷多个有理数点，因为 $\forall\ x_1,x_2\in Q$，有 $\frac{x_1+x_2}{2}\in Q$. 然而，在轴上两个有理数点之间的任一个点并不都是有理数点，也就是说，有理数点没有充满数轴. 例如，我们熟知的 $\sqrt{2}$，它在 1 与 2 之间，但它不是有理数，因为如果 $\sqrt{2}=p/q$ (p,q 互素)，即 $p^2=2q^2$，则 p 为偶数，即 $p=2p_1$ ($p_1\in Z$)，于是 $q^2=2p_1^2$，q 也为偶数，从而 p 与 q 可约，这与 p,q 互素矛盾. $\sqrt{2}$ 既然不是有理数，它必是无穷不循环小数，我们知道（不断作开方，得到）

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots.$$

由于无穷不循环小数是一种客观存在，因此为了区别于有理数，我们把它叫做无理数. 无理数有两大类，一类叫代数数，如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，… 等等，它们都是代数方程的解；剩下的一类叫超越数，如 $\pi=3.14159265\cdots$，$e=2.71828182\cdots$ 等.

一个无理数（即无穷不循环小数）可以用有限小数（有理数）构成的无穷序列来无限逼近. 例如，将 2 开方，依次得到的近似值构成的有理数序列

$$\{1,1.4,1.41,1.414,1.4142,1.41421,1.414213,\cdots\}$$

无限地逼近 $\sqrt{2}$；再如，有理数序列 $\{u_n\}$，其中

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

即 $\{u_n\} = \{2,\ 2.5,\ 2.6\dot{6},\ 2.708\dot{3},\ 2.71\dot{6},\ 2.7180\dot{5},\cdots\}$

也不趋向于一个有理数（将在 1.3 中证明），而是无限地逼近无理数 e.

这个事实表明，对一个有理数序列来讲，当它无限地逼近（或称收敛）于某个"数"时，这个"数"不一定是有理数，这叫做有理数