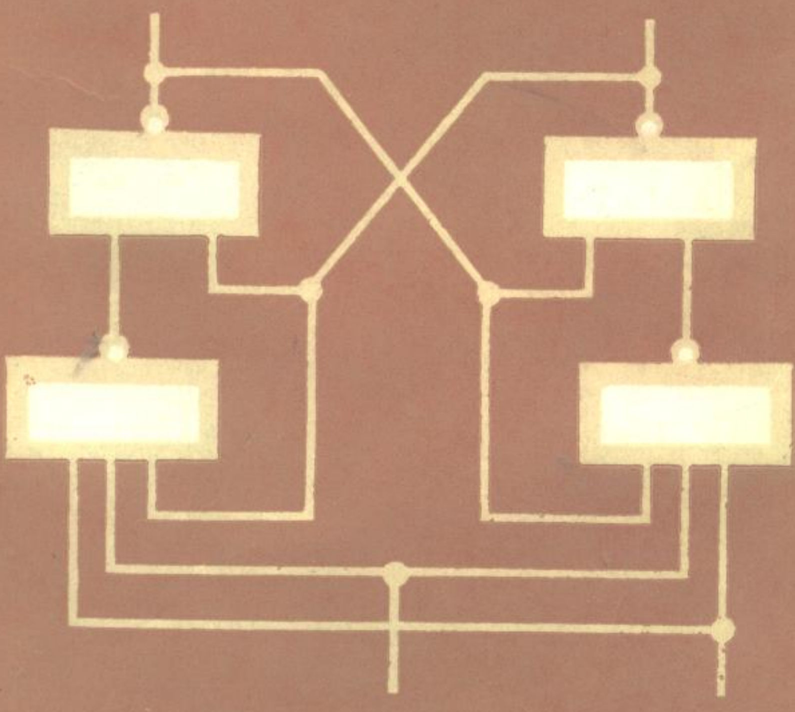
余雄南 主编

数字电路与系统



西安电子科技大学出版社

数 字 电 路 与 系 统

余雄南 主编

西安电子科技大学出版社

1988

内 容 简 介

本书是为高等院校工科无线电类专业编写的专业基础课教材。内容分为9章：①基本概念；②数制与代码；③数字器件；④组合逻辑网络的分析与综合；⑤中大规模数字集成电路(一)；⑥同步时序逻辑网络；⑦异步时序逻辑网络；⑧中大规模数字集成电路(二)；⑨数字系统。

本书可作为通信、电子工程、计算机类及相近专业的教材及参考书，也可供有关工程技术人员参考。

数字电路与系统

余雄南　主编

责任编辑　景虹

西安电子科技大学出版社出版发行

空军导弹学院印刷厂印刷

新华书店经销

开本787×1092 1/16　印张16 8/16　字数403千字

1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷　印数1—2000

ISBN 7-5606-0026-3/TN·0007　　定价：3.30元

前　言

数字电路和系统的理论是近40年发展起来的，在此基础上形成的数字技术是当前发展最快的应用学科之一。因此为适应数字技术迅速发展的需要提供基础知识和逻辑分析与设计方法是很必要的。

本书是为高等院校工科无线电类专业编写的专业基础课教材，全书共九章。第一章以集合论和布尔代数为基础，介绍逻辑代数的基本概念、定理和运算，这一章是学习全书的数学基础。

第二章叙述了数字电路中所用的数制和代码。

第三章至第八章以小规模数字集成器件作为基本器件，讲述数字电路的工作原理和逻辑分析与设计方法；详细介绍了组合逻辑网络与时序逻辑网络；以较多篇幅介绍了中、大规模集成电路的逻辑设计方法及其应用。

第九章介绍了用于信息处理的数字系统的方框图，着重讲述了数字系统中各个组成部件的结构类型及工作原理，使读者对数字系统的组成能有一个完整的了解，从而对数字电路的实际应用有更深入一步的认识。

为了帮助读者理解书中的主要内容，各章均附有习题，以便读者练习。全书最后列出了主要参考文献。

本书由余雄南主编，其中第一、九章由余雄南执笔；第二、五章由阮德生执笔；第三、四章由杨颂华执笔；第六、七、八章由叶寿林写出初稿，余雄南、李万宏修改写成。全书由余雄南审定。

