

HUNDUN  
JIQI  
YINGYONG

# 混沌及其应用



黄润生/编著

武汉大学出版社

# 混沌及其应用

黄润生 编著

武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

混沌及其应用/黄润生编著. —武汉: 武汉大学出版社,  
2000. 1

ISBN 7-307-02770-4

I. 混… I. 黄… III. 混沌学 N.O414.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 46598 号

责任编辑: 史新奎 责任校对: 黄添生 版式设计: 支 笛

出版: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: [epd@whu.edu.cn](mailto:epd@whu.edu.cn) 网址: [www.wdp.whu.edu.cn](http://www.wdp.whu.edu.cn))

发行: 新华书店湖北发行所

印刷: 湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本: 850×1168 1/32 印张: 11 插页: 3

版次: 2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 1 次印刷

字数: 283 千字 印数: 1—2000

书号: ISBN 7-307-02770-4/O·212 定价: 12.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购买我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换。

# 前 言

自 1963 年洛伦兹发表《决定论非周期流》论文以来,非线性科学获得了迅猛的发展,从而进一步深刻地揭示了非线性系统的共同性质、基本特征和运动规律。非线性科学是一门跨学科的综合性基础科学,而非线性动力学在非线性问题中又是当前科学研究的前沿,为此本书试图就非线性动力学中的分岔、混沌、分形和奇怪吸引子等方面极为重要的、而又彼此相关联的问题作简要的介绍。

全书共分八章。首先介绍了混沌研究的历史及其意义;第二章介绍了大自然中所存在的一些复杂现象;第三章采用相空间的几何直观方法来阐明非线性动力系统的基本形态,目的在于更好地研究混沌现象;第四章至第七章分别重点地论述了分岔、混沌、分形和奇怪吸引子等非线性动力学中的问题;最后两章简略地介绍了以混沌理论为基础的长期预报的相空间模式以及混沌在保密通信、神经网络和经济学中的应用以结束全书。

本书是编者十余年来在从事该领域研究工作的基础上,参阅国内外有关文献资料,并结合本人近年来的科研成果,经过反复修改而成的。

在编写本书的过程中,刘式达教授、林振山教授(博士)、周家斌研究员和郑祖光教授分别赠送了各自的专著和论文,使本人从中受益匪浅。同时在初稿完成后,周焕文、朱福元两位教授仔细地审阅了全部书稿,提出了中肯的、指导性的修改意见。原系学术委员会主任廖孟扬教授审阅了全书,建议出版。在全书完

稿后，得到了张敦穆、甘良才两位教授和其他专家的热心帮助，并对本书的进一步修改提出了具体的、指导性的建议，最后才正式定稿。编者对以上诸位先生的关怀和指教表示诚挚的谢意，并对武汉大学出版社的大力帮助表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬望读者不吝赐教。

**黄润生**

1999年7月于武汉大学

# 目 录

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| <b>第一章 绪论</b> .....            | 1  |
| § 1.1 混沌科学是一新兴学科 .....         | 1  |
| § 1.2 混沌研究的历史 .....            | 4  |
| § 1.3 混沌研究的意义 .....            | 8  |
| <b>第二章 大自然的复杂性</b> .....       | 11 |
| § 2.1 确定论和概率论的描述 .....         | 12 |
| § 2.2 物理学中几个复杂现象 .....         | 13 |
| § 2.3 振荡化学反应 .....             | 17 |
| § 2.4 生物系统的自组织现象 .....         | 18 |
| § 2.5 非平衡的宇宙 .....             | 19 |
| § 2.6 大气运动和气候的复杂性 .....        | 21 |
| § 2.7 复杂现象的共性 .....            | 23 |
| § 2.8 复杂现象产生的原因 .....          | 27 |
| <b>第三章 动力系统形态及其分析</b> .....    | 31 |
| § 3.1 平衡态和相平面 .....            | 31 |
| § 3.2 几种常见的平衡态 .....           | 34 |
| § 3.3 吸引子 .....                | 39 |
| § 3.4 多个吸引子与分型线 .....          | 44 |
| § 3.5 同 (异) 宿轨道、同 (异) 宿点 ..... | 46 |
| § 3.6 结构稳定性 .....              | 49 |

