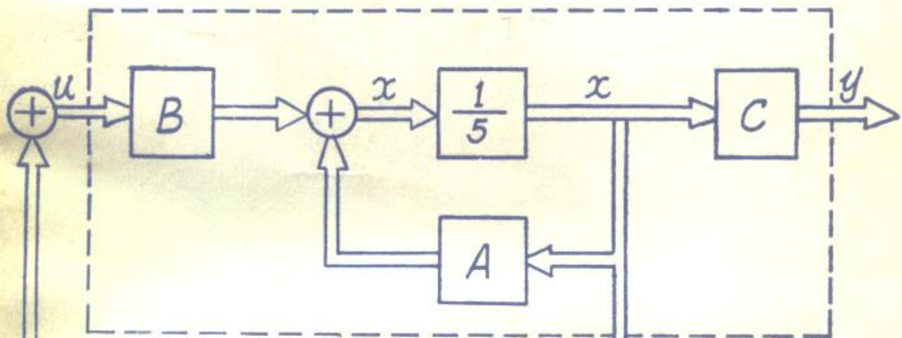
线性系统理论例题练习

〔日〕有本 卓 高桥进一 浜田 望 著
熊 昭 琳 译



国防工业出版社

线性系统理论例题练习

〔日〕 有本 卓 高桥进一 浜田 望 著

熊昭琳 译

国防工业出版社

内容简介

本书是关于线性系统理论的一本习题集解。其内容包括状态方程的建立及其求解，分析系统的可控制性、可观测性、稳定性、系统的最优性、卡尔曼滤波器、观测器等。全书共分十一章，每章都分为基本理论知识、例题、习题和习题解答四个部分来叙述。

本书可供高等院校有关自动控制或系统工程等专业的师生以及从事这方面工作的工程技术人员参考。

線形システム理論例題演習

有本 卓 高橋進一 浜田 望 共著

コロナ社 1977年

*

线性系统理论例题练习

〔日〕 有本 卓 高桥進一 浜田 望 著

熊昭琳 译

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张 9 229千字

1983年12月第一版 1983年12月第一次印刷 印数：00,001—13,000册

统一书号：15034·2507 定价：1.35元

译者的话

线性系统理论是自动控制理论中内容最丰富，应用最广泛的一个分支。大量的工程实际问题都可以近似地用线性系统理论来研究和设计。从五十年代到六十年代，研究线性系统的方法发生了飞跃性的变化，逐渐从经典控制理论发展到现代控制理论。近几年来，各高等院校都把现代控制理论列为必修课程，从科学技术的发展和电子计算机迅速普及等客观实际来看，现代控制理论也确实是大学生和工程技术人员必须掌握的基本内容。

本人这几年来从事控制理论的教学工作，发现关于这方面的教材及参考书，其内容多着重于理论的阐述，虽在某些书中有部分例题和习题，也只是附于各章之后。将例题、习题整理成专著的书还甚少见。而在实际上，大多数学生和工程技术人员就是由于解题较少，且对向量、矩阵等线性代数的演算方法不甚熟练，遇到的困难较多，这对深入理解基本理论和使之在实际中应用都是一种障碍。

本书既简明扼要地介绍了基本理论的内容，又列举了大量的例题，还提供了供读者自己演算的习题，并附有习题解答。由浅入深，符合目前我国的教学内容及工程应用的实际情况，有其可取之处。

周炎辉、郭功浩、娄彦博同志对全部译稿进行了仔细的校阅，在此表示衷心的感谢。

在本书翻译过程中，译者对原文错印之处作了一些修改和译注，但由于水平有限，不当之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

目　　录

8. 有理正实函数系统理论的充要条件

9. 系统的最优性

10. 卡尔曼滤波器

11. 观 测 器

1. 向量，矩阵，行列式

1.1 向量和向量空间

1.1.1 向量

图 1.1 是几何学上表示三维空间向量的图形。若要用代数来表示这个向量，则如图 1.1 所示，取互相垂直的 e^1 轴、e^2 轴、e^3 轴，以这个坐标系决定的三个数值 x_1、x_2、x_3 表示为

$$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]$$

或表示为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这些被称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标表示，前者称为**行向量**，后者称为**列向量**。本书采用以列向量表示坐标的办法。

