振动分析

吴淇泰 编

浙江大学出版社

振动分析

吴淇泰 编

浙江大学出版社

1989年

振动分析

吴淇泰　编

责任编辑　李玲如

浙江大学出版社出版
浙江大学印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本：787×1092　1/32　印张：14.8125　字数：332.7千字
1989年11月第1版　　1989年11月第1次印刷
印数：0001—1500
ISBN　7-308—00328-0/O·050　　　定价：3.10元

前　　言

振动理论是现代许多工程技术科学的基础。许多工业部门，对各种工程和产品提出了既要安全可靠，又要经济合理的要求。因而，在设计过程中不仅要考虑静力效应，还要考虑动力效应，也就是说在设计过程中要进行振动分析。这样，振动理论就成为从事工程设计的科技人员必不可少的基础知识。

本书介绍了振动分析的基本理论与方法。本人在浙江大学工程力学专业讲授多年的“振动理论”课程，并编有《振动理论》讲义。本书就是根据授课经验在原讲义基础上整理编写而成的。

浙江大学蔡承文教授在百忙中对本书全稿进行了审阅，提出了许多宝贵意见，谨致衷心感谢。

限于编者的学术水平，在内容和讲授方法上必然存在不少错误和缺点，欢迎读者对本书提出宝贵意见。

编者

1989年 5 月于浙江大学求是园

目　录

第一章　绪　论

§1.1　振动理论所要解决的问题……………………（1）

§1.2　振动系统的模型…………………………………（4）

§1.3　振动的运动学概念……………………………（6）

§1.4　振动的分类………………………………………（12）

第二章　单自由度系统的自由振动

§2.1　无阻尼自由振动…………………………………（15）

§2.2　能量法……………………………………………（21）

§2.3　瑞利法……………………………………………（24）

§2.4　等效刚度…………………………………………（29）

§2.5　粘滞阻尼系统的自由振动……………………（33）

第三章　单自由度系统的受迫振动

§3.1　无阻尼受迫振动…………………………………（46）

§3.2　简谐力作用下的有阻尼受迫振动……………（51）

§3.3　隔振………………………………………………（59）

§3.4　等效阻尼…………………………………………（65）

§3.5　对周期激励的响应………………………………（70）

§3.6　对一般激励的响应………………………………（74）

§3.7　用积分变换求系统响应…………………………（84）

§3.8　逐步积分法………………………………………（90）

第四章　两自由度系统的振动

§4.1　两自由度系统振动的运动方程……………（103）

§4.2　无阻尼系统的自由振动………………………（106）

§4.3　坐标的耦合 …………………………………（113）
§4.4　简谐激励力作用下的受迫振动 ………………（119）
§4.5　固有振型的正交性 ……………………………（125）
§4.6　回转振动 ………………………………………（134）
第五章　多自由度系统的振动
§5.1　多自由度系统振动方程的建立 ………………（148）
§5.2　固有频率和固有振型 …………………………（158）
§5.3　固有振型的正交性和模态变换 ………………（169）
§5.4　系统对初始激励的响应 ………………………（175）
§5.5　无阻尼受迫振动 ………………………………（180）
§5.6　有阻尼受迫振动 ………………………………（189）
§5.7　物理参数和约束变化对频率的影响 …………（192）
第六章　多自由度系统振动的数值方法
§6.1　瑞利能量法 ……………………………………（210）
§6.2　迹法 ……………………………………………（217）
§6.3　李兹法 …………………………………………（221）
§6.4　矩阵迭代法 ……………………………………（232）
§6.5　子空间迭代法 …………………………………（240）
§6.6　斯托特拉法 ……………………………………（250）
第七章　弹性体振动
§7.1　弦的横向振动 …………………………………（263）
§7.2　杆的纵向振动 …………………………………（272）
§7.3　圆轴的扭转振动 ………………………………（283）
§7.4　梁的弯曲振动 …………………………………（286）
§7.5　梁弯曲振动的固有频率和振型 ………………（291）
§7.6　用振型迭加法研究系统的响应 ………………（305）
§7.7　轴向力、转动惯量和剪切变形对梁振动的

