工程图学的理论和数学基础

画法解析几何

徐宏文　陈东祥　王金敏　著

天津大学出版社

工程图学的理论和数学基础

画法解析几何

徐宏文　陈东祥　王金敏 著

天津大学出版社

内容提要

本书在几何学领域里提出了一种用画法几何讲解析几何的新体系，在国内外学属首创．其特点是用射影的观点、投影的方法、代数的手段研究空间几何问题．它不仅使几何有了量的概念，而且使空间思维形象化，是工程图学的理论和数学基础．本书内容包括：利用投影的方法，在图示与图解的基础上，建立点，（直、曲）线，（平、曲）面的坐标和方程，研究其相对关系的解析方法；系统地介绍了移动变换、仿射变换和射影变换的概念，笛卡儿直角坐标、仿射坐标和射影齐次坐标的建立、相互关系及其应用．

本书可作为工科院校教材，也可作为工程图学专业研究生、工程技术人员以及一切从事与几何有关的科研人员的参考书。

（津）新登字 012 号

画法解析几何

徐宏文　陈东祥　王金敏 著

*

天津大学出版社出版
(天津大学内)
天津大学印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：13.4　字数：320 千字
1993 年 4 月第一版　1993 年 4 月第一次印数：1-3000
ISBN 7-5618-0490-3
O·49

定价：9.80 元

序

画法几何作为高等院校的一门基础课，在我国开设已经半个多世纪了。本来叫做投影几何，为了区别于射影几何和突出它表现几何形体以及它们相对位置的特点，才改名为画法几何。

画法几何自开设，特别是解放以来，人们对它在不同时期有过不同看法。例如，建国初期，学习苏联，人们认为制图是工程语言，画法几何是这种语言的文法。这是很不合适的，同时也是过头的褒词，以至于在60年代发展成为画法几何为制图服务，画法几何不结合实际应该取消；60年代末、80年代初，又由于教学的需要，重新设立了画法几何这门课程。开始有了画法几何方面的科研和研究生，有了这方面的专著等等。

为了教学、科研，以至于整个学科的改革、发展，不仅要看到学科的昨天，还要看到它的前天，要看到学科的建设和它与解析几何的联系。解析几何是用代数的方法研究几何的学科，是数学发展的一个转折，是在应用科技方面的主要数学工具之一，它使得几何问题有了量的概念。然而，它对几何元素本身的描述是十分乏力的。许多教科书中的插图似是而非，甚至有差误，稍许复杂的问题就难以表示。所以，对空间思维仍然处于一个“空想”阶段。

画法几何来源于解析几何，可以从它的内容看到，例如，它的点线面部分与解析几何完全一致；投影改造部分就是解析几何的坐标变换；在曲面方面，特别强调了锥柱、回转面和二次曲面，这也是解析几何中涉及的内容，所不同的只是处理方法的不同而已。在画法几何里，一般强调尺规作图，强调投影的表示，这仍然是当年蒙日（Monge）以尺规作图的方法图解军事工程问题得到巨大成就，从而创建这个学科的历史痕迹。当年如此，现在，作为计算机时代的20世纪，再强调图解的简单、方便、速度，显然是十分不合适的了。在解析几何方面，也有类似的情况，一直保留着代数分析传统，哪怕是极其简单的问题也不肯用投影的方法说明问题。所以，直观性很差，妨碍了人们进一步的空间思维。本书的主要目的之一就是采取形数相结合的办法来解决画法几何里的几何问题，弥补画法几何和解析几何的不足。

形数结合还不仅是取长补短、恢复几何问题本来面目的一种做法，而更重要的是注意到了学生空间思维能力的发展和培养。已如上述，画法几何本身并没有什么新的内容，所有的内容都是解析几何中的，不同的只是投影方法。几十年的教学经验告诉我们，学生对于这样内容的学习，在学习初期，感到十分困难。比如有“头疼几何”之称。可是到了后来，就感觉比较容易了。所以，这只是一个对于方法掌握的不习惯，是空间思维能力的培养，是一个锻炼的过程，而并不是一个知识的累积。考虑到这样的一个特点，因此形和数的结合就更显得十分必要了。所以，我们认为这门课的一个主要性质是培养空间思维能力。这种能力的培养对于设计思想、空间构思等等都有直接的效益，而不仅只限于空间的几何问题本身。