|            |                       |     |
|------------|-----------------------|-----|
| § 3.7      | 四种吸引子的功率谱特性.....      | 51  |
| § 3.8      | 受驱动单摆的动力学形态.....      | 55  |
| <b>第四章</b> | <b>分岔</b> .....       | 62  |
| § 4.1      | 数学物理学中的分岔现象.....      | 63  |
| § 4.2      | 实分岔点和极限点.....         | 67  |
| § 4.3      | 分岔的基本概念及其三种基本原型.....  | 72  |
| § 4.4      | 分岔中稍微复杂的情况.....       | 80  |
| § 4.5      | 定常状态解及其稳定性.....       | 84  |
| § 4.6      | 周期解及其稳定性.....         | 88  |
| § 4.7      | 非线性映射及其分岔.....        | 97  |
| § 4.8      | 微分方程与离散映射的关系 .....    | 110 |
| <b>第五章</b> | <b>混沌</b> .....       | 112 |
| § 5.1      | 混沌 .....              | 112 |
| § 5.2      | 混沌现象举例 .....          | 117 |
| § 5.3      | 初始条件的敏感依赖性 .....      | 123 |
| § 5.4      | 混沌模型 .....            | 128 |
| § 5.5      | 混沌实例分析 .....          | 140 |
| § 5.6      | 李雅普诺夫特征指数 .....       | 151 |
| § 5.7      | 庞加莱截面 .....           | 163 |
| § 5.8      | 混沌运动的随机性质及其统计描述 ..... | 168 |
| § 5.9      | 通向混沌的道路 .....         | 171 |
| <b>第六章</b> | <b>分形和分维</b> .....    | 176 |
| § 6.1      | 分形 .....              | 176 |
| § 6.2      | 分维 .....              | 183 |
| § 6.3      | 规则分形 .....            | 195 |
| § 6.4      | 随机分形 .....            | 209 |

|             |                                        |            |
|-------------|----------------------------------------|------------|
| § 6.5       | 分形在凝聚现象和表面科学中的应用 .....                 | 220        |
| § 6.6       | 由单变量时间序列计算分维实例 .....                   | 228        |
| <b>第七章</b>  | <b>奇怪吸引子</b> .....                     | <b>240</b> |
| § 7.1       | 远离平衡态 .....                            | 240        |
| § 7.2       | 湍流 .....                               | 243        |
| § 7.3       | 奇怪吸引子 .....                            | 247        |
| § 7.4       | 奇怪吸引子的刻画 .....                         | 257        |
| <b>第八章</b>  | <b>长期预报的相空间模式概述</b> .....              | <b>263</b> |
| § 8.1       | 长期预报的可行性 .....                         | 265        |
| § 8.2       | 长期预报的相空间理论 .....                       | 272        |
| § 8.3       | 长期预报的相空间线性模式 .....                     | 275        |
| § 8.4       | 长期预报的相空间非线性模式 .....                    | 282        |
| § 8.5       | 长期预报的 Lyapunov 指数模式 .....              | 287        |
| <b>第九章</b>  | <b>混沌在保密通信、神经网络和<br/>经济学中的应用</b> ..... | <b>291</b> |
| § 9.1       | 混沌在保密通信中的应用 .....                      | 291        |
| § 9.2       | 混沌神经网络 .....                           | 301        |
| § 9.3       | 混沌在经济学中的应用 .....                       | 321        |
| <b>参考文献</b> | .....                                  | <b>333</b> |

# 第一章 绪 论

## § 1.1 混沌科学是一新兴学科

混沌 (Chaos) 是一种貌似无规则的运动, 指在确定性非线性系统中, 不需附加任何随机因素亦可出现类似随机的行为 (内在随机性)。混沌系统的最大特点就在于系统的演化对初始条件十分敏感, 因此从长期意义上讲, 系统的未来行为是不可预测的。

混沌科学是随着现代科学技术的迅猛发展, 尤其是在计算机技术的出现和普遍应用的基础上发展起来的新兴交叉学科<sup>[1]</sup>。在现代的物质世界中, 混沌现象无处不有, 大至宇宙, 小至基本粒子, 无不受混沌理论的支配。如气候变化会出现混沌, 数学、物理、化学、生物、哲学、经济学、社会学、音乐、体育中也存在混沌现象。因此, 科学家认为, 在现代的科学中普遍存在着混沌现象, 它打破了不同学科之间的界线, 它是涉及系统总体本质的一门新兴科学。人们通过对混沌的研究, 提出了一些新问题, 它向传统的科学提出了挑战。如 1963 年美国著名的气象学家洛伦兹 (Lorenz E N) 在数值实验中首先发现<sup>[2]</sup>, 在确定性系统中有时会表现出随机行为这一现象, 他称为“决定论非周期流”。这一论点打破了拉普拉斯决定论的经典理论。在这一论点的支配下, 洛伦兹曾提出: “气候从本质上是不可预测的。”这个论点一直困扰着动力气象学界。后来人们认识到, 当时洛伦兹所发现的“决定论非周期流”现象其实就是一种混沌现象。如人们常说的“天有不