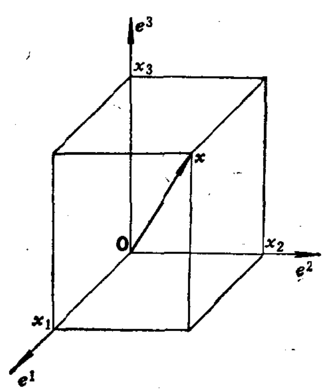


图1.1 三维向量

三维空间的向量概念一般可向 n 维空间扩展，把由 n 个实数 x_1、x_2、…、x_n 构成的

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 维向量。

1.1.2 向量运算

对于一个向量 $\boldsymbol{x}$ 和标量 λ，将 $\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍规定为（图 1.2）

$$\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

相同维数的两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的和规定为（图 1.3）

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

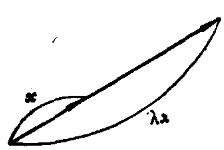


图1.2 向量的标量倍

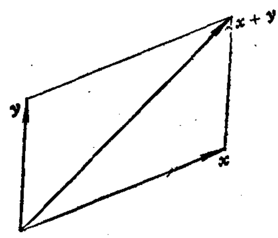


图1.3 向量x、y的和

这里，对于所定义的标量倍与和的运算，以下 A_1)～A_8) 的关系成立。

A_1) 对于两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，式（1.3）所给出的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 是唯一规定。

A_2) （交换律） $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ （1.4）

A_3) （结合律） $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ （1.5）

A_4）所有的成分都是零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$，则

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x} \tag{1.6}$$

A_5）$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 的向量 $-\boldsymbol{x}$ 是唯一规定。向量 $-\boldsymbol{x}$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的逆向量，用标量 -1 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的积给出。

A_6）（分配律）　$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$　(1.7)

A_7）　$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$　(1.8)

A_8）　$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$　(1.9)

一般来说，和由 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，……等的集合 V 来定义，能满足 A_1）～A_5）时的集合 V 就称为**加群**。此外，$\boldsymbol{x}$ 是集合 V 的元素时，将它记作 $V\ni\boldsymbol{x}$（或者 $\boldsymbol{x}\in V$）。

1.1.3　向量空间

定义（向量空间）　当有称为向量的 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 等的向量集 V 与标量集 K，在 V 的元素间能定义和，从而在 V 与 K 之间能定义标量倍，而且满足以下 B_1）～B_5）的关系的，叫做向量空间 V。

B_1）V 为加群。

B_2）给出 $V\ni\boldsymbol{x}$ 与 $K\ni\lambda$ 时，$\boldsymbol{x}$ 的标量倍 $\lambda\boldsymbol{x}\in V$ 是唯一规定。

B_3）对于 $V\ni\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 与 $K\ni\lambda$，$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$

B_4）对于 $V\ni\boldsymbol{x}$，$K\ni\lambda$、μ，$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$

B_5）$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$（这里 1 是 K 的单位圆）

这里所说的标量集 K 是象全体实数集 R 或全体复数集 C 那样能够定义普通的四则运算的，在代数上称它为体。因此，为了说明以上所定义的向量空间是在什么样的标量集之下定义的，便将其称为**体 K 上的向量空间**。

以式（1.1）表示的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合是实数体 R 上的向量空间，称它为 n 维实向量空间，记作 R^n。另外，由 n 个复数 z_1，z_2，……，z_n 表示为

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

的向量集是复数体C上的向量空间，称它为n维复数向量空间，记作C^n。显然，在C^n中包含了R^n。

1.1.4 线性独立性、维、基底

定义（线性独立性） V的不为零的向量x^1，$x^2,\cdots\cdots,x^k$满足以下条件时叫做“**线性独立**”（或就叫“**独立**”）。

若 $\lambda_i \in K$，$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1+\lambda_2 \boldsymbol{x}^2+\cdots\cdots+\lambda_k \boldsymbol{x}^k=\mathbf{0}$ (1.11)

则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_k=0$

定义（线性相关性） $V \ni \boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots,\boldsymbol{x}^k$为非线性独立时，就称$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots,\boldsymbol{x}^k$是**线性相关的**。