徐 宏 文

1989年12月10日

目　　录

第一章　投　影

§1　投影的建立

本书利用投影和坐标来研究和解决空间的几何问题，以点作为基础，从投影入手说明问题。参考图 1-1，S 是空间的一个点，作为投影中心，π 是空间不经过 S 的一个平面，作为投影平面。S 和 π 结合在一起叫做投影条件。投影条件确定以后，空间的形体就可以进行投影了。例如，A 表示空间的一个点，连接 S、A 的直线叫做投影线。投影线与 π 平面的交点 a 叫做 A 的投影。这里注意，投影的概念与物体在光线照射下产生影子的概念不同，它比影子的概念更为广泛。例如，图 1-1 中的 B、C 两点在发光点 S 的照射下，在 π 平面上都不会出现影子，但它们的投影线与 π 平面相交，所以都有投影。另外，SA、SB 和 BC 是三条重合的投影线，所以它们的投影 a，b 和 c 在 π 平面上重合。因为如果直线与平面相交，则有唯一交点，因此，空间的点对 π 平面有唯一的投影。反之，从图 1-1 中所表示的 a，b，c 三点可以看到，已知投影却不能确定点在空间的位置，点与其投影不是一对一的。再如，D 点在 π 平面上，按上述做法，其投影与本身重合。空间所有的点都有投影吗？这是我们进一步讨论的问题。设空间有一点 E，SE 平行于 π 平面，按上述作法得不到投影。然而，在射影几何的观点下，认为 SE 与 π 平面交于无穷远的点，即非固有点。所以 E 点也可以认为有投影，用 e_∞表示。补充了非固有点。消灭了平行和相交的差别后，空间的点还有一个例外，那就是投影中心 S 点本身。例如，点 F 重于 S 时，连接 S、F 的投影线是无穷多的，我们可以认为 π 平面上所有的点都是 F 的投影 f，我们也可以认为 F 没有投影。这两种概念，哪种合适呢？为了照顾到投影和坐标的统一，我们规定投影中心没有投影。所以，空间所有的点除投影中心外都有唯一的投影。关于点的投影问题，可以得到以下结论：**投影条件确定以后，除投影中心外，空间的所有点都有唯一的投影，然而由点的投影却不能确定该点的空间位置。**

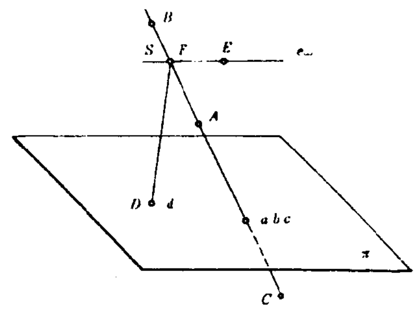


图 1-1

§2　中心投影的投影规律

图 1-2 表示了投影方法的最一般形式，即投影线汇交于一点，叫做中心投影法。利用中心投影法得到的投影叫做中心投影，中心投影的基本规律如下：

1. 除投影中心外，空间点的投影都是点，每个点只有唯一的一个投影。详见上节。
2. 一般位置的直线的投影仍然是直线，如图 1-2 中的直线 AB；当直线通过投影中

心时，其投影积聚成一点，投影的这种性质叫做直线的投影积聚性，如图 1–2 中的直线 CD；点属于直线，点的投影属于直线的投影。如图 1–2 中的 E 点属于 AB；F 点属于 CD，则 e 属于 ab，f 属于 cd。证明从略。

3. 直线上四点的交叉比是投影的不变量。参考图 1–3，直线上有 A、B、C、D 四个点，它们的投影分别为属于另一条直线的 a、b、c、d 四个点。交叉比的定义如下：

$$(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}}$$

即交叉比（$ABCD$）是两个简单比（ABC）和（ABD）的比。而简单比，例如（ABC）是两个有向线段 AC 与 BC 的长度比，投影规律就是（$ABCD$）=（$abcd$），证明如下：

