美国新数学丛书

数学中的智巧

R·亨斯贝尔格 著

北京大学出版社

数学中的智巧

R. 亨斯贝尔格 著

李 忠 译

北京大学出版社

数 学 中 的 智 巧

R.亨斯贝尔格 著　李　忠 译

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂排版　北京新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 7印张 150千字

1985年11月第一版　1985年11月第一次印刷

印数：00001—40,000册

统一书号：13209.101　定价：1.50元

内 容 提 要

本书由19篇初等数学的小品文组成。其内容包括数论、几何、逻辑、概率等，它们分别代表着数学思想的许多不同的侧面。每篇文章介绍了一个或几个历史上著名的数学问题及其发展。这些小品文写得生动有趣，逻辑严谨，深入浅出；具有初中代数与几何基本知识的人就能看懂。多数小品文后面附有习题与参考书目，以帮助读者进一步思考与探讨。本书可作为中学生与大学生的课外读物。

Ross Honsberger

INGENUITY IN MATHEMATICS

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是 Anneli Lax 教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵 张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围；各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快。他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N. Y. 10012, [U. S. A].

编辑者

作 者 简 介

R.亨斯贝尔格(Ross Honsberger) 于1929年生于加拿大多伦多。后来曾在多伦多大学学习。毕业后在多伦多市教了十多年的数学，借休假年之机到了加拿大滑铁卢大学，继续他的研究。1964年他任职于这个大学的学院（组合与最优化系），此后一直在那里工作。

亨斯贝尔格教授把他对数学的热爱与对中学教育的兴趣结合起来，曾为未来的数学教师们设计过一套教程（例如，一本是关于用波里亚（pólya）精神解题，一本是关于组合几何，以及其它等），其中有些教程还制成了录音带。他经常到安大略省南部为中学的学生与教师们讲演，并且是“安大略中等学校数学杂志”的总编辑。

目　　录

序　言

这本书是由若干简短的并自成体系的初等数学的小品文组成的。有许多作者描写过包括高斯（Gauss）在内的那些卓越的数学家们的工作，并指出在第一流的数学研究中，不论其内容深浅，思想的深刻与方法的巧妙是它们的显著特征。我之所以选择了这里讨论的这些题材，是因为我记得在第一次遇到它们时，我是如何兴奋与激动。我要与众多的读者们一起来分享这种美妙的感觉。我相信许多人虽然可能不知道这些内容，但是具有理解与欣赏这些思想的最低限度的数学基础；实际上只要具有初中代数与几何课程的基本知识就够了。我真诚希望，读者们将被这些诱人的课题所迷住。

这本书在写法上仿照了拉顿马切尔（Rademacher）与陶普里茨（Toeplitz）合著的《数学的欣赏》（The Enjoyment of Mathematics）一书，在我看来它是已出版的通俗数学读物中最好的书之一。

每个小品都附有参考文献，在这些文献中包括了我的资料的来源，同时也包括一些适当的材料，提供给想在这一课题上深入探讨的读者参考。列在这本书末尾的参考文献是一般初等数学领域内的一些著名书籍，阅读这些书将使读者的兴趣不断增长。关于这一方面，我要特别提出期刊《Scripta Mathematica》，尤其是在1935—1957年期间，它是数学财富的一个名副其实的宝藏。

在某些小品中，我只讨论了有点特殊的具体问题，而往往省略了它们的推广，或者只在推广上作了一点提示。但在

另外的一些小品中，我却试着做了一点推广与抽象。读者应当知道，这里对任何一个个别课题所进行的讨论，只不过是数种可能的办法之一。在大多数小品的末尾，我附加了有关的练习，它们的解答放在这本书的末尾。因为这些小品是彼此相互独立的，所以可以不必顾及顺序而任意选读它们。

最后，我愿向H.夏皮罗（Harold Shapiro）博士表示感谢，他为小品文12：互补序列写了附录。我还要感谢这套丛书的编者A.拉克斯（Anneli Lax）博士，为着她的见识、判别力、耐心与仁慈。

R.亨斯贝尔格

1 概率与π

我记得很多年之前，曾读到这样的事实：随机选取两个正整数，它们互素的概率是$6/\pi^2$。似乎是R.查里斯(Chartres)大约在1904年从实验上检验了这个数学结果。他叫50名学生每人随机写出5对正整数。在所得到的250对数中，他发现有154对是互素的，概率是154/250。如果把这个数目记成$6/x^2$，他发现$x=3.12$，而$\pi=3.14159\cdots$。

