

物理譯報叢刊

有关人造地球卫星的运动与 科学研究的若干问题

中国物理学会編輯
科学出版社出版

1958



DS76-50

物理譯報叢刊
有关人造地球卫星的运动与
科学研究的若干問題

編輯者：中 国 物 理 学 会

出版者：科 学 出 版 社

北京朝陽門大街117号
北京市書刊出版业營業許可証出字第061号

印刷者：中 国 科 学 院 印 刷 厂

总經售：新 华 書 店

1958年9月第一版

書号：1385 印张：13

1958年12月第二次印刷

开本：787×1092 1/16

(京) 1.401—2.400

字数：318,000

定价：(10) 2.00 元

目 录

編者的話	(1)
与发射人造地球卫星有关的几个变分問題	(2)
人造地球卫星存在時間的确定和对卫星軌道的长期摄动的研究	(26)
关于人造卫星在地球的非有心引力場中和大气阻力下的运动	(40)
地球物理因素对卫星运行的影响	(47)
关于向月球飞行的若干动力学問題	(58)
利用人造地球卫星驗證普遍相对論	(93)
作为人造地球卫星的电源的硅日光电池	(96)
原初宇宙射綫成分的研究	(101)
宇宙射綫变化的研究	(113)
太阳短波紫外輻射的研究	(122)
在巨大高度上大气成分的火箭研究	(134)
高层大气中压力的測量	(145)
利用人造地球卫星測量高层大气压力和密度的問題	(150)
大气电离层离子成分的研究	(166)
沿人造地球卫星的軌道測量正离子的浓度	(175)
用火箭及人造地球卫星研究星际間固态物質	(185)
地球大气上层靜电場的測量	(194)

編 者 的 話

1957年10月4日,苏联成功地发射出人类有史以来第一顆人造地球卫星,这颗卫星是直径58厘米的圓球,重83.6公斤,装置有二台无綫电发射机。同年11月3日,苏联又成功地发射出第二顆人造地球卫星,重量为508.3公斤,装备的仪器除了两台无綫电发射机而外,还有研究太阳輻射和宇宙綫等的仪器,以及实验动物——小狗“莱伊卡”。今年5月15日,苏联第三顆人造地球卫星又上了天,这颗新的大卫星重1327公斤,比第一个重15倍,比第二个重1.6倍,装备更为齐全,有研究一系列地球物理問題和物理問題的仪器、遙測系統、一台无綫电发射机、化学电源装备和太阳能电池。

三次苏联人造地球卫星的发射成功,而且在重量、大小、高度和科学仪器等方面,都是一次比一次更优越,这表明苏联科学技术不断地有了新的发展和成就,同时还標誌着东风已經压倒西风,并且还在繼續压倒西风。大家知道,美国費了九牛二虎之力才发射了三顆小卫星,体积又小,科学价值又低,根本不能和苏联的人造卫星相比,而且在以后又发射的卫星又遭到了失敗。

根据国际地球物理年的計劃,苏联的前两个卫星对大气高层和宇宙空間进行了科学的考察,并积累了极其广泛的材料,对世界科学作出了重大的貢獻。現在,第三个卫星在前两个卫星所取得的成就的基础上,进一步进行对大气高层和宇宙空間的科学考察和广泛研究,从而将使人类这方面的科学研究进入一个新阶段。这是人类向宇宙空間进軍的又一胜利,也是世界科学研究的又一福音。中国人民热烈祝賀苏联在科学技术方面的这一新成就。

为了帮助我国科学工作者更好地明瞭人造地球卫星的科学意义,本专集特地翻譯刊載了苏联“物理学进展”1957年9月人造地球卫星专号的全部論文。这些論文还是在第一顆人造卫星发射之前发表的,离現在已有一年左右;我們未能更早地把它們介紹給我国讀者,这是我們深以为憾的。

本专集所包括的17篇論文基本上可分为两大类。第一类专論涉及人造地球卫星本身的发射和运行的問題,本专集的第一至第五篇論文就屬於这一类。这五篇論文主要討論各种因素(太阳、月球和各种地球物理因素)对卫星軌道的影响。

第二类包括其余的12篇論文,它們討論利用人造地球卫星所可能进行的各种科学研究,如測量高空大气的密度、压力、电离层、以及宇宙綫等等。

当然,这17篇論文不可能涉及人造地球卫星的全部問題,特別是在卫星发射后所得出的实验結果,当然还有待于以后的报导。我們希望,这些专論能使讀者們对人造卫星先有一定的概念。以后我們还将陸續选譯这一方面的論文。

本专集的論文主要由中国科学院力学研究所、地球物理研究所和北京大学的几位同志协力譯出,在此,我們謹向他們的大力协助表示謝意。

1958年5月23日

与发射人造地球卫星有关的几个变分问题

奥霍齐姆斯基 埃涅耶夫

Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев, УФН 63, 5 (1957)

本文讨论把人造地球卫星运送到轨道上去的问题。设想卫星的运送是用一级或多级火箭加速器来实现的。现在所要研究的是：为了保证以最小量的燃料消耗来把卫星运送到预定的轨道上去，喷气发动机推力的方向随时间而变化的规律应当是怎样的。同时也要找出最有利的燃料消耗方式。

上述问题的解决是在一系列简化的假定下进行的，它使我们对于运送卫星到轨道上去的最佳条件的特点能有明确的概念，并且能够指出，通过什么途径可以得到具有最小初始重量的加速器。