参考图 1–3，利用三角形的正弦定理，并注意到：$\angle ASC=\angle aSc$; $\angle BSC=\angle bSc$; $\angle ASD=\angle aSd$; $\angle BSD=\angle bSd$，则有：

$$(ABCD)=\frac{AC/BC}{AD/BD}=\frac{SA\sin\angle ASC/SB\sin\angle BSC}{SA\sin\angle ASD/SB\sin\angle BSD}=\frac{\sin\angle ASC/\sin\angle BSC}{\sin\angle ASD/\sin\angle BSD}$$

$$=\frac{\sin\angle aSc/\sin\angle bSc}{\sin\angle aSd/\sin\angle bSd}=\frac{Sa\sin\angle aSc/Sb\sin\angle bSc}{Sa\sin\angle aSd/Sb\sin\angle bSd}=\frac{ac/bc}{ad/bd}=(abcd)$$

(证毕)

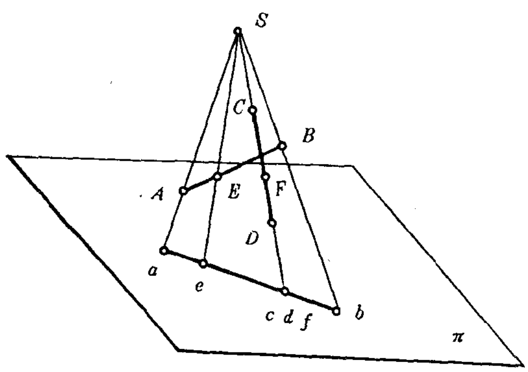


图 1–2

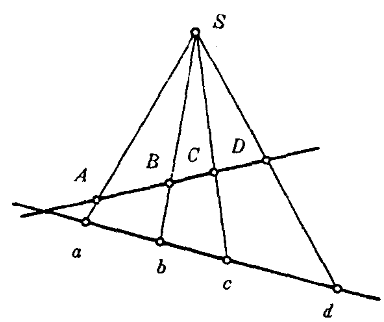
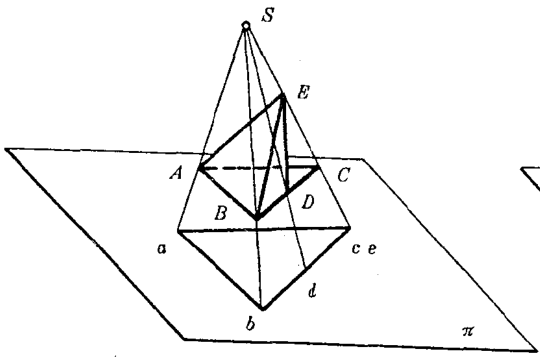


图 1–3

交叉比是射影几何里的根本问题，是射影坐标的基础，是任何投影的不变量，所以把它作为中心投影的一条基本规律。

4. 平面图形的投影一般叫做它的射影对应形；当平面图形所在的平面平行投影面时，投影与平面图形本身相似；当平面图形所在的平面通过投影中心时，投影积聚成一条直线，这是平面图形投影的积聚性，如图 1–4 所示。此投影规律的第一种情况是射影对应形的定义；第二种情况是锥的截交线的特性，锥在平行两平面上的截交线是相似形。

5. 参考图 1–5。当投影中心重于锥的顶点时，锥面的投影有积聚性。这条规律是今后解决有关锥面公有部分问题时，利用投影积聚性的依据。



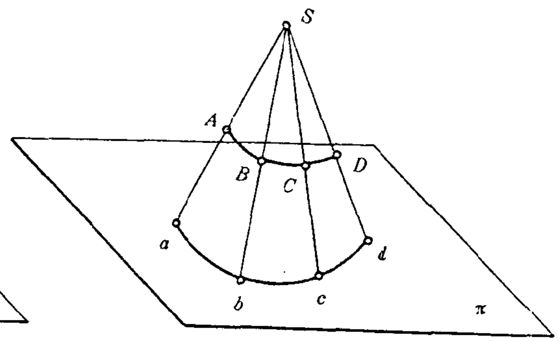


图 1—4　　　　　　图 1—5

应该注意到，以上五条投影规律都是由空间到投影的，而没涉及由投影返回空间的读图问题。因为有关读图问题不是由一个投影所解决的，这在第一节作为结论已经做过说明。点的一个投影不能读图，直线、平面以及其它形体就更不可能了。