影响 …………………………………………（315）
§7.8 薄膜的横向振动 ……………………………（321）
§7.9 圆环的振动 ………………………………（329）
§7.10 薄板的横向振动 …………………………（333）
第八章 弹性体振动的近似方法
§8.1 集中质量法 ………………………………（351）
§8.2 广义坐标法 ………………………………（354）
§8.3 假定振型法 ………………………………（356）
§8.4 模态综合法 ………………………………（362）
§8.5 传递矩阵法 ………………………………（370）
§8.6 有限元素法 ………………………………（378）
第九章 非线性振动
§9.1 几个非线性振动的例子 …………………（393）
§9.2 相平面方法 ………………………………（297）
§9.3 摄动法 ……………………………………（402）
§9.4 非线性振动的特征 ………………………（412）
§9.5 自激振动 …………………………………（421）
§9.6 参变振动 …………………………………（424）
第十章 随机振动
§10.1 单自由度线性系统的随机振动 …………（433）
§10.2 多自由度线性系统的随机振动 …………（445）
§10.3 连续系统的随机振动 ……………………（453）
§10.4 非线性系统的随机振动 …………………（458）

第一章 绪 论

各个工业部门，各个科学领域以及日常生活中到处都充满着振动现象。飞机、汽车、轮船、动力机械、建筑以及钟摆、琴弦中都产生振动。生命现象中的脉搏搏动、心脏跳动等，物理现象中的电磁振荡，光学、声学、分子与原子物理中也都存在着种种振动现象。

本书研究的振动主要是机械振动，即力学所研究的振动。所谓机械振动是物体在平衡位置附近的往复运动。这类振动在工程技术中是普遍存在的。

§1.1 振动理论所要解决的问题

随着近几十年来工业和科学技术的飞速发展，各类工业产品愈加精巧、复杂，各种工程结构愈加巨型化，为了保证它们的可靠性和良好的性能，振动问题已成为工程技术领域里普遍需要认真研究和解决的重要课题。尤其是电子计算机的广泛使用，先进的振动量测和分析技术的出现，使我们有可能解决远比以往复杂得多的实际振动问题。是否可以这样说，今天振动理论的研究已成为工程技术人员正确进行产品和结构的动力特性设计所必须具备的基础知识。在理工科大学中，振动理论已是很多专业的一门必修课程。

任何事物都有两重性。在工业技术中，振动也是如此，

它既有有害的一面，也有有利的一面。

其有害的方面是：振动使结构的内应力大大增加，由于振动产生的交变载荷使结构发生疲劳破坏；共振使结构产生不容许的大变形，致使结构发生严重破坏；振动还能使机械加工丧失精度，在有些机械中，由于振动的存在而引起地基的振动和噪音，造成了极为恶劣的环境，使精密仪器不能正常工作，人的劳动条件恶化。

其有利的方面是：所有的发声器都是振源引起空气振动后，通过空气介质以波动的形式传到耳膜的；计时的钟表，也是利用振动；近三十年来，陆续出现了许多利用机械振动的生产设备，如振动传输、振动筛选、振动研磨、振动抛光、振动沉桩、振动疲劳机等。

因此，我们研究机械振动的目的，就是为了了解各种机械振动现象的机理，掌握振动的基本规律，从而有效地设法消除或隔离振动，防止或限制可能产生的危害，同时尽量利用机械振动积极的一面。

振动问题的提法以及涉及的内容是什么呢？

概而言之，振动问题所涉及的内容可以用下面的框图来作扼要的说明：

$$\xrightarrow[\text{（激励）}]{\text{输入}} \boxed{\text{系　统}} \xrightarrow[\text{（响应）}]{\text{输出}}$$

关于所研究的振动的对象，无论是机械产品、工程结构或零部件等，都可以理解为框图所示的系统，通常称为振动系统或机械系统，它表征系统本身的振动特性。外界对于系统的输入，包括初始干扰，外激振力等统称为激励。系统在输入作用下产生的输出，通常称为系统的动态响应，简称响

应（即位移、速度、加速度这些物理量）。

所谓振动问题，无非是从激励、响应、系统特性这三者中，已知二者求第三者。

1. 在激励与系统特性已知的情形下，求系统的响应，这即是所谓的振动分析，也是振动的正问题，本书基本上沿这条线叙述。

2. 在系统特性与系统响应已知的情形下，来反推系统的输入，这即是所谓的振动环境预测。

3. 在激励与响应均为已知的情况下，来确定系统的特性，此即所谓振动特性的测定或系统识别。振动系统参数识别的问题，日益受到人们的重视，它已由自动控制发展到机械、建筑、动力系统等方面。它是利用输入、输出的测量数据，来确定结构的模态参数和物理参数，并以实验的途径来建立结构模型，它是振动问题中的反问题，是正问题分析方法的有效补充。