§1 中讨论了同时选择推力方向控制方案和燃料消耗方式的问题。§2 中在燃料消耗方式为已知的假定下，对具有不同级数的多级加速器最佳方案的选择问题进行研究。§3 中把运送卫星到轨道上去的问题推广到在中心引力场内运动的情形，并考虑到地球的旋转。

§1. 最佳燃料消耗方式和推力方向最佳方案的选择

在解决上述问题时，假定没有空气动力，并假定地球的引力场是面平行的。第一个假定的

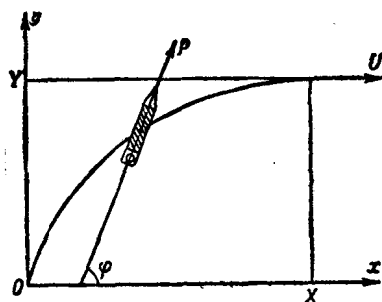


图 1

根据是当把卫星送上轨道时，大部分弹道处于空气动力很小的高空大气层里。如果我们假定弹道的尺寸和地球的半径相比很小，那么就可以用面平行的引力场代替地球的中心引力场。

上面两个假定实际上只能近似地成立。然而在这种近似下来解决问题仍旧是很有意思的，因为这样可以很简单地得到问题的完全解答，分析所得的结果，并了解现象的基本规律。

带加速器的卫星的运动方程投影到直角坐标系上可以

写成(图1)：

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p \cos \varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= p \sin \varphi - g, \\ \frac{dy}{dt} &= w, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 u 和 w 是速度在水平方向和垂直方向的投影, p 是反作用力的加速度的大小, φ 是推力对水平方向的倾角. 因为可以认为推力的方向是沿着加速器的纵轴, 所以可以把角 φ 理解为加速器的轴对水平方向的倾角(俯仰角). 方程(1.1)中的 x 和 y 是水平坐标和垂直坐标.

方程组(1.1)的最后一个方程只是用来决定坐标 x 的. 如果对飞行距离不作任何限制, 那么在解变分问题时, 可以略去这个方程, 因为在其他的方程里不包含坐标 x .

考虑卫星在理想情形下得到的速度 V (也就是当卫星上所受的力除反作用力外没有其他任何力的时候所得到的速度). 我们有:

$$V = \int_0^t p \, dt;$$

由此得:

$$p = \frac{dV}{dt}.$$

代入方程组(1.1), 并把前三个方程写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{dV}{dt} \cos \varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{dV}{dt} \sin \varphi - g, \\ \frac{dy}{dt} &= w. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

数量 V 是在加速和把卫星送上轨道的过程中所可能给予卫星的可供支配的速度.

运动方程(1.2)的右方包含两个不确定的时间函数 $V(t)$ 和 $\varphi(t)$. 我们的任务是要选择这些函数, 使得在运送阶段的终了时, 在给定的高度获得最大的水平分速. 由于互易性, 所得到的解也保证在给定的速度时达到最大的高度, 以及以最少燃料消耗达到给定的高度和速度.

现在来陈述边界条件. 假定在运动起始 $t = 0$ 时有某个高度 y_0 和某个水平分速 u_0 及垂直分速 w_0 . 在运动起始时速度 V 自然是取为零. 在运动终了 $t = T$ 时, 高度应当是 $y = Y$, 速度应当是水平方向, 即 $w = 0$. 我们假设 V 在运动终了时等于某一个固定的数值 V_k . 这样也就等于假定说, 有一定的理想速度的储藏, 需要以最合理的方式利用它们. 如果认为排气速度的大小或单位推力的的大小不依赖于每秒的燃料消耗量, 那么总理想速度 V_k 决定于加速器的起始重量和最终重量之比, 而不依赖于燃料消耗方式. 这就是说, 给出运动终了时 V_k 的一定数值, 就相当于给出起始重量和最终重量的一定比值, 而在卫星重量为给定的情形下, 这就表示给定了加速器的起始重量.

这样, 边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } t = 0 \text{ 时 } u &= u_0, \quad w = w_0, \quad y = y_0, \quad V = 0. \\ \text{当 } t = T \text{ 时 } w &= 0, \quad y = Y, \quad V = V_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

运送阶段的运动时间 T 或者可以认为是给定的, 或者可以从运动终了有最大速度这一条件来选定. 同时可以认为, 运送阶段的运动时间 T 和发动机工作的时间 T_* 不同, 而只满足条件

$$T \geq T_*.$$

其中 T_* 是給定的量。

除連續条件外,我們不对函数 $\varphi(t)$ 作任何其他限制。函数 $V(t)$ 作为一个非負量的积分,应当認為是非減小的函数。图 2 示 V 和时间关系的大致图形。水平綫段相应于发动机不工作时的运动。垂直綫段相应于部分燃料瞬間消耗时的运动。如果

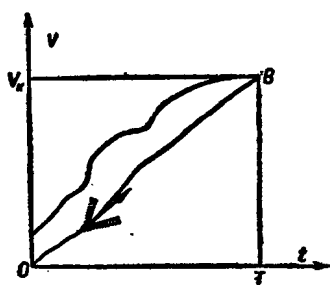


图 2

不限制每秒燃料消耗量的多少,那么在 (t, V) 平面上的可取曲綫是联结点 O 和点 B 的任意綫(图 2),在这条綫上 V 应当是非減小的。如果对每秒燃料消耗量加以限制,那么可取曲綫要滿足更严格的条件,就是从曲綫上某点开始的曲綫元应当处在某个角的内部或它的边上,这个角的上边相应于最大的每秒燃料消耗量的运动,而它的下边相应于最小每秒燃料消耗量的运动。在极限的情形,当可能的最大消耗量是无限大时(瞬間燃烧),角的上边垂直向上,而在可能的最小消耗量等于零时(发动机关上时的运动),角的下边是水平綫段。

