现代数学基础丛书

Banach 代数

李炳仁 著

科学出版社

现代数学基础丛书

Banach 代数

李炳仁 著

科学出版社

1992

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了 Banach 代数的基本理论以及和其他一些领域的联系．主要内容包括：Banach 代数的一般理论、交换 Banach 代数、交换 Banach 代数与多复变函数理论、Banach 代数与K理论、Banach*代数、抽象调和分析的基础．

本书可供高校数学系师生以及数学工作者阅读参考．

现代数学基础丛书
Banach 代数
李炳仁 著
责任编辑 徐宇星 林 鹏
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1992 年 11 月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1—1 700 字数：272 000

ISBN 7-03-003023-0/O · 556

定价：7.70 元

《现代数学基础丛书》编委会

序

泛函分析是在本世纪代数学多方面发展的基础上成长起来的．在本世纪 30 年代末，I. M. Gelfand 进一步综合了代数学与 Banach 空间的一般理论，以此来处理经典分析中的许多问题，创造了一个新的方向——Banach 代数的理论，它被誉为泛函分析的最大成就之一．

本来经典分析中早已提供了 Banach 代数的例子，即分析学中出现许多带有乘法构造的 Banach 空间(函数空间)，并且乘法是连续的．尽管这些例子提供了 Banach 代数理论的背景，但它的诞生相对来说还是比较迟的，其原因是没有找到合适的代数工具．

在 Gelfand 之前，已有人研究带有乘法构造的 Banach 空间．然而 Gelfand 系统地把代数的理想理论与 Gelfand-Mazur 定理结合起来，从而奠定了 Banach 代数一般理论的基础．

40 年代以来，Banach 代数理论得到了迅猛的发展．它的定义简单而自然，但应用极为广泛，并且与近代数学的许多领域都有联系．它不仅是分析学的重要工具，而且其本身也是重要的研究领域．简单地说，Banach 代数理论发展沿着的两条主线，分别表示了分析与代数的影响．分析的重点在于对特殊的 Banach 代数进行研究，推广函数理论及调和分析中有关部分至更一般的 Banach 代数；而代数的重点自然在于构造论的各个方面．这里的代数是不加有限性要求的，因此也可以说为代数学提供了新的工具．

本书共分六章．第一章叙述 Banach 代数的一般理论；第二章主要是交换 Banach 代数的 Gelfand 理论；第五章研究带有 * 运算的 Banach 代数．这三章基本上概括了 Banach 代数理论的主要部分．在本书中强调了与其他数学领域之间的联系，第三章

叙述交换 Banach 代数理论与多个复变量的函数理论之间的一些联系；第四章把拓扑K理论推广到一般 Banach 代数的情形，避免向量丛的方法而得到拓扑K理论(复情形)的主要结果；第六章用 Banach 代数的方法，处理局部紧群上的调和分析，特别给 Pontryagin 对偶性定理以简单的分析证明.

特别要强调的是，在不作特别说明时，本书中所涉及到的代数、线性空间等都是指在复数域上的.

本书的形成过程是比较长的. 1983 年，作者在北京大学数学系开设了研究生的专门课程，讲述了其中部分内容；1984—1985 年，在中国科学技术大学数学系开设了泛函分析课程，对于 Banach 代数理论有重点地进行了介绍；1985 年夏，在中国科学院数学研究所举办了暑期讲习班，并撰写了 Banach 代数的讲义，基本上就是本书第一、二、三、五章的内容；1987 年夏，又在中国科学院数学研究所举办了K理论讲习班，第四章的内容就是其中的一部分.

阅读本书并不需要许多的准备知识，有初步的泛函分析知识即可. 第三、四章虽然涉及其他领域，但本书尽可能地做到了自给自足. 对于第六章，需要读者具备一般的积分与测度理论的知识. 作者希望，本书能够成为研究生的教材之一.

本书的写作，曾得到复旦大学数学系严绍宗教授与北京大学数学系张恭庆教授的鼓励与支持，在此谨表谢意. 在本书的校勘过程中，得到中国科学院数学研究所江心晖同志的大力帮助，这里深表感谢.