第三种情形的另一种提法是：在一定的激励条件下，如何来设计系统的特性，使得系统的响应满足指定的条件，避开共振，不发生自激振动等。此即所谓的振动综合或振动设计。这是在工程技术问题中最普遍的一类振动问题。其主要途径是：恰当选择结构参数（M、K分布），采取减振措施，如隔振（控制激振力或振动传递），吸振（利用吸振器转移能量），阻振（利用阻尼材料消耗能量）。

实际的振动往往是错综复杂的，它可能同时包含识别、分析、综合等几个方面的问题。通常所谓将实际问题抽象成为力学模型，实质上就是一个系统识别问题。进而针对系统模型列式求解的过程，实质上就是振动分析的过程，而分析并不是问题的终了，分析的结果还必须用于改进设计或者排

除故障（实在的或潜在的），此即振动设计或综合的问题。

§1.2 振动系统的模型

和其它工程学科一样，机械振动也是借助于模型进行研究的。例如，藉以分析工程中振动问题的有限元方法和近十年发展起来的动态子结构法，这些方法都要把工程实际问题（例如机械和结构）抽象成为可以进行理论计算的力学数学模型，这种动力学模型在机械或结构系统的动力设计过程中是理论分析的基础。一个动力学模型能否真实地反映结构系统在外力环境中的情况或行为，就是动力学模型设计中必须明确回答的问题。

所谓模型，就是从实际事物经过去粗取精，抽象而得出的东西，例如，理论力学中的质点、刚体，材料力学和结构力学中的梁、板、壳，振动中的弹簧 质量系统等等 都 是 模型。弹簧-质量是振动的基本模型。

任何机器、结构或零部件，如构成一个振动系统，它必然具备质量和弹簧。这两个基本元素缺一不可（或者说惯性物体和弹性物体），振动的本质对于保守系统而言，就是这两种物体间的能量交换。

振动系统模型可分为两大类：离散系统（或称集中参数系统）与连续系统（或称分布参数系统），两者并非绝对不可逾越，它们的关系待到第六章再介绍。

离散系统是由集中参数元件组成的。基本的集中参数元件有三种，质量、弹簧、阻尼器。三者分别把力与加速度、位移、速度联系了起来。

质量（包括转动惯量）模型只具有惯性(称惯性物体)。

弹性模型只具有弹性，其本身质量可略去不计（称弹性物体）。弹簧力和变形一次方成正比的弹簧，称为线性弹簧。阻尼器模型，既不具惯性，也不具弹性，它是耗能元件，该元件在运动时产生阻力，其阻力与速度一次方成正比的是线性阻尼器。

离散系统在工程上有广泛的代表性，例如安装在混凝土基础上的精密机床，为了隔振的目的，在基础下面一般铺有弹性衬垫。在隔振分析中需要考察机床与基础的整体振动。这时，机床与基础一起被看作是刚体，起着质量的作用。弹性衬垫起着弹簧的作用。故在隔振分析中，上述系统可简化为图1.1所示的集中参数系统。

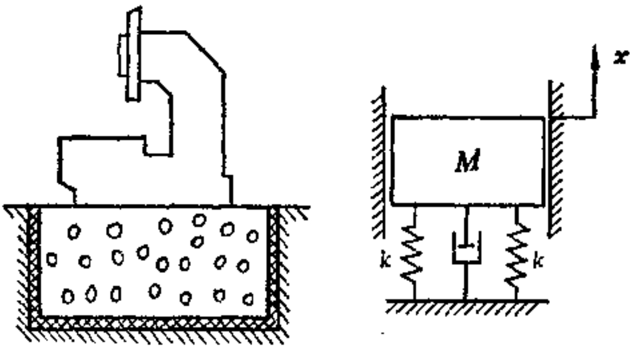

图1.1

离散系统的运动，在数学上是用常微分方程来描述的。

连续系统都由弹性元件组成，典型的弹性元件有杆、轴、梁、膜、环、板、壳等等。弹性体的惯性，弹性与阻尼是连续分布的，故亦称分布参数系统。工程上许多实际振动系统需要简化为连续系统的模型。