把(1.2)的第一个方程由 0 到 T 积分,我們得到加速阶段終了的速度:

$$u = \int_0^T \frac{dV}{dt} \cos \varphi dt + u_0. \quad (1.4)$$

此外,我們有另两个微分关系的方程。把它們改写成:

$$\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin \varphi + g = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{dy}{dt} - w = 0. \quad (1.6)$$

我們还有边界条件(1.3)。把 u_0 和 w_0 表示作:

$$u_0 = v_0 \cos \vartheta_0; \quad w_0 = v_0 \sin \vartheta_0. \quad (1.7)$$

将 V_0 当作是已知的,并改变角 ϑ_0 , 就可从問題的解得到最佳的初速向量傾角的价值。

作出輔助汎函

$$J = v_0 \cos \vartheta_0 + \int_0^T \left\{ \frac{dV}{dt} \cdot \cos \varphi + \lambda_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin \varphi + g \right) + \lambda_2 \left(\frac{dy}{dt} - w \right) \right\} dt, \quad (1.8)$$

其中 λ_1 和 λ_2 是暂时未定的时间函数。改变初始角 ϑ_0 和运送阶段的运动时间 T , 来計算上述汎函的变分。

对所有包含在內的函数和变化参数进行变分, 并利用边界条件, 我們得到下面的变分表式:

$$\begin{aligned} \delta J = & -v_0 (\sin \vartheta_0 + \lambda_1 \cos \vartheta_0) \delta \vartheta_0 + g \lambda_1 \delta T + \\ & + \int_0^T \left\{ (-\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \frac{dV}{dt} \delta \varphi + \left[-\frac{d}{dt} (\cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi) \right] \delta V - \right. \\ & \left. - \frac{d\lambda_2}{dt} \delta y - \left(\frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_2 \right) \delta w \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

如果初始角并不固定,而是由最佳条件来选取的,那么在初始角 ϑ_0 和运动开始时的 $\lambda_1(t)$ 之間

有关系式:

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = -\lambda_1|_{t=0}, \quad (1.10)$$

这个关系式由(1.9)式积分号前第一个式子等于零所给出。令第二个式子等于零,得到加速阶段終了时的条件

$$\lambda_1|_{t=T} = 0. \quad (1.11)$$

如果运动时间是固定的,那么 $\delta T = 0$, 上面对函数 $\lambda_1(t)$ 写出的条件就没有了。

我们这样来决定 λ_1 和 λ_2 : 使积分号下 δy 和 δw 的因子等于零, 从而从汎函变分的式子里取消这些变分。这样做之后, 变分的表式为:

$$\delta J = \int_0^T \left\{ (-\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \frac{dV}{dt} \delta \varphi + \left[-\frac{d}{dt} (\cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi) \right] \delta V \right\} dt, \quad (1.12)$$

其中函数 λ_1 应当由方程

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_2, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

和边界条件(1.11)来决定, 条件(1.11)在 T 不固定的情形必须考虑。

从(1.13)的第二个方程得:

$$\lambda_2 = \text{常数}. \quad (1.14)$$

把这个值代入(1.13)的第一个方程, 得:

$$\lambda_1 = C_1 + C_2 t, \quad (1.15)$$

其中 C_1 和 C_2 是两个常数。当 T 不固定时, 我们有:

$$C_1 + C_2 T = 0,$$

因此 λ_1 的表式化为:

$$\lambda_1 = -C_2(T - t). \quad (1.16)$$

公式(1.15)和(1.16)表明, λ_1 是时间的线性函数。我们应注意到, 这两个公式包含同样数目的任意常数, 因为在公式(1.16)中 C_1 被未知量 T 所代替。

令公式(1.12)中积分号下变分 $\delta \varphi$ 的表式等于零, 得:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\lambda_1, \quad (1.17)$$

利用公式(1.15), 求出俯仰角最佳方案的表式

$$\operatorname{tg} \varphi = -(C_1 + C_2 t). \quad (1.18)$$

如果 T 不固定, 那么, 根据(1.16), 我们有:

$$\operatorname{tg} \varphi = C_2(T - t). \quad (1.19)$$

因此, 如果时间不固定, 俯仰角在运动終了就应该等于零, 也就是说, 加速器的轴应当是水平方向。

还可以把最佳方案的公式改写成:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t, \quad (1.20)$$

其中 φ_0 是在初始时刻的俯仰角。

因此可得出下面的結論:在最佳方案中,俯仰角的正切应当是時間的綫性函数。包含在普遍表式中的两个参数,应当选择得使边界条件得到满足。

比較公式(1.10)和(1.17),可以看出,最佳初始角 ϑ_0 必須适合条件

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (1.21)$$

这就是說,在初始时刻,加速器縱軸的方向應該和初始速度的方向一致。如果 ϑ_0 是預先給定的,这个条件可以不被滿足。

公式(1.18)–(1.20)給出俯仰角在任意 $V(t)$ 情形时的变化規律。現在我們以最好的方式选择函数 $V(t)$,假定对每一个这样的函数都取一个最佳的俯仰角变化規律。

