金屬扁壳稳定性非綫性理論的若干問題

Г. А. 基尼耶夫　Н. С. 乔索夫 著

建筑工程出版社

[illegible]

若干問題

Г.А.[illegible] Е.С.[illegible] 著

[illegible]

金屬扁壳稳定性非綫性理論的若干問題

建筑工程部設計總局 譯

建筑工程出版社出版

1959

内容提要 本书叙述有关扁壳稳定性非綫性理論的研究。书中列举了按任意旋轉面繪制的壳体临界荷載的計算公式，并載有便于計算公式实际应用的各种表格和計算例題。

本书所研究的結果可应用于金属壳体，特别是貯水池凸底的設計及計算。

本书可供設計工程师、科学工作者及研究生参考。

原本說明：

书　名	НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
著　者	Г. А. Гениев, Н. С. Чаусов
出版者	Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре
出版地点及年份	Москва—1954

金屬扁壳稳定性非綫性理論的若干問題

建筑工程部設計总局　譯

編　輯：黎　鐘　　設　計：赵文林

1959年2月第1版　1959年2月第1次印刷　2,910册

787×1092・$1/_{32}$・35千字・印張$1^{11}/_{16}$・定价（10）0.30元

建筑工程出版社印刷厂印刷・新华書店发行・書号：1097

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

目　录

金屬扁殼穩定性非綫性理論的若干問題

建筑工程部設計總局　譯

建筑工程出版社出版

1959

内容提要 本书叙述有关扁壳稳定性非綫性理論的研究。书中列举了按任意旋轉面繪制的売体临界荷載的計算公式，并載有便于計算公式实际应用的各种表格和計算例題。

本书所研究的結果可应用于金属壳体，特别是貯水池凸底的設計及計算。

本书可供設計工程师、科学工作者及研究生参考。

原本說明：

书　名　НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

著　者　Г. А. Гениев, Н. С. Чаусов

出版者　Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре

出版地点及年份　Москва—1954

金属扁壳稳定性非綫性理論的若干問題

建筑工程部設計总局　譯

編　輯：黎　鐘　　設　計：赵文林

1959年2月第1版　1959年2月第1次印刷　2,910册

787×1092 • 1/32 • 35千字 • 印張1 11/16 • 定价（10）0.30元

建筑工程出版社印刷厂印刷 • 新华書店发行 • 書号：1097

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

目　录

序　言

苏联共产党第十九次代表大会关于苏联1951～1955年发展第五个五年計划的指示中规定，除了其它的建筑物以外，还要建設大型的工业企业，而在这些工业企业的承重結构中金属壳体是采用得极其广泛的。因此，研究这种壳体的計算方法是一个十分迫切的任务。

金属壳体(如貯水池凸底)，当受荷載作用时，它就处于复杂的受力状态。因为这种壳体的厚度較小，在外部荷載达到某种数值时，就会丧失它的稳定性。

在設計和計算的实践中，临界荷載的数值，一般是根据以壳体中部平面各点有无限小的位移时所产生壳体屈皺（第一类稳定性丧失)为假設的綫性稳定性(古典)理論来确定的。但是，实践証明，这个皺屈出现在最后位移的时候，而位移的数值可能大大地超过壳体的厚度。因此，根据綫性理論来計算稳定性时，在許多情况下，会得出不正确的結果，所以，就必須采用最完善的計算理論。这种理論就是由于苏联学者們的辛勤劳动而得到成功地发展的非綫性理論。

苏联在壳及板的稳定性非綫性理論方面，曾經由 И. Г. 布波諾夫、П. Ф. 巴帕科維奇、В. З. 伏拉索夫、Д. Ю. 潘諾夫、В. И. 費奥多西耶夫、Х. М. 木什塔利、А. С. 伏利米尔、Н. А. 阿路迈艾、К. З. 迦利莫夫等进行过基本的研究，并获得了重大的成就。弹性壳体理論基本方程式的总結，以及解决壳体大撓度問題非常有效的变分法的制定，都应归功于 В、З. 伏拉索夫同志。