连续系统的运动，在数学上是用偏微分方程来描述的。

确定一个振动系统空间位置所需要的独立坐标个数，称

为振动系统的自由度数。

弹性体可看作是由无数个质点所组成，各个质点之间有着弹性联结，只要满足连续性条件，各个质点的任何微小位移都是可能的，故一个弹性体有无限多自由度，如果一个振动系统的各个特性参数（质量、刚度、阻尼系数等）都不随时间而变化，即它们不是时间的显函数，那么，这个系统称为参数系统（或不变系统），反之，称为变参数系统（或参变系统）。常参数系统用常系数微分方程描述，变参数系统用变系数微分方程来描述。

§1.3 振动的运动学概念

对于某些概念，鉴于在理论力学和普通物理中已经讲过，这里就不一一赘述。下面仅就简谐振动的矢量表示、复数表示以及谐波分析等简述一下。

简谐振动的矢量表示。

在振动问题中，有时用旋转矢量表示简谐振动，如图1.2所示。一模为A的矢量$\overrightarrow{OP}$，以等角速ω，从水平位置开始，逆时针转。$\overrightarrow{OP}$即为旋转矢量，它在任一瞬时在铅垂轴上的投影为$y=A\sin\omega t$表示简谐振动。它在水平轴上投影为$x=A\cos\omega t$，这说明任一简

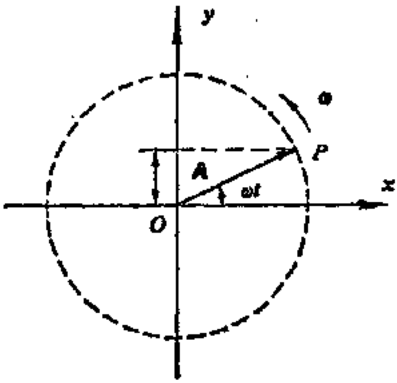

图1.2

谐振动都可用一个旋转矢量的投影来A表示。这个旋转矢量的模就是简谐振动的振幅，它的旋转角速度即为简谐振动的圆频率。

当一个简谐振动是由两个相等圆频率的简谐振动所合成，如图1.3所示，则这个简谐振动可由两个代表原简谐振动的旋转矢量的合成矢量来表示：

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{1.1}$$

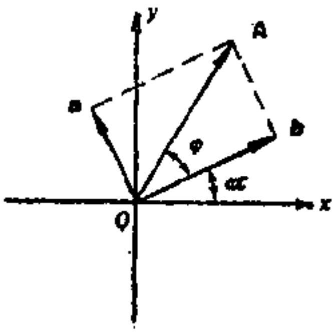

图1.3

图中a、b表示旋转矢量，a比b超前$\frac{\pi}{2}$相位角，即两矢量相垂直。a、b以ω同步旋转，两者合成为A。A与b间夹角为φ，A在铅垂轴上投影为$y = A\sin(\omega t+\varphi)$，这里$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$与$y = A\sin(\omega t+\varphi)$表示了同一个简谐振动，由三角函数关系，可得

$$a = A\sin\varphi, b = A\cos\varphi, A = \sqrt{a^2+b^2}, \mathrm{tg}\varphi = \frac{a}{b}。$$

从物理概念上说明，两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动。反之，一个简谐振动也可以分解成两个同频率的简谐振动之和。

两个旋转角速度不相同的旋转矢量，显然是不能这样合成的。

下面讨论简谐振动的复数表示。

我们已经知道，位移、速度、加速度都是简谐函数，故

可用旋转矢量来表示，如图1.4所示，设

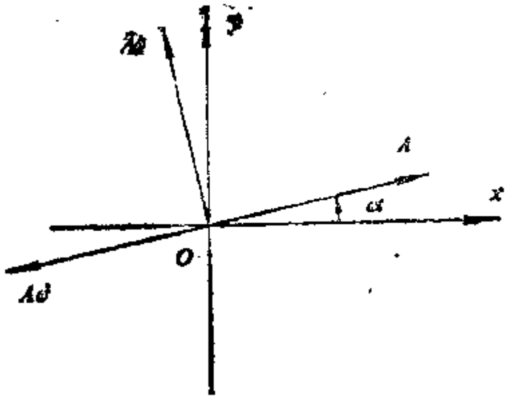

图1.4

$$\begin{cases} y = A\sin\omega t \\ \dot{y} = A\omega\cos\omega t = A\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{y} = -A\omega^2\sin\omega t = A\omega^2\sin(\omega t + \pi) \end{cases} \quad (1.2)$$