这时汎函的变分为:

$$\delta J = \int_0^T \left\{ - \left[\frac{d}{dt} (\sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi) \right] \delta V \right\} dt. \quad (1.22)$$

在滿足微分条件(1.5)和(1.6)时,汎函(1.4)和(1.8)相同。如果这些条件在进行变分时同样滿足,那么这两个汎函的变分也应当相同。因此,在改变燃料消耗方式以及相应地改变函数 $V(t)$ 的时候,公式(1.22)可以用来計算加速阶段終了时的速度变分 δU 。必須指出,只是当所有 V 的变化在时刻 T 以前結束时,变分表式(1.22)才成立。

可以把公式(1.22)变换成:

$$\delta U = \int_0^T \Phi(t) \cdot \delta V \cdot dt, \quad (1.23)$$

其中

$$\Phi = \frac{C_2(\operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t)^2 + 1}}, \quad (1.24)$$

或

$$\Phi = C_2 \sin \varphi. \quad (1.24a)$$

公式(1.23)和(1.24)表明,积分号下变分 δV 的乘数 $\Phi(t)$ 只依赖于時間。在区間 $(0, T)$ 內, $\Phi(t)$ 或者在所有時間內不改变符号,或者改变符号,并且公式(1.24)表明, Φ 的符号变化是和分子的符号变化相联系,因此只可能变号一次。

根据函数 $\Phi(t)$ 上述的性質,不难知道,汎函的极值由具有跳跃变化的函数 $V(t)$ 所达到。

現在分別考虑各种可能情形。

a) Φ 在所有時間內是正的(图 3a)。在这种情况下,全部燃料儲藏应当在运动开始的瞬間燃烧,否則, (t, V) 平面任何其他可取曲綫可能向上变化,因此 $\delta U > 0$,这表示在运送阶段終了时速度增加。

б) Φ 在所有時間內是負的(图 3б)。与前面相似,我們得出,这种情形下燃料消耗的最佳方式是全部燃料儲藏在运送段終了 $t = T$ 的一瞬間消耗。

в) Φ 的符号由正变到負(图 3в)。在这种情况下,汎函的极值只可能由折綫所达到,折綫是由垂直

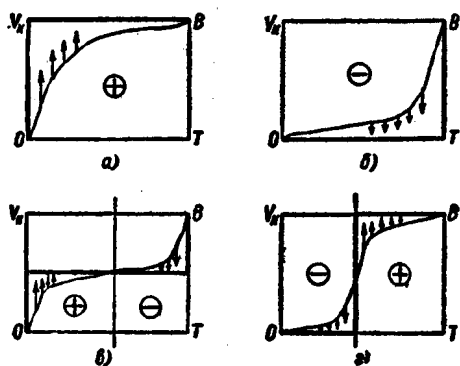


图 3

綫段、水平綫段和垂直綫段組成的。对其他任何可取曲綫,可以在每一个不变符号的区域内变化这些曲綫,使得最終速度的增量是正的。为了决定水平綫段的位置,我們写出当水平綫段作垂直移动时、最終速度变分的表式。我們得到:

$$\delta U = \delta V \int_0^T \Phi(t) dt. \quad (1.25)$$

如果积分值是正的,那么这种情形类似于情形 a),如果是負的,則类似情形 б). 如果积分值等于零,那么汎函的极值可能在某个中間位置的水平綫段上达到。这就是說,在一定条件下,最好在运动开始的瞬間消耗一部分燃料,而剩下的一部分燃料在运动終了的瞬間消耗。

г) Φ 的符号由負变到正(图 3г)。在这种情况下,全部燃料儲藏应当在运动的某一瞬間消耗。

所有上面指出的可能性在一定的条件下都能够实现。

我們現在討論,运动時間不預先給定,而由最終速度取极大这一条件所决定的情形。初始角同样不先固定,而以最佳方式选取。根据(1.11),(1.17)和(1.20),我們有:

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 T = 0, \quad (1.26)$$

由此得:

$$C_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{T}. \quad (1.27)$$

在这种情况下,公式(1.24)中 Φ 的分子是:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (1.28)$$

它在整个区間 $(0, T)$ 上都是正的。这就是說,将实现情形 a)。我們看到,当初始角和运动時間由最佳条件选择时,全部燃料儲藏在运动一开始时就消耗的情形使 U 的最終速度达到极大。初始速度 v_0 的方向应当和附加速度 V 的方向重合。这里和以后,我們都省去 V 的下标 k 。

以后我們將認為,初始速度 v_0 包含在 V 里面,并且以最佳方式把总的速度儲藏分为两部分(如果有必要分为两部分的話)。显然,此时可以限于考虑 $v_0 = 0$ 的情形。現在来研究在运送阶段的运动時間固定和不固定时上述的情形。我們將查明,在参数間具有什么关系才可能有解,并研究最佳运动特性与給定的运送時間 T 之間的关系。