测风云”，就是指气候系统对初始条件非常敏感，初始条件的极微小差别会导致巨大的天气变化这一混沌运动的基本性质。继洛伦兹后，于1975年“混沌”作为一个新的科学名词正式出现在文献中。随着对混沌现象的深入研究，混沌理论迅速发展起来。气象学家们将它应用于气候系统中，发展成为混沌气候学。随着对混沌气候学的深入研究，人们才逐渐认识到气候是一个有层次的复杂系统<sup>[3]</sup>。这个系统在不同层次上，在一定范围内，还可以建立起各种预报模式，并已取得较好的效果。因此，与传统的预报模式相比，人们深信，随着对气候系统各种层次结构的深入认识，各种不同层次模式的建立，长期气候预测的精度也将会大有提高。

不仅上述天气变化受到了混沌的支配，就连根深蒂固的牛顿力学也受到了它的冲击。

众所周知，300多年前，牛顿的万有引力定律和他的三大力学定律将天体的运动和地球上物体的运动统一起来了。牛顿这一科学贡献曾被视为近代科学的典范。

然而，随着科学的发展，人们进一步认识到，牛顿力学的真理性受到了一定范围的限制<sup>[4]</sup>。19世纪末20世纪初，人们发现牛顿力学不能反映高速运动的规律，一切接近光速的运动应当用爱因斯坦的相对论方程来计算，光速 $c$ 便成为牛顿力学应用的第一个限制。在此前后，人们又发现，微观粒子的运动并不遵守牛顿力学的规律，在微观世界中应当用量子力学中的薛定谔方程来代替牛顿力学方程，普朗克常数 $h$ 就成了牛顿力学的第二个限制。

实际上，早在本世纪初在研究复杂系统时就已经涉及到牛顿力学应用的第三个局限性问题，即牛顿力学在研究复杂系统时遇到了困难。当时美国数学家庞加莱（Poincaré H）就发现，力学无法精确地处理“三体问题”。直到1963年，洛伦兹发现，一个确定的含有3个变量的自治方程，却能导出混沌解，说明天气从原则上讲不可能作出精确的预报。因此，在复杂性面前，牛顿力学是无能为力的，从此就拉开了对混沌研究的序幕。

著名的比利时科学家、诺贝尔奖金获得者普利高津 (Prigogine I) 等人在《探索复杂性》<sup>[5]</sup>专著中, 又从多方面研究了混沌问题。

他们通过对一些非平衡过程可以以各种不同的方式进入混沌以及对混沌特性的研究后发现, 这种混沌不同于宇宙早期的混沌、热力学平衡态的混沌, 它是有序和无序的对立统一, 既有复杂性的一面, 又有规律性的一面。因此, 这就意味着, 当代对混沌科学的深入研究将会对自然科学带来新的突破。

正如日本著名统计物理学家久保在 1978 年所指出的: “在非平衡非线性的研究中, 混沌问题揭示了新的一页。” 美国一个国家科学机构, 把混沌问题列为当代科学研究的前沿之一<sup>[6]</sup>。混沌科学最热心的倡导者、美国海军部官员施莱辛格 (Shlesinger M) 说: “20 世纪科学将永远铭记的只有三件事: 相对论、量子力学与混沌。” 物理学家福特 (Ford J) 认为混沌就是 20 世纪物理学第三次最大的革命。

与牛顿力学的应用经受相对论和量子力学革命性的突破有所不同, 这次革命的实质就在于混沌是直接用于研究人们所感知的真实宇宙, 用在人类本身的尺度大小差不多的对象中所发生的过程。人们研究混沌时所探索的目标就处在日常生活经验与这个世界的真实图像之中。