由于编者水平有限，书中难免有不妥或错误之处，望读者批评指正。

编　者

1988年5月

目 录

第一章 基本概念

§1 引 言

近年来，半导体集成电路的制造工艺有了变革性的飞跃进展，使大规模和超大规模数字集成电路得到了广泛应用，数字技术渗透到了科学、国防和国民经济的各个领域。电路和系统的研究重点已向着离散和数字方面转移，过去用传统的模拟系统执行的大多数功能，现在都可以用数字方法实时地完成。因而出现了用数字技术加工、处理和传输信息的电路和系统——数字电路和系统。医疗仪器，信息存贮、过程控制、空中交通管制、语音合成、通信、图象处理、电视、雷达等各种设备和装置都在向着数字化方向发展，所以数字电路和系统成了这些设备中的重要部件。

数字系统和模拟系统相比，数字系统能高精度、高稳定性地实现模拟方法所难以实现的一些性能，例如，数字系统的抗干扰性强，保密性和通用性好，功耗低，尤其是微处理器和微型计算机的出现，加速了数字系统朝着小型化、多功能化、自动化和智能化的方向发展。

数字电路工作于离散时序，它由一些单元电路即各种门电路和触发器组成，它的输入信号和输出信号都是由“0”和“1”表征的二值数字信号。数字电路的工作过程总是在一定条件下体现一种因果判断关系，这种因果关系可用一定的逻辑函数式(逻辑方程)来表示。实际上，逻辑函数式反应了数字电路输入变量和输出变量之间的逻辑关系，因此，人们把这类能根据一定的逻辑关系作出因果判断的数字电路又称为“逻辑电路”，进而把那些能完成特定功能的逻辑电路称为逻辑功能部件。一般而言，数字系统就是由逻辑电路和逻辑功能部件组成的。

本章将介绍学习数字电路和系统所必须具备的数学基础：集合论；布尔代数和逻辑代数，以及逻辑代数的基本运算规则。

§2 数学基础

2-1 集合及其运算

集合论是现代数学的基础。有关集合的一些基本知识是我们学习数字电路必须具备的。

一、集合的概念

集合论是19世纪德国数学家康托尔创立的，集合论的出现引起了学术界的重视。现在集合论已在数字电子学、计算机科学、人工智能、逻辑学、经济学、语言学和心理学等许多方面有着重要的应用。

什么是集合呢？我们知道，宇宙间的事物无不具有种种性质，且互有联系。凡具有某些性质而又相互有别的事物组成的集体，叫做集合。我们用属于(符号为$\in$)来表示集合及其组成部分的关系，也就是说，若A是一个集合，则$a\in A$表示a是属于集合A的一个成员或元素。$a\notin A$，表示a不是集合A的成员或元素。

定义1 设A和B是两个集合，若A的每一元素都是B的一个元素，就称A包含于B或A

是B的子集，记以

$$A \subset B \tag{1-1}$$

定义2 两个集合A和B，当且仅当它们具有相同的元素，即$A \subset B$和$B \subset A$时，就说集合A等于集合B，记以$A=B$。

若A是一集合，而σ是A中元素所具备的一个性质，则我们用 $\{a|\sigma(a)\}$ 表示A中确具有性质σ的元素的集合。例如，设R是实数的集合，若σ是性质“绝对值小于或等于1”，则 $\{r1|r|\leqslant 1\}$ 表示的是绝对值小于或等于1的实数的集合。

定义3 不具有任何元素的集合叫做空集记为ϕ。例如$x^2+x+1=0$的实根组成的集合，就是一个空集。

与空集相对应的是全集，在讨论具有某种共同特征性质的事物所组成的集合时，把具有这种共同特征性质的一切事物所组成的集合，叫做全集合，简称全集，记为E。空集合和全集合都是唯一的。在不同的情况下，全集所包含的元素是不同的。在有理数集合内，讨论它的一些元素组成的集合，有理数集合就是全集。在实数集合内，讨论它的一些元素组成的集合，实数集合就是全集。如讨论存贮器，则存贮器的全体存贮单元构成一个全集。

定义4 若集合A的元素个数是有限个，则称集合A为有限集合；若集合A的元素是无限个，则称集合A为无限集合。

在有限集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中，元素的数量记为$|A|$，有限集合$A$的元素数量$|A|=n$。空集$\phi$的元素数量$|\phi|=0$。