定义（维） 在向量空间V里能取无限多的独立向量时，称V为无限维。V不是无限维时，独立向量的个数是有限的，其最大的数叫维。此时，称V为**有限维**。

V是n维时，V的任意向量$\boldsymbol{x}$以n个独立向量$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots$，$\boldsymbol{x}^n$的线性组合表示为

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1 \boldsymbol{x}^1+\lambda_2 \boldsymbol{x}^2+\cdots\cdots+\lambda_n \boldsymbol{x}^n \tag{1.12}$$

这就说成：V是由向量$\{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots,\boldsymbol{x}^n\}$生成的，将$\{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots,\boldsymbol{x}^n\}$称做$V$的生成元。

定义（基底） V的独立生成元$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2,\cdots\cdots,\boldsymbol{x}^n$称做$V$的**基底**。作为$n$维实向量空间$R^n$的基底可取以下$n$个向量。

$$\boldsymbol{e}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}^2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\cdots,\quad \boldsymbol{e}^n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

称它为R^n的**自然基底**

1.1.5 向量的内积

对于n维复向量空间C^n中的三个向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，把称为内积的量规定为

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i (\bar{x}_i\text{是}\ x_i\ \text{的共轭复数}) \tag{1.14}$$

内积满足以下三个性质。

1）$\overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}=\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ (1.15)

2）$\langle \alpha_1\boldsymbol{x}^1+\alpha_2\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{y}\rangle=\bar{\alpha}_1\langle \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{y}\rangle+\bar{\alpha}_2\langle \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{y}\rangle$ (1.16)

3）对 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\neq 0$ (1.17)

此外，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=0$ 时，称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。

1.2 线性映射与矩阵

1.2.1 线性映射

设想体 K 上有两个有限维向量空间 V_1、V_2，若对应于 V_1 的元 $\boldsymbol{x}$ 决定 V_2 的元 $\boldsymbol{y}$ 时，就叫给出了从 V_1 到 V_2 的映射。将它写成 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$，或者 f；$V_1\to V_2$。定义 f 的 V_1 的部分集合 D 叫做 f 的**定义域**，此外，与 D 的元相对应的 V_2 的元的集合，叫做 f 的**值域**，以 $f(D)$ 表示之。

定义（线性映射） 对应于 V_1 的任意元 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$ 与 K 的元 λ

$$f(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)=f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2),\quad f(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x}) \tag{1.18}$$

成立时，就将 f 叫做**线性映射**。

定义（映射的结合） f；$V_1\to V_2$，g；$V_2\to V_3$ 时，从 V_1 到 V_3 的映射 $g\cdot f$，可以如下式决定。

$$(g\cdot f)(\boldsymbol{x})=g(f(\boldsymbol{x})) \tag{1.19}$$

1.2.2 坐标，矩阵

在抽象的向量空间的线性映射，由于在向量空间导入基底，能够用矩阵来表示。

设 V 为 K 上的 n 维向量空间，基底是 $\boldsymbol{a}^1$，$\boldsymbol{a}^2$，……，$\boldsymbol{a}^n$，则 V 的任意元 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}^1+x_2\boldsymbol{a}^2+\cdots\cdots+x_n\boldsymbol{a}^n,\quad x_i\in K \tag{1.20}$$

因此，能够使 V 的元 $\boldsymbol{x}$ 与 K 的 n 个元 x_1，x_2，……，x_n 相对应，其映射表示为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ 或\varphi；\ V\to K^n \tag{1.21}$$

将 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 称做是与基底 $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}^n$ 有关的 $\boldsymbol{x}$ 的坐标。

由此，可以认为 V 是由映射 φ 与 K^n 一一对应，V 与 K^n 是同样的。

下面，设 V_1 为 n 维向量空间，V_2 为 m 维向量空间，来研究线性映射 f；$V_1 \to V_2$。取 V_1 的基底是 $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}^n$，$V_2$ 的基底是 $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \cdots\cdots, \boldsymbol{b}^m$，设 φ；$V_1 \to K^n$，ψ；$V_2 \to K^m$，则映射 $\boldsymbol{F}$；$K^n \to K^m$ 根据图 1.4 为 $\boldsymbol{F} = \psi \cdot f \cdot \varphi^{-1}$。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & \mathbf{V}_2 \arrow[d, "\psi"] \\
K^n \arrow[r, "\boldsymbol{F}"'] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