众所周知, 牛顿力学所描绘的世界是一幅静态的、简单的、可逆的、确定性的、永恒不变的自然图景, 形成了一种关于“存在”的机械自然观。而人们真正面临的世界却是地质变迁、生物进化、社会变革这样一幅动态的、复杂的、不可逆的、随机性的、千变万化的自然图景, 形成的是关于“演化”的自然观。因此, 混沌是一种关于过程的科学而不是关于状态的科学, 是关于演化的科学而不是关于存在的科学<sup>[7]</sup>。

实际上, 混沌科学的研究表明<sup>[4]</sup>, 现实的世界是一个有序与无序相伴、确定性和随机性统一、简单与复杂一致的世界。显然, 已

往那种只追求有序、精确、简单的观点是不全面的。因为牛顿所描述的世界是一个简单的机械的量的世界，而人们真正面临的却是一个复杂纷纭的质的世界。因此，只有抓住复杂性并对它进行深入研究，才能为人们描绘出一个客观的世界图景。

## § 1.2 混沌研究的历史

上节中的混沌又称浑沌，传统上，“混沌”常常用它来描述混乱、杂乱无章、乱七八糟的状态，从这个意义上说，它与无序的概念相同。但混沌有时又指宇宙之初物质某种原始的没有分化的状态，还可进一步引伸出人类在认识上处于浑浑噩噩的朦胧状态<sup>[4]</sup>。这可从《三五历》中“未有天地之时，混沌如鸡子，盘古生其中，万八千岁，天地开辟，阳清为天，阴浊为地。”看出，它反映了中国古代在盘古开辟天地之前，世界处于混沌状态这一哲学思想。公元前 580 年左右，《易乾凿度》中“太易者，未见气也。太初者，气之始也。太始者，形之似也。太素者，质之始也。气似质具而未相离，谓之混沌。”则指出了中国古代对混沌的最初认识，即混沌是指元气已具有物质的性质，而还没有进一步分化的状态。公元前 450 年左右，在《庄子》内 7 篇最后一篇中有一个生动的寓言：在遥远的古代，“南海之帝为倏，北海之帝为忽，中央之帝为浑沌，倏与忽相遇于浑沌之地，浑沌待之甚善。倏与忽谋报浑沌之德，曰：‘人皆有七窍，以视听食息，此独无有，尝试凿之。’日凿一窍，七日而浑沌死。”这里所说的倏忽就是迅速灵敏。混沌有无知愚昧的意思，分别代表三个皇帝，而混沌竟在中央。在庄子看来，混沌是混然一体的，是没有区分的天神，一旦开了窍，有了差异，混沌就死了。这就是该书讲到的混沌，应当说，庄子讲的是政治，隐喻的是哲学。因此，这位中国古代的哲学家不仅最早将混沌的思想用于政治学的研究中，而且他的思想还成为对人类行为的混沌性之认识的最早的哲学观点。

古希腊对混沌的认识与中国古代相近。如在古希腊早期的自然哲学和宇宙论中,混沌被看作是原始的混乱和不成形的物质,而宇宙的创造者就用这种物质创造出秩序井然的宇宙。

近代科学由于以研究自然界的秩序和规律为其宗旨,所以数百年来它把混沌现象排除在外。因而,自然界中大量的混沌现象就被科学家们遗忘了。在这期间值得一提的就是康德<sup>[8]</sup>,他的星云假说认为,太阳系是由处于混沌状态的原始星云演化而来的,并指出:“我在把宇宙追溯到最简单的混沌状态以后,没有用别的力,而只是用了引力和斥力这两种力来说明大自然的有秩序的发展。”因此,康德是考察宇宙从混沌到有序的演化的第一人。

19 世纪中期,自然科学家首先讨论混沌问题的是热力学。大家知道,当达到热力学平衡时,系统内部中的每一点的温度、压强、浓度、化学势等均无差别,处处相同,熵极大,即分子的混乱度极高。可见,热力学的平衡态实际上是一种混沌态。与此同时,科学家们还探讨了布朗运动、丁铎尔现象、反应体系中反应基团的无规则碰撞等这些微观状态,发现它们与混沌有关,都是混沌无序的状态。

19 世纪末 20 世纪初,庞加莱在研究三体问题时遇到了混沌问题。发现三体问题,如太阳、月亮和地球三者的相对运动与单体问题、二体问题不同,它是无法求出精确解的。多年来这成了牛顿力学中的遗留的难题,于是 1903 年庞加莱在他的《科学与方法》一书中提出了庞加莱猜想。他把动力学系统和拓扑学有机地结合起来,并指出三体问题中,在一定范围内,其解是随机的。实际上这是一种保守系统中的混沌,从而他成为世界上最先了解混沌存在的可能性的第一人。