本书难免有缺陷及不足之处，敬请读者指正.

作　者

1991 年 4 月于北京

中国科学院数学研究所

记　号　表

目　　录

第一章　Banach 代数的一般概念

本章将简要地研究 Banach 代数的一般理论，给出它的核心部分，因此，我们并不追求过多的概念与结果的引入. §1 给出 Banach 代数自然而简单的定义；§2 研究谱，最重要的结果是定理 1.2.7 指出元素的谱集是非空紧的，并且谱的极大模就是谱半径；§3 研究可逆元群及其连接单位元的主分量，并给出主分量中元素的一般形式；§4 首先给出一般代数 Jacobson 根基，然后考察 Banach 代数情形时的进一步性质；§6 定义 Banach 代数中元素的函数，指出谱映照性质及复合定理等；§7 是重要的 Gelfand-Mazur 定理，它将在交换理论中起决定性的作用；§8 研究实情形(已经在引言中说明，本书在不作特别说明的部分，均在复数域上进行工作)；§9 是较晚才出现的重要的 Johnson 定理，指出半单纯代数上 Banach 代数范数在等价意义下是唯一的；§10 讨论与单位元起相似作用的逼近单位元，以及元素的因子分解.

§1. 定义与例子

设 A 是 Banach 空间，同时是代数（即在 A 中定义有乘法运算，它满足结合律，并与线性运算满足分配律等）. 如果乘法与 A 中的(由范数产生的)拓扑没有关系，研究将很难深入下去. 因此，我们至少要求乘法对每个变量是连续的，换言之，假定对任意固定的 $a\in A$，

$$\cdot \to a\cdot \text{ 及 } \cdot \to \cdot a$$

是 A 中的连续(线性)映象.

对每个 $a\in A$，定义 $L_a: A\to A$，$L_a b = ab$，$\forall b\in A$. 依上

面的假定，L_a 是 A 中的连续线性算子. 我们说对任意固定的 $b\in A$,

$$\sup\{\|L_a b\| \mid a\in A, \|a\|\leqslant 1\}<\infty.$$

否则，将有 $\|a_n\|\leqslant 1$，而 $\|a_n b\|=\|L_{a_n}b\|>n, \forall n$.
于是，

$$\left\|\frac{a_n}{n}b\right\|>1, \ \forall n,$$

但 $\frac{a_n}{n}\to 0$，这与连续性的假定相矛盾.

今依一致有界定理，

$$\sup\{\|L_a\| \mid a\in A, \ \|a\|\leqslant 1\}=K<\infty,$$

从而，$\|ab\|\leqslant K\|a\|\cdot\|b\|$, $\forall a,b\in A$.

如果赋予 A 以等价的新范数 $\|\cdot\|'=K\|\cdot\|$，则将有 $\|ab\|'\leqslant\|a\|'\cdot\|b\|', \forall a,b\in A$.

因此,我们一般地作如下的定义.

定义 1.1.1 A 称为 Banach 代数,指它是 Banach 空间,其中定义有乘法,使得

$$\|ab\|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|, \ \forall a,b\in A.$$

A 中的元素 e (有时也记作 1, 但需注意它与数值 1 的区别) 称为单位元，指

$$ea=ae=a, \ \forall a\in A.$$

显然, A 如果有单位元,则它是唯一的.

命题 1.1.2 设 A 是 Banach 代数,则 $(A\dotplus\mathbb{C})$ 依自然的乘法可以成为有单位元的 Banach 代数，并且保持 A 中的范数不变.

事实上，只须令 $\|a+\lambda\|=\|a\|+|\lambda|$, $\forall a\in A$, $\lambda\in\mathbb{C}$ 即可.

注 $(A\dotplus\mathbb{C})$ 上满足要求的范数未必唯一，但它们都是相互等价的.

定理 1.1.3 设 A 是有单位元 e 的 Banach 代数，并且 $\|e\|=1$ (这样的 Banach 代数称为单位的),则 e 是 A 的单位球

$$S = \{a \in A \mid \|a\| \leqslant 1\}$$

(它当然是凸子集)的端点.