二、集合的运算

我们来研究集合的基本运算：并、交、补、积。

定义5 凡由集合A、B中属于A或B的元素所组成的集合，称为集合A、B的并集，记为$A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x|x \in A\text{或}x \in B\} \tag{1-2}$$

定义6 凡由集合A、B中所有公共元素组成的集合，称为集合A、B之交集，记为$A \cap B$，即

$$A \cap B=\{x|x \in A\text{且}x \in B\} \tag{1-3}$$

定义7 若集合$A \subset B$，则由B中不属于A的元素所组成的集合，称为A在B中之补集，记为$B-A$，即

$$B-A=\{x|x \in B\text{且}x \notin A\} \tag{1-4}$$

式中$x \notin A$表示x不是A的元素。

定义8 两个集合A和B之积集，表示所有依序配对$\{a, b\}$的组合，其中$a \in A$，$b \in B$，记为$A \times B$，即

$$A \times B=\{(a, b)|a \in A, b \in B\} \tag{1-5}$$

上述并、交、积的定义可推广到有限多个集合或无限个集合的情形。

定义9 n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$之并集，用$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$表示，并按下式定义：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n \tag{1-6}$$

定义10 n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$之交集，用$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$表示，并按下式定义。

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n \tag{1-7}$$

定义11 n个集合A_1，A_2，…，A_n之积集，用$\prod_{i=1}^{n} A_i$或$A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$表示，并按下式定义：

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)\,|\,a_i\in A_i,\ i=1,2,\ 3,\ \cdots,\ n\} \tag{1-8}$$

定义12 无限个集合A_i，$i=1$，2，…的并集用$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示，可定义为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{a\,|\,\text{至少存在一个}i_0\text{，使得}a\in A_{i_0}\} \tag{1-9}$$

定义13 无限个集合A_i，$i=1$，2，3，…的交集用$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$表示，可定义为

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{a\,|\,a\in A_i\text{，对每个}i\} \tag{1-10}$$

下面的定理归纳了一些常用的运算公式。

定理1. 若A、B和C都是集合，则

(1) $A-A=\phi$，$A-\phi=A$

(2) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

(3) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$

(4) 若$A\subset C$，$B\subset C$，则$A\cup B\subset C$

(5) 若$C\subset A$，$C\subset B$，则$C\subset A\cap B$

(6) $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$

(7) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(8) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(9) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(10) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2. 若A_i，$i=1$，2，…都是集合A的子集，则

(1) $A-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A-A_i)$

(2) $A-\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A-A_i)$

3. 若A、B、C和D都是集合，则

(1) 若$A=\phi$或$B=\phi$，则$A\times B=\phi$

(2) $(A\times B)\cup(C\times B)=(A\cup C)\times B$

(3) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

证 这些关系式都可根据定义加以证明。现以2.(1)为例，设$a\in A-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$，则$a$不在$A_1$中，因若$a$在$A_1$中，则$a$势将在$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$中，这是违背原假设的；于是$a\in A-A_1$。应用类似方法，可以证明对每一个$i$，有$a\in A-A_i$，故而 $a\in\bigcap_{i=1}^{\infty}(A-A_i)$。反之，若$a\in\bigcap_{i=1}^{\infty}(A-A_i)$，则对每一个$i$，有$a\in A-A_i$，故而$a$不属于任何$A_i$，即$a\in A-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$。

三、欧氏空间 开集和闭集

定义14 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$是$n$维空间中的点，仿照二维与三维空间中有关距离的概念，用$d(x, y)$表示x和y之间的距离，并按下式定义：

$$d(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{1-11}$$

这种赋有距离意义的空间，称为n维欧氏空间，并用R^n表示。

定义15 距离$d(x, y)$具有下列三条基本性质：

1. $d(x, y)\geqslant 0$，当且仅当$x=y$时，才有$d(x, y)=0$。 (1-12)
2. $d(x, y)=d(y, x)$ (1-13)
3. $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$ (1-14)

定义16 设Ω是一集合，x_0为其中一点，$\rho>0$是实数，则定义

$$S(x_0, \rho)=\{x\in\Omega \mid d(x_0, x)<\rho\} \tag{1-15}$$

并称为对x_0的半径为ρ的开域，而

$$\overline{S(x_0, \rho)}=\{x\in\Omega \mid d(x_0, x)\leqslant\rho\} \tag{1-16}$$