这真使我感到震惊！随机选取的正整数对竟会与π发生联系，这超出了我的想象力。似乎也难相信重复这种实验——在实验中书写这些正整数对的人们完全不知道这些正整数对作什么用——竟能实际地确定π的值。

证明上述概率是$6/\pi^2$所用的数学知识，超出了我们所规定的范围①；但是，关于π会出现在这样的结果中人们所可能感到的任何迷惑，都可以通过考查下面的简单例子得到解除。

随机写出两个小于1的正数x与y，它们与数1一起形成一个三数组$(x,y,1)$。这样的三数组正好是一个钝角三角形的三边的概率是$(\pi-2)/4$。

首先我们注意到，每对数x与y在单位正方形中确定一个点$P(x,y)$，其坐标为(x,y)（见图1.1）。又由于每一个坐

① 这件事的说明发表在A. M. Yaglom与I. M. Yaglom著的《Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions》第一卷中，参考其中的问题92与93。

读者也可参考G. Pólya著的《Mathematics and Plausible Reasoning》第一卷中关于结果$\Sigma(1/n^2)\longrightarrow\pi^2/6$的历史。

标都是在单位区间中随机选取的，所以对应的点$P(x,y)$出现在正方形中每一处的机会都相等。更确切地说，点P落在正方形中的区域G内的概率是G的面积与正方形面积之比。由于正方形的面积是1，所以点P位于G中的概率等于G的面积本身。

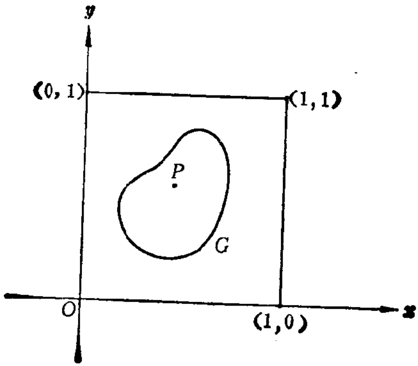

图 1.1

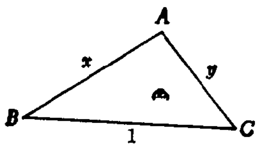

图 1.2

其次，我们考虑以$x,y,1$为边的三角形(图1.2)。由于x与y都小于1，所以x边与y边都小于边$BC=1$。因为一个三角形最大角对着它的最长边，我们看出角B与角C都小于角A。又因为三角形中仅可能有一个钝角，所以在$\triangle ABC$中若有钝角时，则角A是钝角。

为了使得长度$x,y,1$能够构成任何种类的三角形，它们之中任意两个之和必须超过第三者。显然，关系式

$$1+x>y \quad 与 \quad 1+y>x$$

对于区间(0,1)中的所有 x 与 y 成立。这样，构成三角形的要求，归结起来就是条件

$$x+y>1。\quad (1)$$

若条件(1)满足，$(x,y,1)$将构成一个三角形，但它可能是锐角三角形或直角三角形。为了看出三角形的类型依赖于量 x^2+y^2，我们应用余弦定律于$\triangle ABC$，便得出

$$1^2=x^2+y^2-2xy\cdot\cos A,\ 或\quad x^2+y^2=1+2xy\cos A。$$

如果 A 是钝角，则 $\cos A$ 是负的；否则 $\cos A$ 不是负的。因此，$\triangle ABC$ 是钝角三角形的条件是

$$x^2+y^2<1。\quad (2)$$

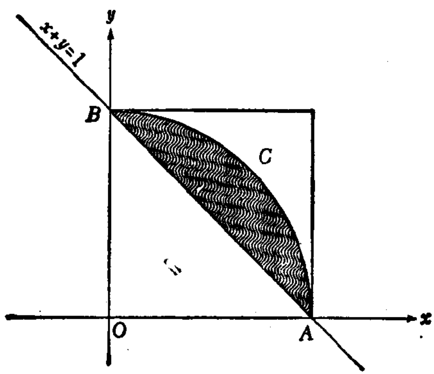

图 1.3

现在不难看出，满足不等式(1)的点(x,y)都在我们的单位正方形对角线 AB 的上方(见图1.3)；而满足不等式(2)的点都在单位圆之内。因此，同时满足(1)与(2)的点的集合则正如图中所表示的，是介于四分之一圆周与对角线之间的阴影区域。这样，$(x,y,1)$构成钝角三角形的概率是