M.A.柯尔东諾夫利用这个方法研究了許多具有实践意义的問題。在計算柔性的“鼓屈”薄膜方面，Д.Ю.潘諾夫及В.И.費奥多西耶夫做了巨大的理論研究。

本书是叙述1952年中央工业建筑科学研究院建筑力学实驗室一級科学研究員，技术科学副博士Г.А.基尼耶夫及Н.С.乔索夫所进行的扁壳稳定性非綫性理論的理論研究。

作者对于荣膺列宁勛章的国立莫斯科罗蒙諾索夫大学力学——数学系前期毕业生：С.С.烏利封、Т.Я.赫尔特和А.И.伊兹米斯齐耶娃等同志，参加本书第9节的編写工作，表示深切的謝意。

中央工業建築科學研究院

1. 考虑最后位移(在笛卡儿坐标上)对于按任意曲面繪制的扁壳狀态微分方程式的推导

設壳体中曲面在直角坐标系x，y，z 中的方程式为：

$$z=F(x, y)。\tag{1.1}$$

我們所研究的扁壳的类型就是这样的壳体，它的最小平面尺寸与其矢高的比大于5或等于5(图1)：

$$\frac{r_{\text{мин}}}{f_0}\geqslant 5。\tag{1.2}$$

对于扁壳曲面的曲率半径及扭曲率半径可由下式十分精确地求出：

$$k_1=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad k_2=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}。\tag{1.3}$$

壳体变形时，中曲面各点相应地沿x，y，z軸的位移以u、v、w表示之：

$$u=u(x, y);$$
$$v=v(x, y);$$
$$w=w(x, y)。$$

w值以后称作壳体的撓度。

正号的u、v、w值相应于壳体中曲面各点在坐标軸正方向中的位移。

当有較大位移时，中曲面的变形分量可由下列近似公式求出：

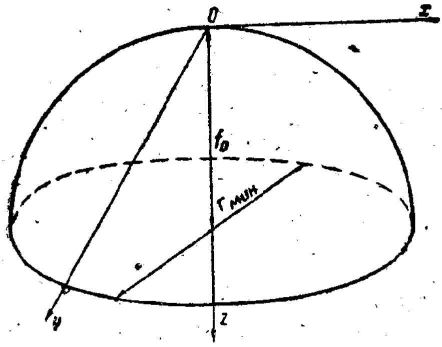

图 1

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \tag{1.5}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2tw + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y}。 \tag{1.6}$$

式中： ε_1及ε_2——在x及y軸方向中的綫性应变；

ω——剪切应变。

上式变形分量的公式載于B．З．伏拉索夫的著作[1]中。

广义內力与应变的关系由下式表示之：

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \tag{1.7}$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \tag{1.8}$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega; \tag{1.9}$$

$$M_1 = -D(\chi_1 + \mu\chi_2); \tag{1.10}$$

$$M_2 = -D(\chi_2 + \mu\chi_1); \tag{1.11}$$

$$H = D(1-\mu)\tau。 \tag{1.12}$$

式中： N_1及N_2——在单位长度上相应地作用于x及y軸方向上的法向内力(图2)；

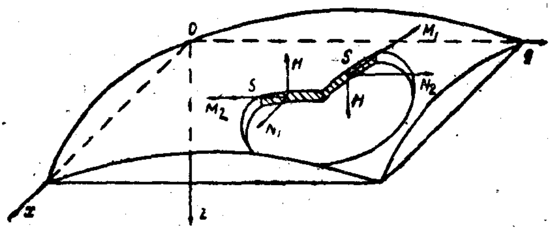

图 2

S——单位长度上的剪切内力；

E——弹性模量；

μ——波桑系数；

h——壳体的厚度；

M_1及M_2——在单位长度上作用于x及y軸方向的弯矩；

H——单位长度上的扭矩；

D——圆柱刚度：

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \tag{1.13}$$

χ_1及χ_2——壳体变形时中曲面曲率的变化

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \tag{1.14}$$

$$\chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \tag{1.15}$$

τ——壳体变形时中曲面扭曲率的变化

$$\tau=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\qquad(1.16)$$

由B．3．伏拉索夫的著作〔1〕中得出下列扁壳微体的平衡方程式：

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+X=0\ ;\qquad(1.17)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}+Y=0;\qquad(1.18)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+2S\left(t+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$

$$+N_1\left(k_1+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+N_2\left(k_2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+Z=0,\qquad(1.19)$$