§3　平行投影的投影规律

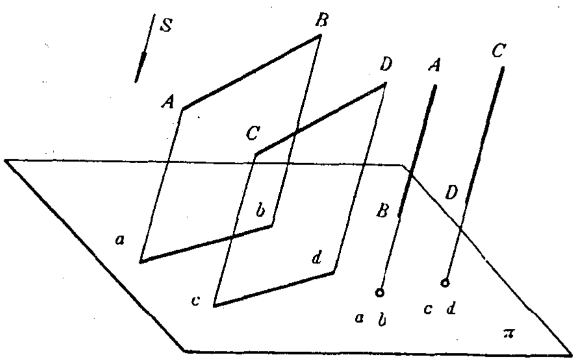


图 1—6

作为中心投影的特例，当投影中心 S 无限远离投影平面时，所有投影线都成为平行直线，这种情况叫做平行投影。中心投影的投影条件是投影中心和不经过投影中心的投影平面。对于平行投影，投影条件是投影方向和投影平面，投影方向不平行投影平面。平行投影是中心投影的一个特例，自然具有中心投影的各种投影性质，此外它还有其本身的一些投影规律，列举如下：

1. 空间平行二直线的投影仍是平行二直线；特殊情况下，当它们平行于投影方向时，投影积聚成两个点。如图 1—6 中的 AB 和 CD。这是平行投影的一条基本规律，它不

仅是平行投影一系列理论的基础，也是绘制平行投影图的一个主要依据.

2. 直线上的三点简单比是投影的不变量。参考图 1–7，证明（ABC）=（abc）。

因为是平行投影，所以投影线 Aa、Bb 和 Cc 是共面的平行直线。共面的三条平行直线被两条直线所截，所得的线段成比例。所以 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{ac}{bc}$ 或写成（ABC）=（abc）。

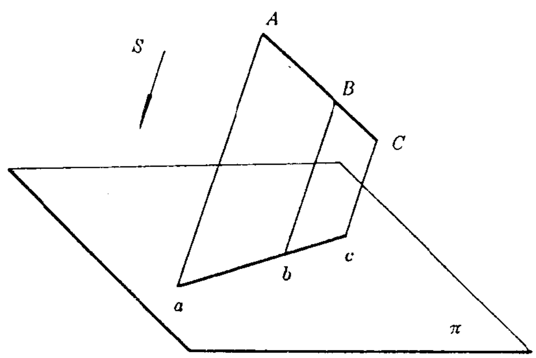


图 1–7

此简单比投影不变的概念是绘制平行投影图、轴测投影图的一个主要依据，同时也是使用仿射坐标或笛卡儿直角坐标，求坐标值的一个主要依据。因此，它具有重要的意义。

3. 参考图 1–8，平面图形的投影一般叫做它仿射对应形；当平面图形所在的平面平行投影面时，投影与图形本身是全同的形状；当平面图形所在的平面平行投影方向时，投影积聚成直线。

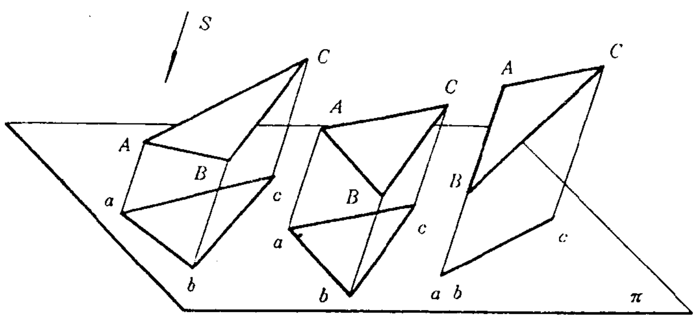


图 1–8

4. 参考图 1–9，投影方向平行于柱体表面素线时，柱体表面的投影有积聚性。

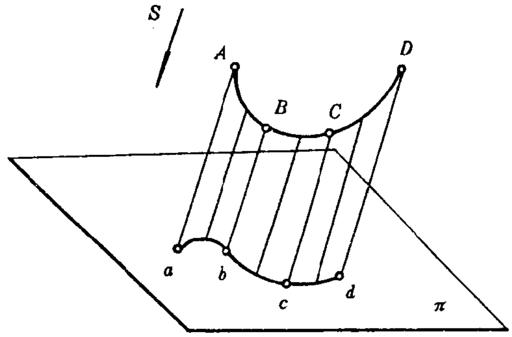


图 1–9

根据上节第五条，中心投影也叫做锥面投影．根据本节第四条，平行投影也叫做柱面投影．应该注意，锥和柱是同一类型的几何体，锥的顶点是固有点，柱的顶点是非固有点，在这样一种扩大的射影几何概念的理解下，锥和柱的许多问题，中心投影和平行投影的许多问题都可以统一起来．