显然,在 $v_0 = 0$ 的情况下只可能有情形 a) 和 б)。为了满足边界条件,我們有:

$$V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2 - gT = 0, \quad (1.29)$$

$$V_1 \sin \varphi_1 \cdot T - g \frac{T^2}{2} = Y, \quad (1.30)$$

其中 Y 是給定高度, V_1 是在运动初始时刻得到的速度, V_2 是在运动終了时刻得到的速度。和

$$V_1 + V_2 = V, \quad (1.31)$$

这里 V 是給定的可供支配的速度儲藏。

如果 T 不固定,則有 $V_2 = 0$ 。方程(1.29)和(1.30)給出关系

$$\frac{gT^2}{2} = Y, \quad (1.32)$$

它用来决定时间 T :

$$T = \sqrt{\frac{2Y}{g}}. \quad (1.33)$$

把这个式子代入方程(1.29)或(1.30)中的任何一个,得:

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{2gY}}{V}. \quad (1.34)$$

如果右面部分小于1,問題是有解的。这就是說,当給定了可供支配的速度 V 时,运送高度 Y 不应取得太大;与此相反,給定了高度,可供支配的速度儲藏應該足够大,在任何情形,可供支配的速度儲藏应当大于把物体垂直上抛到高度 Y 时所需要的速度。满足了这个条件,运送阶段終了的水平分速是:

$$U = V \cdot \cos \varphi_1 \quad (1.35)$$

或

$$U = V \sqrt{1 - \frac{2gY}{V^2}}. \quad (1.36)$$

如果 T 是固定的,那么一般地說,条件(1.32)不被滿足,即不能找到在 $V_2 = 0$ 时的解。解必須依照方案 B) 在水平綫段具有中間位置的情况下来寻找。

不难看出,函数 Φ 的表式可以写成:

$$\Phi = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right). \quad (1.37)$$

因此公式(1.25)中的积分等于零这一等式給出:

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2, \quad (1.38)$$

由此得:

$$\varphi_2 = \pm \varphi_1. \quad (1.39)$$

我們將討論这两种可能性,同时查明,在問題的各参数間具有什么关系时这两种可能性被实现。

1. 令 $\varphi_2 = \varphi_1$. 由公式(1.29)我們有:

$$\sin \varphi_1 = \frac{gT}{V}, \quad (1.40)$$

根据(1.30)和(1.31),得:

$$V_1 = \frac{V}{2} \left(1 + \frac{2Y}{gT^2} \right), \quad (1.41)$$

$$V_2 = \frac{V}{2} \left(1 - \frac{2Y}{gT^2} \right). \quad (1.42)$$

因为 V_2 应当是正的,所以我們看出,这种情形发生在給定的运送阶段的运动时间适合条件

$$T > \sqrt{\frac{2Y}{g}} \quad (1.43)$$

时,也就是 T 大于最佳运送时间。对于最終速度,我們有:

$$U = V \sqrt{1 - \left(\frac{gT}{V}\right)^2}. \quad (1.44)$$

需要加给可供支配的速度储藏的条件是: $\frac{gT}{V}$ 应当小于 1.

2. 令 $\varphi_2 = -\varphi_1$. 这时我们有:

$$\sin \varphi_1 = \frac{2Y}{VT}. \quad (1.45)$$

对于速度, 我们有:

$$V_1 = \frac{V}{2} \left(1 + \frac{gT^2}{2Y}\right), \quad (1.46)$$

$$V_2 = \frac{V}{2} \left(1 - \frac{gT^2}{2Y}\right). \quad (1.47)$$

这种情形发生在给定的时间 T 小于最佳时间的时候, 也就是:

$$T < \sqrt{\frac{2Y}{g}}. \quad (1.48)$$

最终速度可按公式

$$U = V \sqrt{1 - \left(\frac{2Y}{VT}\right)^2}. \quad (1.49)$$

计算. 和前面相似, 可以把 $\frac{2Y}{VT}$ 小于 1 的条件看作是要求可供支配的速度储藏 V 充分大.

所得的公式表明, 在运送阶段运动終了所给予的附加速度 V_2 依赖于给定的运动时间和最佳时间相差的程度, 相差越大, V_2 就越大. 如果给定的时间等于最佳时间, 那么 $V_2 = 0$, 两种情形都变为前一种情形. 我们应注意到, 在两种情形下,

$$V_2 < V_1,$$

也就是第二附加速度在数量上永远小于第一附加速度.

条件(1.43)和(1.48)表明, 在第一种情况下, 速度的增加应当发生在抛物线(以初速 V_1 运动时所得到的)的下降分支, 而在第二种情况下发生在抛物线的上升分支. 两种情形都示于图 4 上. 当给定的时间大于最佳时间时, 增加速度 V_2 的方向平行于初始速度 V_1 . 当给定的运送时间小于最佳时间时, 增加速度 V_2 的方向在水平线之下, 和水平线所成的角等于初始角 φ_1 .

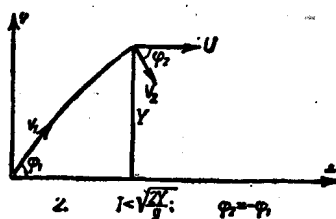
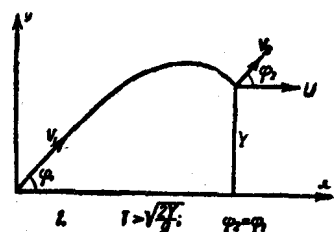


图 4

在运送段应当解决的问题是把卫星升高到给定的高度, 并给予需要的水平分速. 所得的结果表明, 当运送时间也由最佳方式选取时, 最有利的情形应当是利用运动开始的瞬时冲量来获得高度和速度. 把运动引上水平方向应依靠重力来实现. 如果给定的运送时间不同于最佳时间, 那么, 为了把运动引上水平方向, 必须利用在运送阶段終了所给予的冲量. 如果给定的运送时间过长, 那么速度向量因重力而产生的方向变化大于需要的数值, 因而第二次冲量的垂直分速应当向上. 如果给定的运送时间太短, 重力来不及转动速度向量, 那么不足的转动应当借