弓形 ABC 的面积

=四分之一圆 AOB 的面积－三角形AOB 的面积

$$=\frac{1}{4}\pi(1^2)-\frac{1}{2}(1)(1)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}.$$

练　　习

1．两个人约定在某一指定的地点会面，时间定在中午12点与下午1点之间。根据约定，第一个到达的人等第二个人15分钟，然后即离开。如果这两个人都随机地在中午12点至下午1点之间选择各自的到达时刻，问他们实际相遇的概率是多少？

2．将一根木棍截成三段；两个断点是随机选取的．问三段在端点处连接能构成一个三角形的概率是多少？

3．A,B,C 三点是在一个圆周上随机选取的。$\triangle ABC$ 是锐角三角形的概率是多少？

4．在一个等边三角形内任意选取一点P。从P点到三角形的边作垂线，与三边分别相交于点X,Y,Z。以PX，PY,PZ为边的三角形存在的概率是多少？

2　奇数与偶数

有一些十分有趣的问题，要求人们去证明某个数是奇数，或者证明它是偶数。在这个小品中，我们主要关心的就是这种类型的一个问题。但在处理它之前，我们事先讨论两个较容易的问题。

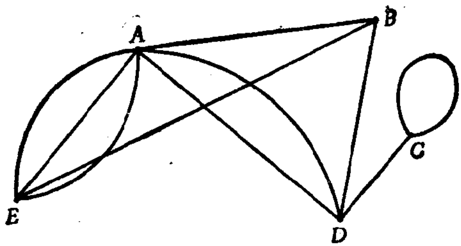

图　2.1

(i) 设 $A, B, C, \cdots, K$ 是有限个点，由一组曲线成对地将它们连结起来，其中有可能包含迴路(例如，点 C 跟自己相连结；见图2.1)以及多重边(连结同一对点)。我们定义一个顶点 A 的*局部度*为与点 A 相连的边的数目，并记之为 $d(A)$，其中迴路算两条边。例如，在图2.1中

$$d(A)=6, \quad d(B)=3, \quad d(C)=3$$

等等。

问题　证明在任何一个就象上面所描述的网络之中，局部度为奇数的顶点的数目是一个偶数。(注意，在上面的例子中，刚好有两个顶点 B 与 C，有奇数局部度。)

一般情况的证明是简单的。我们用T表示所有局部度的总和：

$$T=d(A)+d(B)+d(C)+\cdots+d(K)。\qquad (1)$$

在计算T的过程中，我们计算了连向A点的边的数目，连向B点的边的数目等等，并且把它们加起来。因为每一条边有两个端点，所以T是边数的两倍；因而T是偶数。

现在，我们把(1)式右边各项中凡取偶数的$d(P)$加起来，其和数也是偶数。这时剩下的各项就是取奇数的$d(P)$，它们加起来之和也一定是偶数(因为T是偶数)。这就证明了，总共有偶数个奇的$d(P)$(偶数个奇数的和才是偶数)。因此，一定有偶数个奇局部度的顶点。

如果我们把顶点$A,B,C,\cdots,K$设想为人，两个相连接的顶点，比如A与B，意味着A与B两人握过手（如果有迴路的话，迴路表示一个人与自己握过手，并且认为握了两次手)，这时顶点A的局部度$d(A)$表示A握手的总次数。那么，上述结果告诉我们，握过奇数次手的人数总是偶数。这个应用是十分有趣的，因为它不依赖于时间——我们可以不必顾虑任何矛盾，宣称下星期四在剧院(如果你高兴的话，还可以说全世界从开天辟地算起）握奇数次手的人数总是偶的。（读者可以同一群朋友们一起去检验这个结果．）

(ii) 设$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$是数$1,2,3,\cdots,n$的一个排列。作乘积

$$P=(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)。$$

问题　若n是奇数，证明P是偶数。

解决这个问题是很容易的。如果n是奇的，那么序列$\{1,2,3,\cdots,n\}$的头与尾都是奇数，因此它所包含的奇数的个数比偶数的个数多一个。现在数字$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数字1,