证　依假定，易见对任意的 $a \in A$，有 $\|a\| = \|L_a\|$，并且 $\|L_a^*\| = \|L_a\|$，这里 $L_a^*: A^* \to A^*$，

$$(L_a^* f)(b) = f(ab), \ \forall b \in A, \ f \in A^*.$$

今设 $a \in A$，使得 $\|e \pm a\| \leqslant 1$，于是，

$$\|L^* \pm L_a^*\| \leqslant 1,$$

这里 L_e^* 是 A^* 中的恒等算子. 对任意的 $f \in A^*$，令

$$f_1 = (L_e^* + L_a^*)f, \ f_2 = (L_e^* - L_a^*)f,$$

则 $\|f_i\| \leqslant \|f\|$，$i = 1,2$，及 $2f = f_1 + f_2$. 当 f 是 A^* 的单位球的端点时，将有 $f = f_1 = f_2$，因此，$L_a^* f = 0$. 依 Krein-Milmann 定理及 A^* 的单位球的弱$*$紧性，A^* 的单位球等于其端点全体的弱$*$凸闭包. 由此可见，$L_a^* = 0, a = 0$.

前一段的论证说明：若 $a \in A$，满足 $\|e \pm a\| \leqslant 1$，则必有 $a = 0$. 今若

$$e = tb + (1-t)c, \ \|b\| \leqslant 1, \ \|c\| \leqslant 1, \ 0 < t \leqslant 1/2,$$

令

$$c' = c, \ b' = 2tb + (1-2t)c, \ a = e - b',$$

则

$$\|e - a\| = \|b'\| \leqslant 1, \ \|e + a\| = \|c\| \leqslant 1,$$

因此，$a = 0$，$e = b = c$. 从而，e 是 S 的端点. 证毕.

注　本定理属于 Kakutani. 如果 A 是 c^* 代数，S 有端点，则 A 必有单位元. 但对于一般的 Banach 代数，这未必成立(见[51]).

下面举出几个 Banach 代数的例子.

例 1　设 X 是 Banach 空间，$B(X)$ 表示 X 中有界线性算子的全体，依算子的范数，$B(X)$ 自然地成为有单位元的 Banach 代数.

例 2　设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，$C(\Omega)$ 表示 Ω 上复值连续函数的全体，依极大模的范数，$C(\Omega)$ 自然地成为有单位元的交

换 Banach 代数。

例 3 设 $A(D)$ 为在开单位圆 D 中解析，并且在闭单位圆 $\bar{D}$ 上连续的函数全体，依极大模的范数，$A(D)$ 是有单位元的交换 Banach 代数，称之为 Disk 代数。

例 4 设 Γ 是单位圆周，Γ 上的 Hardy 空间定义为

$$H^p(\Gamma)=\left\{f\in L^p(\Gamma)\,\middle|\,\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta=0,\ \forall n>0\right\}.$$

这里 $L^p(\Gamma)$中的测度是 Lebesgue 测度，$1\leqslant p\leqslant\infty$。可以证明

$$H^\infty(\Gamma)\subset\cdots\subset H^p(\Gamma)\subset\cdots\subset H^1(\Gamma),$$

以及对于 $1\leqslant p<\infty$，$H^p(\Gamma)$ 是 $\{e^{in\theta}|n\geqslant 0\}$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中张成的线性闭子空间；对于 $p=\infty$，$H^\infty(\Gamma)$ 是 $\{e^{in\theta}|n\geqslant 0\}$ 在 $L^\infty(\Gamma)$ 中张成的线性弱$*$闭子空间(注意，$L^1(\Gamma)^*=L^\infty(\Gamma)$)。

关于它们进一步的性质，有兴趣的读者可以参看 [24]。

现在，我们来指出，$H^\infty(\Gamma)$ 对于函数的乘法是封闭的。

首先注意这样的事实，设 $\varphi\in L^\infty(\Gamma)$，$M_\varphi$ 表示 $L^2(\Gamma)$ 中乘以 φ 的算子，则当且仅当 $M_\varphi H^2(\Gamma)\subset H^2(\Gamma)$，$\varphi\in H^\infty(\Gamma)$。