助于第二次冲量来完成,后者的垂直分速朝下。

在求解的时候,我們从假定允許給出瞬时冲量以及允許全部燃料儲藏或部分燃料儲藏的瞬时消耗出发。实际上这是不可能的,所以所提出的运送問題的最好解答是用每秒最大燃料消耗量的燃料燃烧来代替瞬間燃烧,而用每秒最小消耗量的运动(或者更好是用发动机关閉的运动)来代替两次施加冲量之間的运动。

上面已經得知,在面平行重力場內运动时,最好的运送方式是靠运动开始时施加一个冲量来实现的。在中心重力場內把卫星运送到軌道上去的問題中不适宜用这样的解答,因为用这样的方法不能得到(譬如說)圓的軌道以及不交于地球表面和不切于地球表面的軌道。因此,为了应用上面所得的結果来解决中心重力場內有关运送的問題,关于在給定時間內运送卫星到軌道上去的問題有着基本的意义。如果給定的時間不算太长,那么彈道的尺寸比起地球的半径来就不算太大,从而作为近似討論問題基础的假定沒有受到太大的破坏。

我們現在来討論一个例子,用这个例子可以估計彈道的尺寸以及对各种給定的运送時間估計可供支配的速度儲藏的大小。計算例子时,我們限于最重要的情形,就是在面平行重力場內給定的运送時間不超过最佳运送時間的情形。

假定需要把卫星运送到高度 $Y = 300$ 公里的地方,并且具有水平分速 $U = 7900$ 米/秒。依照公式

$$T = \sqrt{\frac{2Y}{g}},$$

我們得到面平行重力場內最佳运送時間:

$$T_{\text{最佳}} = 248 \text{ 秒}.$$

图 5 給出在 $0.4 T_{\text{最佳}} < T < T_{\text{最佳}}$ 范围内所需总的可供支配速度 V 、初始冲量 v_1 、初始角 φ_1 和水平距离 X 与 T 的关系。由图可看出,随着运送時間的縮短,所需的可供支配的速度儲藏增大,初始冲量减小,而最終冲量增大。初始角随着运送時間的减小而增大,軌道变得越加陡峭,而运送阶段的水平距离逐漸减小。所得的水平距离大大地小于地球半径。因此有充分根据把上述例子看作是以最佳方式运送卫星到軌道上去的近似計算。

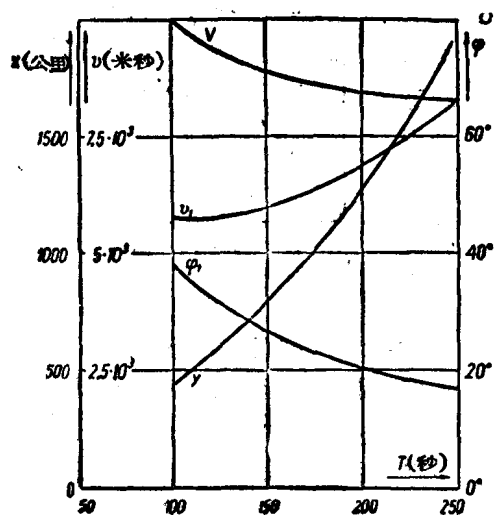


图 5

在結束本节时必须指出,正象上面証明过的那样,俯仰角正切的变化是時間的綫性函数这一規律与函数 $V(t)$ 的变化性質无关。它可以应用到单級加速器,也可以应用到多級加速器,甚至可以应用到一級停止工作、而另一級开始工作之間的間断時間。下一节討論多級火箭加速器的运送問題时要利用这个結果。

还应指出,在变分問題的另一些提法下,俯仰角正切的变化規律可能不是綫性的。例如說,如果用最佳方式选择运动時間,而固定运送阶段的水平距离,那么俯仰角正切随着時間变化的最佳規律将是綫性分式型的。

§ 2. 给定燃料消耗方式时的运动

上面已经得知,俯仰角的最好控制规律是俯仰角正切与时间有线性关系:

$$\operatorname{tg} \varphi = -(C_1 + C_2 t). \quad (2.1)$$

积分运动方程(1.1)–(1.4),得到在某一时刻 t_1 速度分量和坐标的表式:

$$u = \int_0^{t_1} p(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + u_0, \quad (2.2)$$

$$w = \int_0^{t_1} p(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + w_0 - g t_1, \quad (2.3)$$

$$x = \int_0^{t_1} (t_1 - t) \cdot p(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + u_0 t_1 + x_0, \quad (2.4)$$

$$y = \int_0^{t_1} (t_1 - t) \cdot p(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + w_0 t_1 + y_0 - \frac{g t_1^2}{2}. \quad (2.5)$$

根据(2.1),可以把 $\sin \varphi$ 与 $\cos \varphi$ 表成时间的函数:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (C_1 + C_2 t)^2}}, \quad (2.6)$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + (C_1 + C_2 t)^2}}. \quad (2.7)$$

因为函数 $p(t)$ 被认为是已知的,所以一般地说,公式(2.2)–(2.5)的右方可以计算出来.