根据复数的矢量表示法，在复平面上的一个复数Z，代表在该复平面上的一个矢量，如图1.5所示 $\overrightarrow{OP}$，这个矢量的模，就是复数Z的模A，它的位置由辐角θ确定，若用i表示虚轴上的单位长度，则

$$Z = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta} \quad (1.3)$$

任一简谐振动可用旋转矢置在直角坐标轴上投影表示，同样可用复数旋转矢量在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动

$$y = A\sin\omega t = I_m Z = I_m[Ae^{i\omega t}] \quad (1.4)$$

符号$I_m Z$即指取复数Z的虚数部分的值。

上述两个同频率简谐振动的合成，运用复数的运算法则方便地得出。将

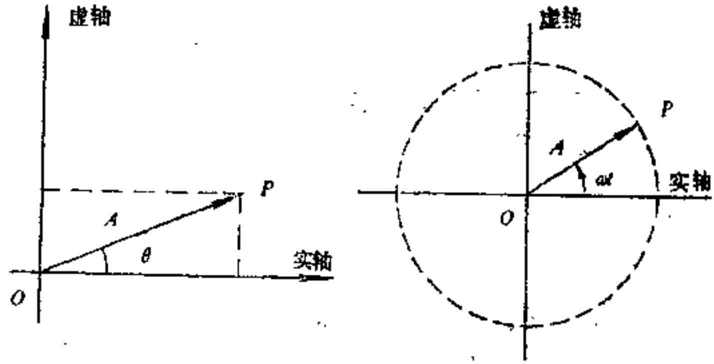

图 1.5

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\omega t$$

用复数形式可表为

$$y = ae^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} + be^{i\omega t} \tag{1.5}$$

由复数相加可得，见图1.6。

$$y = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \qquad A = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.6}$$

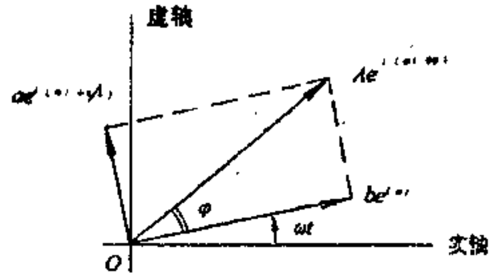

图 1.6

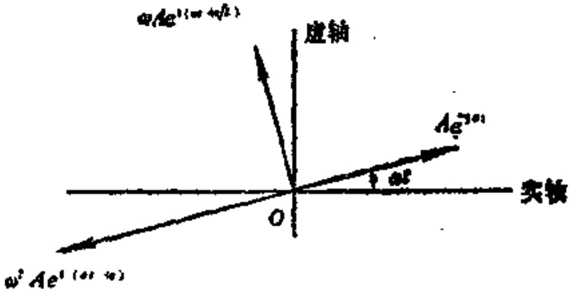

图 1.7

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{b}$$

将以上位移、速度、加速度画在复平面上如图1.7所示。以上可见，对复数每求导一次，相当于在它前面乘上一个 $i\omega$，而每乘上一个 i，相当于把这个复数旋转矢量逆时针转 $\frac{\pi}{2}$。

下面讨论谐波分析。

简谐振动是一种最简单的周期振动。实际问题中更多的是非简谐的周期振动。一般的周期振动可以通过谐波分析分解成一系列简谐振动之和。

由级数理论知，任何一个周期函数，只要满足一定的条件，都可以展成富里哀级数。这些条件是：1.函数在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点；2.在一个周期内，只有有限个极大和极小值。把一个周期函数展成一个富里哀级数，亦即展成一系列简谐函数之和，称为谐波分析。谐波分析用于振动理论便可把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。这对于分析位移、速度和加速度的波形以及分析周期激振力等都是很重要的。

现设有一个周期振动函数为 $F(t)$，它的周期为 T，则展