图1.4　由矩阵 $\boldsymbol{F}$ 表示的线性映射 f

现在，设 K^n 的任意元 ξ 由自然基底表示为

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{e}^k \tag{1.22}$$

并由 $\boldsymbol{F}$ 映射为 K^m 的元 $\eta = \boldsymbol{F}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k \boldsymbol{e}^k$。这时，根据 $\varphi(\boldsymbol{a}^k) = \boldsymbol{e}^k$，即 $\varphi^{-1}(\boldsymbol{e}^k) = \boldsymbol{a}^k$，则成为：

$$\eta = \boldsymbol{F}(\xi) = \boldsymbol{F}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{e}^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{e}^k))) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(\boldsymbol{a}^k)) \tag{1.23}$$

因为 $\psi(f(\boldsymbol{a}^k))$ 是由基底 $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \cdots\cdots, \boldsymbol{b}^m$ 表示的 $f(\boldsymbol{a}^k)$ 的坐

标，所以如设它为

$$\psi(f(a^k))=\begin{bmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{bmatrix} \tag{1.24}$$

则根据式（1.23），可得

$$F(\xi)=F\xi=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\xi_k\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\xi_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{mk}\xi_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \cdots\\ \eta_m\end{bmatrix} \tag{1.25}$$

线性映射 F 能够由矩阵表示。矩阵 F 也可写成 $F=[\alpha_{ij}]$。

1.2.3 坐标变换

设 $V_1=V_2=V$，使 V 的元 x 对应于它本身的映射，叫做**恒等映射**，用下列被称为**单位矩阵**的矩阵表示。

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.26}$$

V 的元的坐标，因 V 中基底的取法而异。现在，设 a^1, a^2, ……, a^n 为 V 的基底时的坐标为 ξ 的向量，以 b^1, b^2, ……, b^n 为基底时，以 $\eta=F\xi$ 表示之，此时，各个基底的关系为

$$a^j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}b^k\ (j=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{1.27}$$

时，矩阵 F 可由这个 α_{jk} 做成式（1.25）形式的矩阵给出。

1.2.4 矩阵的阶数，矩阵的运算

$m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $K^n\to K^m$ 的线性映射，将 $\boldsymbol{A}$ 的值域写作 $\boldsymbol{A}(K^n)$。

定义（矩阵的阶数） 将 $\boldsymbol{A}(K^n)$ 的向量空间的维叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数。

矩阵的和 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $m\times n$ 的矩阵时，以下式决定其和。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}] \tag{1.28}$$

矩阵的标量倍 设 λ 是标量，以下式决定 $\boldsymbol{A}$ 的 λ 倍。

$$\lambda\boldsymbol{A}=[\lambda a_{ij}] \tag{1.29}$$

矩阵的积 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $p\times m$ 的矩阵时，二个矩阵的积 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}=[C_{ij}]$ 是 $p\times n$ 的矩阵，将 C_{ij} 规定为

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} \tag{1.30}$$

一般来说，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 不成立。

逆矩阵 对于 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，若存在使

$$\boldsymbol{A}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \tag{1.31}$$

成立的 $n\times n$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$时，则称$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，以$\boldsymbol{A}^{-1}$表示之。而将具有逆矩阵的矩阵叫做**正则矩阵**。

矩阵的转置 将$m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的行与列调换成 $n\times m$的矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，写作 $\boldsymbol{A}'$。即 $\boldsymbol{A}'=[a_{ji}]$。一般 $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$ 成立。

1.3 行列式与联立一次方程式

1.3.1 行列式

对 $n\times n$ 的正方矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，其行列式 $\det \boldsymbol{A}$(或$|\boldsymbol{A}|$)是用归纳法作如下定义的标量值。