§4 投影和投影图

中心投影常用于建筑和绘画，用中心投影法绘制的投影图叫做透视图．平行投影，特别是轴测投影在工程技术方面有广泛地应用．我国早在明代宋应星的《天工开物》一书里，有许多插图就体现了保持景物的平行性和相对大小比例不变的原则．这实际上就是轴测投影图．现在，轴测投影图不仅是一种理解空间形体的参考图样，而且逐渐成为工程技术的一种正式的图纸，特别是机械方面的装配图及其它线路图等．

作为平行投影的特例，当投影方向垂直于投影面时，叫做正投影．正投影更是工程技术中的一个主要使用形式．本书绝大部分采用正投影形式．正投影和笛卡儿直角坐标系有着不可分割的关系，这将在以后各章陆续说明．投影理论除了直接用于绘制投影图外，它的概念也可以用于其它领域．例如，中心投影的概念已经成为摄影测量的数学基础；平行投影，特别是平行投影更为广泛的几何概念仿射变换，可以更好地说明弹性变形现象等等．

思 考 题

1. 参考图 1–3 和图 1–10，说明对任何情况，直线上的四点交叉比是各种投影的不变量．

2. 下面的结论是否正确．

对于平行投影，当平面图形所在的平面平行投影平面时，投影与图形本身是全同的形状；反之，当平面图形与它的投影是全同的形状时，平面图形所在的平面与投影面平行．

对于正投影，当平面图形所在的平面平行投影平面时，投影反映实形（实际形状）；反之，当平面图形的投影反映实形时，平面图形所在的平面平行于投影平面。

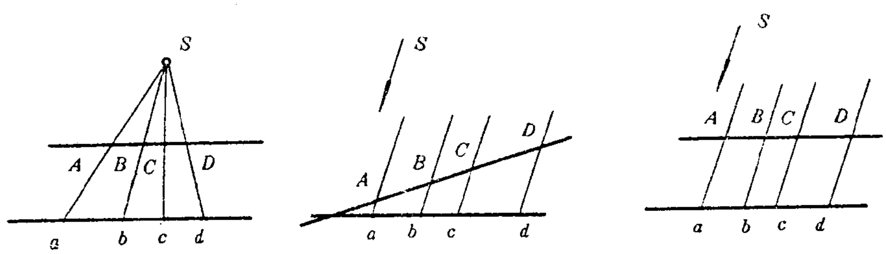


图 1-10

第二章　　点

§1　投影（坐标）平面和笛卡儿直角坐标系

前面谈过，点的一个投影不能确定它的空间位置，为此，这里使用更多的投影平面。参考图 2–1，V 投影面是正对观察者的铅直平面。我们称 V 面距观察者较近的一方为前方；距观察者较远的一方为后方。第二个投影面是垂直于 V 面的水平投影面 H。它的上方为上方；它的下方为下方。V、H 两投影面互相垂直，其交线叫做 X 轴。此外，还有一与 H 和 V 面垂直的侧立投影平面，叫做 W 投影面。以观察者为基准，W 面的左方为左方，W 面的右方为右方。W 面与 H 面的交线叫做 Y 轴；与 V 面的交线叫做 Z 轴。X、Y、Z 三轴线互相垂直相交，其交点 O 叫做原点。OX 轴的左方为正，右方为负；OY 轴的前方为正，后方为负；OZ 轴的上方为正，下方为负。在三轴的正方，从原点 O 各设一单位尺，单位尺的端点分别用 E_1、E_2 和 E_3 表示，OE_1、OE_2 和 OE_3 三单位长可作为三个矢量看待，它们的顺序符合右手的拇、食、中指顺序，所以叫做右手笛卡儿直角坐标系。

H、V 和 W 三个坐标平面把整个空间分成了八个部分，叫做八个卦角。V 前，H 上，W 左部分叫做第一卦角；V 后，H 上，W 左部分叫做第二卦角；V 后，H 下，W 左部分叫做第三卦角；V 前，H 下，W 左部分叫做第四卦角。一、二、三、四是 W 面左边的四个卦角，W 面右边有五、六、七、八四个卦角，依次与一、二、三、四卦角对应，如图 2–1 所示。