20 世纪以来,热力学和统计物理学经历了平衡—近平衡—远离平衡的发展阶段。在耗散结构理论、协同学的发展初期,侧重于研究系统是如何从混沌到有序的发展,找到了一些系统从混沌到有序发展的机制和条件。即系统应该是开放的,处于远离平衡

态，其内部要有非线性的相互作用，状态的转变则要通过涨落来实现等等。据此，普利高津曾得出“有序来自混沌”的结论<sup>[9]</sup>。

1963 年洛伦兹在著名论文“决定论非周期流”中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象，给出了三个变量的自治方程，即著名的洛伦兹方程<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

即方程右端不显含时间，它是一个完全确定的三阶常微分方程组。方程中三个参数为  $\sigma$ 、 $r$  和  $b$ ，如取  $b=8/3$ ， $\sigma=10$ ，改变参数  $r$ ：当  $r<1$  时，其解的性质趋于无对流的定态；当  $r>1$  时，其解为非周期的，看起来很混乱。这便是在耗散系统中，一个确定的方程却能导出混沌解的第一个实例，从而揭开了对混沌现象深入研究的序幕。

与此同时，1954 年前苏联概率论大师柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov A N) 指出近可积的哈密顿 (Hamilton) 系统的解的性质的一些重要结论<sup>[10]</sup>。20 世纪 60 年代初期分别由阿诺尔德 (Arnold V I) 和莫塞尔 (Moser J) 证明，在近可积的哈密顿系统中，随机成分是有限的，导致不可积性的扰动项很小，这被称为 KAM 定理。KAM 定理讨论的是保守系统，而洛伦兹方程讨论的是耗散系统，它们分别从不同的角度说明，两种不同类型的动态系统，在长期的演化过程中是怎样出现混沌态的。从此，对混沌理论的研究便进入了一个新的时期。

1964 年法国天文学家伊依 (Henon M) 从研究球状星团以及洛伦兹吸引子中得到启发，给出了下列的 Henon 映射<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

该方程组本是一个自由度为 2 的不可积的哈密顿系统，然而在方

程中,当参数 $b=0.3$ ,且改变参数 $a$ 时,就发现其系统运动轨道在相空间中的分布似乎越来越随机。伊依得到了一种最简单的吸引子,并用他建立的“热引力崩坍”理论解释了几个世纪以来一直遗留的太阳系的稳定性问题。

1971年法国物理学家茹厄勒(Ruell D)和荷兰数学家塔肯斯(Takens F)为耗散系统引入了“奇怪吸引子”(Strange attractor)这一概念,提出了一个新的湍流发生机制,以揭示湍流的本质<sup>[12]</sup>。然而,因为湍流是一种极其复杂的现象,它是如何发生的,至今人们仍不完全清楚,但是,混沌现象的发现,对揭示湍流有很大启发。

1975年美籍华人学者李天岩和美国数学家约克(Yorke J)在美国《数学月刊》发表了题为“周期3意味着混沌”的著名文章<sup>[13]</sup>,深刻地揭示了从有序到混沌的演化过程。文章标题中的“混沌”一词便在现代意义下正式出现在科学语汇之中。

1976年美国数学生态学家梅(May R)在美国《自然》杂志上发表的题为“具有极复杂的动力学的简单数学模型”文章中指出<sup>[14]</sup>,在生态学中一些非常简单的确定性的数学模型却能产生看似随机的行为。如

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

称之为人口(或虫口)方程,即著名的逻辑斯谛(Logistic)模型。该模型看来似乎很简单,并且是确定性的,但参数 $\mu$ 在一定范围变化时,它却具有极为复杂的动力学行为,其中包括了分岔和混沌,从而向人们表明了混沌理论的惊人信息。

1978年和1979年费根包姆(Feigenbaum M)<sup>[15]</sup>等人在梅的基础上独立地发现了倍周期分岔现象中的标度性和普适常数,从而使混沌在现代科学中具有坚实的理论基础。

20世纪80年代以来,人们着重研究系统如何从有序进入新的混沌及其混沌的性质和特点。除此之外,借助于(单)多标度分形理论和符号动力学,还进一步对混沌结构进行了研究和理论