事实上，如果 $M_\varphi H^2(\Gamma)\subset H^2(\Gamma)$，由于 $1\in H^2(\Gamma)$，因此，$M_\varphi 1=\varphi\in H^2(\Gamma)$。又 $\varphi\in L^\infty(\Gamma)$，所以，$\varphi\in H^\infty(\Gamma)$。反之，如果 $\varphi\in H^\infty(\Gamma)$，则

$$\varphi e^{in\theta}\in H^2(\Gamma),\ \forall n\geqslant 0,$$

因此，$M_\varphi\{e^{in\theta}|n\geqslant 0\}\subset H^2(\Gamma)$，即得 $M_\varphi H^2(\Gamma)\subset H^2(\Gamma)$。

今若 $\varphi,\psi\in H^\infty(\Gamma)$，依上面所证明的事实，

$$M_{\varphi\psi}H^2(\Gamma)=M_\varphi(M_\psi H^2(\Gamma))\subset H^2(\Gamma).$$

又 $\varphi\psi\in L^\infty(\Gamma)$，因此，$\varphi\psi\in H^\infty(\Gamma)$。

由此可知，依本质上界(关于 Lebesgue 测度)的范数，$H^\infty(\Gamma)$ 是有单位元的交换 Banach 代数。

例 5 Wiener 环

$$W=\left\{f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k e^{ikt}\,\middle|\,\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\alpha_k|<\infty\right\},\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

即W为绝对收敛的三角级数全体。依

$$\|f\| = \sum_{k\in Z} |\alpha_k|,$$

W是有单位元的交换 Banach 代数.

显然,W等距同构于 $l^1(Z)$, 这里 $l^1(Z)$ 中的乘法定义为

$$(\alpha_k)\cdot(\beta_k) = \left(\sum_{n\in Z} \alpha_{k-n}\beta_n\right).$$

例 6 在 $L^1(R)$ 中以卷积为乘法

$$(f*g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(s-t)dt,$$

则 $L^1(R)$ 是交换的 Banach 代数(注意 Fubini 定理),但它没有单位元.

更一般地,设G是局部紧的拓扑群,μ是G上左不变的 Haar 测度,在 $L^1(G)=L^1(G,\mu)$ 中以卷积为乘法

$$(f*g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)d\mu(t),$$

则 $L^1(G)$ 是 Banach 代数,它称为G的群代数.

例 7 设S是半群, $\alpha(\cdot)$ 是S上的正值函数,并满足

$$\alpha(st) \leqslant \alpha(s)\alpha(t), \quad \forall s,t\in S.$$

记 $l^1(S,\alpha)$ 为S上满足下面条件的复值函数f的全体,

$$\sum_{s\in S} |f(s)|\alpha(s) < \infty.$$

依卷积,

$$(f*g)(s) = \begin{cases} \sum\limits_{tu=s} f(t)g(u) \\ 0, \text{如 } tu=s \text{ 无解} \end{cases}$$

为乘积,及 $\|f\| = \sum\limits_{s\in S} |f(s)|\alpha(s)$; $l^1(S,\alpha)$ 将成为 Banach 代数.

当 $\alpha=1$, 记 $l^1(S)=l^1(S,1)$, 称为S的离散半群代数.

§2. 谱与谱半径

设A是 Banach 代数。

定义 1.2.1 对 $x\in A$，称 $\nu(x)=\inf\limits_{n}\|x^n\|^{1/n}$ 为 x 的谱半径.

命题 1.2.2 $\nu(x)=\lim\limits_{n}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\|x\|$.