1） $n=1$ 时，$\det \boldsymbol{A}=\det[a_{11}]=a_{11}$

2）设到 $n=r-1$ 为止，规定 $\det \boldsymbol{A}$ 时，由 $\boldsymbol{A}$ 除去第一行 $[a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{1r}]$ 和第 i 列的 $(r-1)\times(r-1)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}_i^*$，这时规定为

$$\det \boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{1+i}a_{1i}\det \boldsymbol{A}_i^* \tag{1.32}$$

$n=2$ 时

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$n=3$ 时

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三角形矩阵的行列式

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.33}$$

下左半部为零时及对角线以外都为零时（称为**对角线矩阵**）也与式（1.33）相同，行列式为对角线各元素的积。

关于行列式可以导出下列各项。

1）若 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列（或者行）向量线性相关，则 $\det \boldsymbol{A}=0$

2）即使 $\boldsymbol{A}$ 的一个列（行）向量的标量倍与另一列（行）向量相加，行列式也不变。

3）若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}<n$，则 $\det \boldsymbol{A}=0$

4）若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$（单位矩阵）则 $\det \boldsymbol{A}=1$

5）$\det(\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2)=\det \boldsymbol{A}_1\cdot\det \boldsymbol{A}_2$ (1.34)

6）$\boldsymbol{A}$ 为正则矩阵与 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 是等价的。

7）设除掉 A 的第 i 行与第 k 列的 $(n-1)\times(n-1$ 矩) 阵为 D_{ik}，则规定为

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\det D_{ik} \tag{1.35}$$

称它是 A 的元素 a_{ik} 的余因子，这时 A 的行列式为

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} \tag{1.36}$$

另外，A 为正则矩阵时，A 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}[A_{ki}] \tag{1.37}$$

1.3.2 联立一次方程式

关于 n 个变量 x_1，x_2，……，x_n 的 m 个一次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \tag{1.38}$$

以矩阵表示，可写成下式

$$Ax=b \tag{1.39}$$

式中，$A=[a_{ij}]$是 $m\times n$ 的矩阵，$x=[x_1x_2\cdots\cdots x_n]'$，$b=[b_1b_2\cdots\cdots b_m]'$。

克莱姆公式 作为式 (1.38) 的特殊情况，考虑 $m=n$，$\det A\neq 0$ 时，由式 (1.39)的左边乘以 A^{-1}，这时的解以 $x=A^{-1}b$ 的形式给出。而各未知数 x_i 为

$$x_i=\frac{1}{\det A}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots b_1\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots\cdots b_n\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

（第 i 列）

这个公式叫做克莱姆公式。

齐次方程式 $Ax=0$ 的解法。

齐次方程式 $Ax=0$ 总以 $x=0$ 为它的一个解，称它是平凡

解。非平凡解存在的充要条件用 rank $A<n$ 表示。因此，$m<n$ 时，显然上式是成立的，所以必然存在非平凡解。而只有在 rank $A=n$ 时，只存在平凡解。

齐次方程式的求解步骤：

1）求 rank $A=r$（r 为已知），适当地将方程式的行与列进行置换，使得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1}\cdots\cdots a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$$

除去 r 行以下的方程式。

2）将 r 列以下各项移到方程式的右边。

3）采用克莱姆的方法，解出 r 个未知数。将（$n-r$）组任意值代入（$n-r$）个未知数，由此可得（$n-r$）个独立的解。

非齐次方程式 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的解法。

引进新未知数 x_{n+1}，将式（1.38）看作齐次方程式。

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+b_1x_{n+1}=0 \\ a_{21}x_1+\cdots\cdots+a_{2n}x_n+b_2x_{n+1}=0 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n+b_mx_{n+1}=0 \end{array}\right\} \tag{1.41}$$

根据矩阵表示，可将它写成

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0} \tag{1.42}$$

则使式（1.38）的解存在的充要条件是 rank$\boldsymbol{A}$=rank$\boldsymbol{B}$ 成立。因此 rank$\boldsymbol{A}$=rank$\boldsymbol{B}$ 时，按照解齐次方程式的步骤解出式（1.41），即设

$x_{n+1}=-1$，求得式（1.38）的解。

〔例题〕 1.1　试求用下列向量所组成的向量空间的维。

$$\boldsymbol{a}^1=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}^2=\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}^3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$