上的总结。由于自然界中一些混沌现象的相继发现,通过计算机还可描绘各自的混沌图像,如美籍法国数学家曼德布罗特 (Mandelbrot B B) 于 1980 年用计算机绘出了世界上第一张 Mandelbrot 集的混沌图像。对于这种动力学特性的结构,分数维虽能描述自然界中很多现象在几何上的不规则性,然而,由于它不能完全揭示出产生的相应结构的动力学特性,故 Grassber P 等人于 1987 年提出重构动力系统的理论方法<sup>[16]</sup>。通过由时间序列中提取分数维、Lyapunov 指数等混沌特征量,从而使得混沌理论进入到实际应用阶段。

进入 90 年代,基于混沌运动是存在于自然界中的一种普遍运动形式,所以对混沌的研究不仅推动了其他学科的发展,而且其他学科的发展又促进了对混沌的深入研究。因此,混沌与其他学科相互交错、渗透、促进,综合发展,使得混沌不仅在生物学、数学、物理学、化学、电子学、信息科学、气象学、宇宙学、地质学,还在经济学、人脑科学,甚至在音乐、美术、体育等多个领域中得到了广泛的应用。

### § 1.3 混沌研究的意义

上节所提到的 KAM 定理讨论的是保守系统,说明了近可积的哈密顿系统中也会出现混沌现象。这里仅指出,对保守系统,混沌运动的研究不仅具有基本的理论意义,而且具有实际意义<sup>[17]</sup>。

本书着重介绍耗散系统。与保守系统相比,对耗散系统混沌运动的研究具有更为重要的实际意义。

目前非线性科学最重要的成就之一就在于对混沌现象的认识<sup>[18]</sup>。而关于混沌动力学的许多概念和方法,如奇怪吸引子、相空间重构和符号动力学,正在广泛运用于自然科学和社会科学的各个门类之中,并取得了普遍的成功。

自 20 世纪 70 年代以来,混沌和有关奇怪吸引子的理论有了

很大的发展,并直接影响到数学、物理学中的许多分支<sup>[19]</sup>,具有重要的实际意义。在力学方面,以往总是把牛顿力学和“决定论”联系在一起,只要初始条件和受力状态确定,以后的运动就完全确定了。然而由于运动具有内在随机性,使其由牛顿运动定律所确定的“初态”变得不可预测,它只有某种统计特性。在分析力学方面,过去主要是通过建立一般系统的力学方程来进行求解,或当大多数方程无法积分时,只能研究其解的各种性质。然而混沌理论指出了它发展的新途径。混沌理论明确指出,高维非线性系统的方程不仅不能积分,而且其解对初值有敏感的依赖性。因此,还得用类似于统计力学的观点去处理。在流体力学中,湍流是一种极为复杂的现象,它的产生机理长期以来一直是一个悬而未决的难题。其困难的部分原因在于它同时存在着许多长度标度,即缺少单个的特征长度。1971年茹厄勒和塔肯斯最早用奇怪吸引子理论来阐明湍流发生机制<sup>[12]</sup>,其机制为不动点 $\rightarrow$ 极限环 $\rightarrow$ 二维环面 $\rightarrow$ 奇怪吸引子(湍流),被称为茹厄勒—塔肯斯道路。他们的观点至今未得到承认,这是因为有人认为混沌理论目前还只能处理有限的低维的常微分方程,而真正的湍流则出现在三维空间中,并且流体运动的 Navier-Stokes 方程的动态与简化的常微分方程组的性质很不一样,用混沌解决湍流问题还为时尚早,但这种通向湍流的道路(还有费根包姆倍周期分岔道路、皮姆—曼恩威勒阵发混沌道路等等)很有可能为湍流研究打开了一条新的思路。在非线性振动理论方面,大家知道,即使在周期性的激励下,非线性系统也会出现随机运动,那么在随机力的作用下,非线性系统又会出现哪些动态呢?这里的随机力(又称噪声或涨落力)是指它的作用与宏观变量相比是很小的,并且它反映了微观运动对宏观变量在演化过程中的杂乱无章的作用。因此,以往人们总是期望这种随机力对宏观运动的影响是小的,并作为一种消极的干扰来处理。然而,自20世纪70年代以来的非线性科学和统计物理的最新发展表明<sup>[20]</sup>,一个小的随机力并不仅仅对原有的确定性