公式(2.2)–(2.5)的右方包含着两个与控制方式有关的任意常数. 一般地说,选择这些常数,可以使得在固定加速阶段运动时间的情形下,保证加速阶段的終了具有给定的高度 y_k ,而垂直分速等于零. 这样选择了常数以后,可以按照公式(2.2)和(2.4)来决定速度的大小 u_k 以及数值 x_k .

为了实际计算公式(2.2)–(2.5)右方的积分,必须知道喷气加速器和时间的关系,也就是必须知道函数 $p(t)$. 我们应注意到,函数 $p(t)$ 在一般情形是间断的,例如在合成火箭的情形. 因为合成火箭对于人造卫星来说有最大的意义,所以下面要对合成火箭的最佳运动进行更详细的研究.

对于合成火箭的情形,利用公式(2.2)–(2.5),可以把弹道終了处的运动学参数表示成:

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^n u_k^{(i)}, \quad (2.8)$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^n w_k^{(i)}, \quad (2.9)$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^n x_k^{(i)}, \quad (2.10)$$

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^n y_k^{(i)}, \quad (2.11)$$

其中

$$u_k^{(i)} = \int_{t^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt, \quad (2.12)$$

$$w_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt - g(t_k^{(i)} - t_0^{(i)}), \quad (2.13)$$

$$x_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)} - t) p_i(t) \cdot \cos \varphi \cdot dt + (t_k^{(i)} - t_1^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} u_k^{(q)}, \quad (2.14)$$

$$y_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)} - t) \cdot p_i(t) \cdot \sin \varphi \cdot dt + (t_k^{(i)} - t_0^{(i)}) \times \\ \times \sum_{q=0}^{i-1} w_k^{(q)} - \frac{1}{2} g(t_k^{(i)} - t_0^{(i)}), \quad (2.15)$$

$$u_k^0 = u_0, \quad w_k^0 = w_0.$$

这里 $t_0^{(i)}$ 和 $t_k^{(i)}$ 是运动初始时刻的时间和終了时刻的时间, $u_k^{(i)}$ 和 $w_k^{(i)}$ 是水平速度分量的增量和垂直速度分量的增量, $x_k^{(i)}$ 和 $y_k^{(i)}$ 是水平坐标和垂直坐标在运动时间内的增量, $p_i(t)$ 是反作用力的加速度, 并且所有的量都是对于第 i 级火箭的运动所取的。

很明显, 公式(2.12)–(2.15)也包括了合成火箭各级发动机中间出现停顿的情形。在这种情形, 我们可以把相应于停顿的时间间隔当作是属于某一级发动机, 并且有:

$$p_i(t) \equiv 0.$$

对于一个很重要的特殊情形, 就是各级火箭都以不变的推力在运动的情形, 我们来计算公式(2.12)–(2.15)右面部分的积分。在这种情况下, 对于第 i 级火箭, 我们有:

$$p_i(t) = \frac{g P_i}{G_i}, \quad (2.16)$$

其中 P_i 是发动机推力, G_i 是重量。重量 G_i 可以表成:

$$G_i = G_0^{(i)} \cdot \mu^{(i)} = G_0^{(i)} \left[1 - (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \frac{t - t_0^{(i)}}{T_i} \right], \quad (2.17)$$

其中 $G_0^{(i)}$ 是初始重量, $\mu_k^{(i)}$ 是最终的质量比, T_i 是发动机工作时间。引进

$$v_0^{(i)} = \frac{G_0^{(i)}}{P_i}, \quad (2.18)$$

得到 $p_i(t)$ 的表式:

$$p_i(t) = \frac{g}{v_0^{(i)} \cdot \left[1 - (1 - \mu_k^{(i)}) \frac{t - t_0^{(i)}}{T_i} \right]}. \quad (2.19)$$

按照公式

$$P_i = -\frac{c_i}{g} \cdot \frac{dG_i}{dt} \quad (2.20)$$

决定发动机的推力, 其中 c_i 是从发动机喷嘴喷出的气体所具有的排气速度, 对于时间 T_i , 我们很容易得到公式:

$$T_i = \frac{c_i}{g} \cdot v_0^{(i)} (1 - \mu_k^{(i)}). \quad (2.21)$$

必须注意,在发动机推力不变的情况下,每秒燃料消耗量是常数,因而火箭的质量是时间的线性函数。因此对于每一级火箭,可以认为俯仰角的正切并不是和时间线性相关,而是和各级火箭的质量或它的相对质量线性相关。我们有:

$$\operatorname{tg} \varphi = A_i + B_i \cdot \mu^{(i)}, \quad (2.22)$$

其中 A_i 是 B_i 是一些常数。在每级火箭运动开始时,有 $\mu^{(i)} = 1$ 和

$$\operatorname{tg} \varphi_0^{(i)} = A_i + B_i. \quad (2.23)$$

在每级发动机停止工作的瞬间,有 $\mu^{(i)} = \mu_k^{(i)}$ 和

$$\operatorname{tg} \varphi_k^{(i)} = A_i + B_i \cdot \mu_k^{(i)}. \quad (2.24)$$

这里 $\varphi_0^{(i)}$ 和 $\varphi_k^{(i)}$ 是各级发动机在运动开始和运动終了时的俯仰角。

把(2.19)中的 $p_i(t)$ 以及(2.6)和(2.7)中的 $\sin \varphi$ 与 $\cos \varphi$ 代入公式(2.8)–(2.15),积分后得到:

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot f_1^{(i)}, \quad (2.25)$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^n c_i [f_2^{(i)} - v_0^{(i)} \cdot (1 - \mu_k^{(i)})], \quad (2.26)$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \left[f_3^{(i)} + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot f_1^{(q)} \right], \quad (2.27)$$

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \left\{ f_4^{(i)} - \frac{1}{2} v_0^{(i)} (1 - \mu_k^{(i)}) + \right. \\ \left. + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot [f_2^{(q)} - v_0^{(q)} \cdot (1 - \mu_k^{(q)})] \right\}, \quad (2.28)$$

其中无量纲函数 $f_1^{(i)}$, $f_2^{(i)}$, $f_3^{(i)}$ 和 $f_4^{(i)}$ 由下列诸式决定:

$$f_1^{(0)} = \frac{u_0}{c_0}, \quad f_2^{(0)} = \frac{w_0}{c_0}, \\ f_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + A_i^2}} \left\{ \operatorname{Arcsh} \left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{\mu_k^{(i)} \cdot B_i} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{Arcsh} \left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{B_i} \right) \right\}, \quad (2.29)$$

$$f_2^{(i)} = A_i f_1^{(i)} + \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i \mu_k^{(i)}), \quad (2.30)$$

$$f_3^{(i)} = \frac{1}{B_i} [\operatorname{Arcsh} (A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh} (A_i + B_i \mu_k^{(i)})] - \mu_k^{(i)} \cdot f_1^{(i)}, \quad (2.31)$$

$$f_4^{(i)} = \frac{1}{B_i} \left[\sqrt{1 + (A_i + B_i)^2} - \sqrt{1 + (A_i + B_i \mu_k^{(i)})^2} \right] - \mu_k^{(i)} \cdot f_2^{(i)}. \quad (2.32)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

此外,应当注意到, $v_0^{(0)} = 0$ 。由于俯仰角控制方案的连续性,也由于公式(2.22)–(2.24),

所以包含在公式(2.29)–(2.32)中的常数 A_i 和 B_i 以下面 $2(n-1)$ 个关系式相联系:

$$A_i + B_i \mu_k^{(i)} = A_{i+1} + B_{i+1}, \quad (2.33)$$

$$\frac{B_i}{B_{i+1}} = \frac{v_0^{(i)}}{v_0^{(i+1)}} \cdot \frac{c_i}{c_{i+1}}, \quad (2.34)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1).$$

公式(2.34)用下述方法得到. 根据(2.1), $\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \varphi) = -c_2 = \text{常数}$. 从另一方面, 根据(2.17)和(2.22),

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d}{d\mu^{(i)}}(\operatorname{tg} \varphi) \frac{d\mu^{(i)}}{dt} = -B_i \cdot \frac{1 - \mu_k^{(i)}}{T_i} = -C_2. \quad (2.35)$$

注意到(2.21), 就不难从(2.35)得出(2.34).

公式(2.21)–(2.25)使我们可以完全地计算极值的运动. 为了得到满足给定的等周条件的运动, 必须相应地选择控制方案的两个任意常数 C_1 和 C_2 , 或者同样的, 选择 $2n$ 个量 A_i 和 B_i 中的任意两个常数, 例如 A_1 和 B_1 或者 A_n 和 B_n . 令 w 等于零, y 等于给定的数值 y_k , 我们得到决定常数 A_i 和 B_i 的一个超越方程组(包含两个方程). 方程组的解只能用挑选的方法来寻找. 因此比较简单的办法是不去决定 A_i 和 B_i , 而预先给定它们, 然后根据它们来计算所有其他的数量. 在某个合理的范围内改变 $\mu_k^{(i)}$, A_i 和 B_i , 可以得到具有不同 $v_0^{(i)}$, y_k 和 u_k 的运动. 这时计算大大地简化了, 因为不需要去解方程, 而只要根据公式进行计算.

下面我们将讨论合成火箭方案的一个很有趣的特殊情形, 通过这个例子我们可以说明上述的方法.

考虑一个合成火箭, 所有 n 级的许多基本特征都彼此相似, 也就是

$$c_i = c; \quad \mu_k^{(i)} = \mu_k; \quad v_0^{(i)} = v_0. \quad (2.36)$$

取 A_n 和 B_n 作为控制方案的任意常数. 其他的常数 A_i 和 B_i 可以很简单地通过 A_n 和 B_n 来表示. 事实上, 根据(2.34),

$$B_i = B_n, \quad (2.37)$$

利用(2.37), 不难从(2.33)得到:

$$A_i = A_n + B_n(1 - \mu_k)(n - i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.38)$$

计算的方案是这样的. 给出 μ_k , A_n 和 B_n 以后, 利用公式(2.38), 然后根据公式(2.29)–(2.32)决定出 $f_1^{(i)}$, $f_2^{(i)}$, $f_3^{(i)}$ 和 $f_4^{(i)}$. 从运动终止的条件 $w_k = 0$, 我们有:

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^n f_2^{(i)}}{n(1 - \mu_k)}. \quad (2.39)$$

根据这个公式决定 v_0 . 然后按照公式(2.25), (2.27)和(2.28)决定数值 x_k , y_k 和 u_k .

在进行类似的计算时, 可以先给出 A_n 和 B_n 本身, 而给出一些与它们有关的量. 例如, 可以给出弹道终止处的俯仰角和质量比, 并改变加速阶段开始处的俯仰角, 计算出一系列的