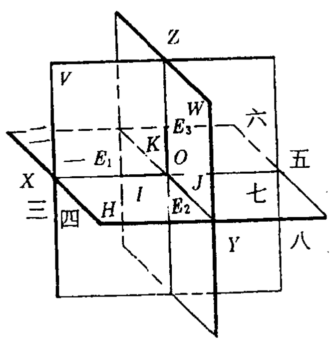


图 2–1

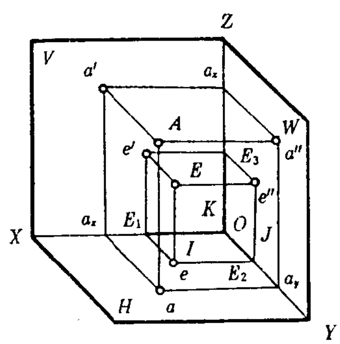


图 2–2

§2 点的投影和坐标

参考图 2–2，A 表示空间任意一点，过 A 点平行 W 面作一平面与 OX 交于 a_x 叫做 A 的 X 轴的轴投影．同样，过 A 平行 V 面作平面交 OY 于 a_y；过 A 点平行 H 面作平面交 OZ 轴于 a_z，这样每一个空间的点都有三个轴投影．所作的三平面也是互相垂直的，它们与 H、V 和 W 面构成一个长方体，共有 12 个棱，每四条一组，互相平行．反过来，如果已知 a_x，a_y 和 a_z，也能作出三个平行坐标平面的平面，它们的交点就是空间的点 A 了．三个轴投影可分别用三个数来确定它们的位置，叫做坐标．例如，

$$x=(a_x\ E_1\ O)=\frac{Oa_x}{OE_1},\quad y=(a_y\ E_2\ O)=\frac{Oa_y}{OE_i},\quad z=(a_z\ E_3\ O)=\frac{Oa_z}{OE_3}.$$

用简单比可确定轴投影，用轴投影可确定空间的点．这里 x、y 和 z 叫做点 A 的笛卡儿直角坐标．

如图 2–2 所示，过 A 点分别平行 V 面和 W 面的两平面交于垂直 H 面的直线，该线作为正投影的投影线与 H 面交于一点，用 a 表示，a 叫做 A 点在 H 面上的面投影，简称 H 投影；同样，过 A 平行 H 和 W 面的两平面的交线垂直于 V 面，交 V 面于 a'点，a'叫做 A 的 V 投影；过 A 点平行 H 和 V 面的两平面的交线垂直 W 面，与 W 面交于 a'' 点，a''叫做 A 的 W 投影．所以 A 点又有三个面投影．这就是常用的正投影．从图 2–2 可以看到，每一个面投影都是由两个轴投影或两个坐标确定，而两个面投影确定三个轴投影或三个坐标，从而确定了点的空间位置．因此，对于点，已知它的两面投影可求出第三投影，在机械制图中把它叫做二求三问题．

注意，用简单比定义坐标，而简单比是两个有向线段长度的比，所以坐标的实质是数，不是长度，不要与距离的概念混淆．再者，以上论述，都是从两平面平行的概念出发的，所以对于这些投影、轴投影和坐标问题也完全适用于仿射坐标系．仿射坐标系与笛卡儿直角坐标系的不同在于它的单位尺不必等长，各坐标轴间的夹角也不必都是 90°．再进一步，简单比是交叉比的特例，更一般的坐标系是射影坐标系，所以最根本的坐标基础是交叉比，详见以后各章．

这里应指出，笛卡儿直角坐标系上的单位尺端点 E_1、E_2、E_3 也可作为空间的一个点 E 的三个轴投影，把 E 点称为单位点．单位点 E 不仅有三个轴投影，还有面投影 e、e' 和 e''，和空间的一般点 A 一样，参见图 2–2．

§3 投影平面的展开

根据上节所述，由点的轴投影或面投影能确定该点的空间位置．然而，三互相垂直投影面的作法不方便，为此需要把它们展开在同一平面上．不同的展开方式形成不同的图样，为此需要进行规定，规定的展开方法如下:

1\. V 面不动．由于 V 面不动，其上两坐标轴 X、Z 轴也不动，在投影图中表现为十字线，如图 2–3 所示．

2\. 旋转 H 面．H 面前半部向下旋转，后半部向上旋转，使之重于 V 面．H 面上也