式中：X，Y，Z——曲面力在相应坐标轴(x，y，z) 上的投影，我們假定：

$$X=Y=0。$$

由公式(1.4)、(1.5)及(1.6)中消去位移u及v，則得出变形連續方程式：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_1 w)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2 w)-$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(tw)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2=0。\qquad(1.20)$$

以內力素N_1，N_2及S代入方程式(1.20)中的ε_1，ε_2及ω，并根据B．3．伏拉索夫的著作〔1〕引入函数$\varphi(x, y)$：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=N_1;\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=N_2;\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-S,\qquad(1.21)$$

当$X=Y=0$时，該函数符合于方程式(1.17)及(1.18)。此时方程式(1.20)可列为以下的形式：

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_1w)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2w)-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(tw)+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2=0。\qquad(1.22)$$

研究方程式(1.22)中的各項，并以下式表示：

$$Q(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(k_1w\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2w)-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(tw\right)。$$

展开第一項，并以式(1.3)代入，则得：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_1w)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}w\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}w；$$

同样：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2w)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}w\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}w；$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(tw)=-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}w\right)=-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$$

$$-2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}-2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}w。$$

由此：

$$Q(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}w\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}w\right)-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}w\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\qquad(1.23)$$

注意到公式(1.23)的关系可将变形連續方程式(1.22)写成下列最后的形式：

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2=0。\qquad(1.24)$$

依式(1.10)、(1.11)及(1.12)将M_1、M_2及H的表达式代入方程式(1.19)。依式(1.14)～(1.16)将$\varkappa_1$、$\varkappa_2$及τ代入其中，并依式(1.21)考虑N_1、N_2及S与φ的关系，则得出扁壳微体最后的平衡方程式：

$$D\nabla^2\nabla^2 w-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\times$$

$$\times\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-Z=0。\qquad(1.25)$$

变形連續方程式(1.24)及平衡方程式(1.25)，就是具有任意曲面、当考虑較大的位移时的扁壳状态的基本微分方程式。

2. 在极坐标中扁壳状态微分方程式的推导

我們研究处在軸对称垂直荷載作用下的按任意旋轉面繪成的扁壳：$X=Y=0$；$Z=Z(r)$(图3)。

现在研究壳体对称变形的情况。旋轉壳体(图3)中曲面点$M(x, y, z)$的位置将用极坐标系r，α来确定：

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\alpha;\\ y&=r\sin\alpha;\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

$$z=f(r)。\qquad(2.2)$$

式中：　r——由壳体中曲面任意点至其旋轉軸的距离，r值的

变化由 0 到a，此处a——薄壳基底的半径。

壳体旋轉面的母綫方程式用式(2.2)表示之。

列举几个在极坐标中关于推导方程式(1.24)及(1.25)所必需的微分关系。假定所給函数仅与r有关，即：$\Phi=\Phi(r)$。

則：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}&=\frac{d^2\Phi}{dr^2}\cos^2\alpha+\frac{d\Phi}{dr}\frac{\sin^2\alpha}{2};\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}&=\frac{d^2\Phi}{dr^2}\sin^2\alpha+\frac{d\Phi}{dr}\frac{\cos^2\alpha}{r};\\ \frac{d^2\Phi}{\partial x\partial y}&=\frac{d^2\Phi}{dr^2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\frac{d\Phi}{dr}\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{r};\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

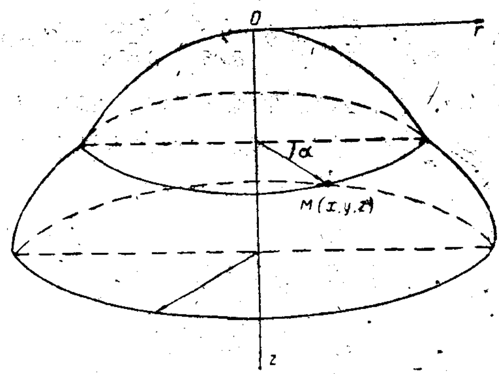

图 3

$$\nabla^2\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)\right]\right\};\qquad(2.4)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2。\qquad(2.5)$$

如果已知两个函数：

$$\Phi_1=\Phi_1(r)\text{及}\Phi_2=\Phi_2(r),$$

則：

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial y}=$$