证 无妨设 $x\neq 0$。对任意的 $\varepsilon>0$，选定正整数 m，使得

$$\|x^m\|^{1/m}\leqslant\nu(x)+\varepsilon.$$

任意的正整数 n 可唯一地写作 $n=pm+q$，这里 $0\leqslant q\leqslant m-1$。显然当 $n\to+\infty$ 时，$p\to+\infty$，及 $\frac{mp}{n}\to 1$，于是

$$\begin{aligned}\|x^n\|^{1/n}=\|x^{mp}\cdot x^q\|^{1/n}&\leqslant\|x^m\|^{p/n}\cdot\|x\|^{q/n}\\&\leqslant(\nu(x)+\varepsilon)^{pm/n}\|x\|^{q/n}\to\nu(x)+\varepsilon,\end{aligned}$$

即$\overline{\lim\limits_{n}}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\nu(x)+\varepsilon$。另一方面，$\|x^n\|^{1/n}\geqslant\nu(x)$，$\forall n$，从而，

$$\nu(x)\leqslant\underline{\lim_{n}}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\overline{\lim_{n}}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\nu(x)+\varepsilon,$$

$\varepsilon>0$ 是任意的，因此得证。

命题 1.2.3 $\nu(\alpha x)=|\alpha|\nu(x)$，$\nu(x^k)=\nu(x)^k$，$\nu(xy)=\nu(yx)$，$\forall x,y\in A$，$\alpha\in\mathbf{C}$ 及正整数 k。

事实上，只须注意

$$\|(xy)^n\|^{1/n}\leqslant\|x\|^{1/n}\cdot\|(yx)^{n-1}\|^{1/n}\cdot\|y\|^{1/n},\ \forall n,$$

即可得证。

命题 1.2.4 设 $xy=yx$，则

$$\nu(xy)\leqslant\nu(x)\nu(y),\ \nu(x+y)\leqslant\nu(x)+\nu(y).$$

证 第一个不等式由 $xy=yx$ 是显然的。

今取 $\alpha>\nu(x)$，$\beta>\nu(y)$，令 $a=x/\alpha$，$b=y/\beta$，于是

$$\|(x+y)^n\|=\left\|\sum_{k=0}^{n}c_n^k x^k y^{n-k}\right\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} c_n^k \alpha^k \beta^{n-k} \|a^k\| \cdot \|b^{n-k}\|.$$

对每个 n，选 n', n''，使得 $n = n' + n''$，并且

$$\|a^{n'}\| \cdot \|b^{n''}\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|a^k\| \cdot \|b^{n-k}\|,$$

从而，

$$\|(x+y)^n\|^{1/n} \leqslant (\alpha+\beta)\|a^{n'}\|^{1/n} \cdot \|b^{n''}\|^{1/n}. \qquad (1)$$

选子列 $\{n_m\}$，使得 $\delta = \lim\limits_m n_m^{-1} n_m'$ 存在．自然 $0 \leqslant \delta \leqslant 1$，及 $\lim\limits_m n_m^{-1} n_m'' = 1 - \delta$.

如果 $\delta \neq 0$，则 $n_m' \to \infty$，从而

$$\lim_m \|a^{n_m'}\|^{1/n_m} = \nu(a)^\delta = \left(\frac{\nu(x)}{\alpha}\right)^\delta \leqslant 1.$$

如果 $\delta = 0$，则 $\lim\limits_m \|a^{n_m'}\|^{1/n_m} \leqslant \lim\limits_m \|a\|^{n_m'/n_m} = 1$. 无论何种情形,我们都有

$$\lim_m \|a^{n_m'}\|^{1/n_m} \leqslant 1, \quad \lim_m \|b^{n_m''}\|^{1/n_m} \leqslant 1.$$

因此依(1)，$\nu(x+y) \leqslant \alpha + \beta$. 进而

$$\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y).$$

证毕.

命题 1.2.5 设 A 有单位元 e，及 $a \in A$.

(1) 如果 $|\lambda| > \nu(a)$，则 $(a - \lambda e)$ 在 A 中有逆,并且

$$(a - \lambda e)^{-1} = -\left(\lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n\right).$$

等式右边的级数依范数绝对收敛;

(2) 如果 $\nu(e - a) < 1$，则 a 有逆,并且可表示成依范数绝对收敛的级数

$$a^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - a)^n;$$

(3) 如果 $(a - \lambda_0 e)$ 有逆,当