称为对x_0的半径为ρ的闭域。

定义17 内点 设A为Ω的子集，而$x\in A$，则若存在$\rho>0$，使开域$S(x, \rho)$包含于A，即$S(x, \rho)\subset A$，就称x为A的一个内点。

例如，若A是开域本身，即$A=S(x_0, \rho)$，则A中每一元素是A的一个内点。

定义18 开集 若A的每一元素都是A的内点，则称A为Ω的一个开子集，简称开集。

例如，若$\Omega=R$，a和b是R中的元素，且$a<b$，则集合$\{r\in R \mid a<r<b\}$是开集，并称之为端点是a和b的开区间，记为(a, b)，即$(a, b)=\{r\in R \mid a<r<b\}$。

定义19 极限点 设B是Ω的一个子集，而x是Ω中的一个元素。若存在B中元素的一个序列$\{x_n\}$，$n=1, 2, \cdots$，它收敛于x，则称x为B的一个极限点。

应当注意，B的极限点不一定位于B中。举例来说，若B是R的子集，由$B=\{r \mid 0<r\leqslant 1\}$确定。易见由$B$中元素构成的序列$\{1/n\}$，$n=1, 2, \cdots$收敛于0，即0是$B$的一个极限点，但0却不是$B$的元素。

定义20 闭集 若B的每一个极限点均在B中，则称B是Ω的一个闭子集，简称闭集。

若$Q=R$，a和b是R中的元素，且$a<b$，则集合$\{r\in R \mid a\leqslant r\leqslant b\}$是闭集，并称之为端点是$a$和$b$的闭区间，记为$[a, b]$，即$[a, b]=\{r\in R \mid a\leqslant r\leqslant b\}$。此外，我们还将用$[a, b)$和$(a, b]$分别表示集合$\{r \mid a\leqslant r<b\}$和$\{r \mid a<r\leqslant b\}$，并称之为半开或半闭区间。

2-2 关系和关系图

集合论中有一个很重要的概念——关系，它的定义如下：

定义 集合A，B的积集$A\times B$的一个子集R称为A到B的二元关系，以下简称关系。

对$A\times B$的元素(a,b)若有$(a,b)\in R$记为aRb，反之若$(a,b)\notin R$，则记为$a\overline{R}b$。

例如：

$A=\{$赵、钱、孙、李$\}$

$B=\{$优、良、中、及格、不及格$\}$

$A\times B$ 就是赵、钱、孙、李四位同学在考试中可能出现的情况，它共有 $4\times5=20$ 种搭配方式，假设在毕业考试中，赵得优，钱得良，孙不及格，李得中，则构成一个关系，即：

$R=\{$(赵，优)，(钱，良)，(孙，不及格)，(李，中)$\}$ R 是 $A\times B$ 的一个子集。

用表来表示关系则如表 1-1 所示。表中“1”表示 $(a, b)\in R$，“0”表示 $(a,b)\notin R$。如(赵，优)$\in R$，在相应位置上记“1”，(赵，良)$\notin R$ 则在相应位置上记“0”。

表 1-1

R	优	良	中	及格	不及格
赵	1	0	0	0	0
钱	0	1	0	0	0
孙	0	0	0	0	1
李	0	0	1	0	0

我们把这个表写成矩阵形式便得到“关系矩阵”R 如下：

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

关系矩阵对应着关系图，若 $(a, b)\in R$，则从 a 到 b 连一条直线，如图1-1所示。

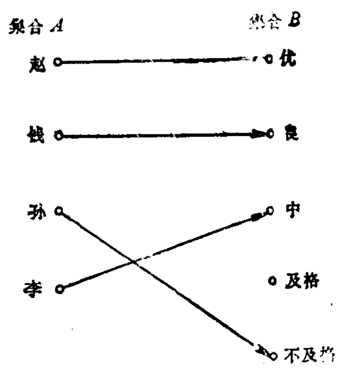


图 1-1　关系图(1)

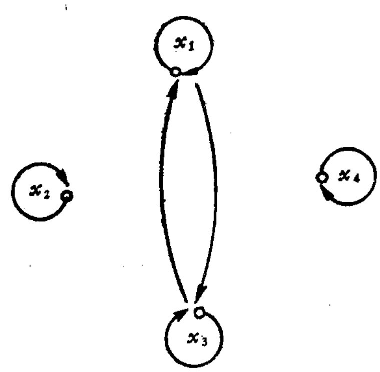


图 1-2　关系图(2)

这个例子是集合 A 到集合 B 的关系，一般 $A\neq B$。当 $A=B$ 时，关系图可以简化。例如设有一组同学

$$X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$$

R 表示年龄相等，亦即 x_iRx_j 表示 x_i 与 x_j 同年龄；类似前例同年龄记作“1”，不同年龄记作“0”，得到关系矩阵 R 如下

$$R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

与它对应的关系图如图1-2所示。这关系图只限于集合 $A=B$ 的特殊情况。当集合 $A\neq B$ 时，则与之对应的关系图必是图1-1那样的图。

我们再来考虑集合 $A=B$ 时集合 A 上的一种特殊关系，它满足以下三条公理：

自反性　xRx，即任何元素 x 自己和自己有这种关系。其中 $x\in A$

对称性　若xRy，则yRx，就是说，如果x和y有这种关系，那么y和x也一定有这种关系。其中$x\in A$，$y\in A$。

传递性　若xRy，yRz，则有xRz，亦即若x和y有这个关系，y又和z有这个关系，那么x和z必有这个关系。其中$x\in A$，$y\in A$，$z\in A$。

满足以上三条公理的关系R，叫作A中的"等价关系"，这是一种很重要的关系，它可以把A的元素分类。例如在前面所说的一组同学中，"年龄相同"就是一个等价关系；"同一学校"也是一个等价关系，它们都把这组同学分为几个互不相交的子集，我们称之为类。于是，有以下定义：

定义　设A是一个非空集合，$\cong$是A上的一个关系，如果$\cong$具有自反性，对称性，传递性，则称$\cong$是一个等价关系。

例如，几何图形的面积之间的相等关系，把面积相等的几何图形算作一类，这种分类使得每个几何图形都必定属于某类，不同类之间没有公共元素。这种分类法，就叫作一个等价关系。

定义　设A是一个非空集合，$\cong$是A上的等价关系。A的一个非空子集M叫做一个等价类，如果

（1）若$a\in M$，$b\in M$，则$a\cong b$；

（2）若$a\in M$，$b\notin M$，则$a\not\cong b$，或者

若$a\in M$，$a\cong b$，则$b\in M$。

换句话说，如果M中任意两个元素等价，而M中任意元素与M外任意元素不等价，则M就是一个等价类。

上面提到的，所有面积相等的几何图形就组成一个等价类（在面积相等关系下）。

下面我们不加证明地叙述两个定理。

定理1　设$\cong$是集合A上的等价关系，于是等价类是存在的。

定理2　设$\cong$是集合A上的等价关系，M_1，M_2，…，是A中所有等价类。于是

$$A=M_1\cup M_2\cup\cdots$$

并且$M_i\cup M_j=\phi(i\neq j)$。亦即，集合$A$上的等价关系把$A$分成了互不相交的等价类。

2-3　映射

设有集合A，B，如果有一对应关系存在，对于任意$a\in A$，有唯一的一个$b\in B$与之对应，我们就说此对应是一个由A到B的映射f，并记作：

$$f:\ A\rightarrow B$$

对任意$a\in A$经映射后变成$b\in B$，则记作：

$$b=f(a)$$

此时A叫f的"定义域"，而集合

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$$

称之为f的"值域"，显然$f(A)\subseteq B$。

映射有时也称为函数，但它是通常函数概念的推广。

以下介绍几种常见的映射：

1．当$f(A)=B$时，则称f为A到B上的映射，也叫作"满射"或"完全映射"；

2. 当$f(A)\subset B$时，则称f为A到B内的映射，也叫作"不满的映射"；

3. 若映射f满足只要$f(a)=f(a')$时，就有$a=a'$，则称f是"单射"；

4. 若映射f既是满射，又是单射，则称之为1-1对应，亦称1对1的映射。

§3　布尔代数和逻辑代数

布尔代数是19世纪中期英国数学家乔治布尔（George Boole）为把逻辑思维数学化而创立的一门介于代数与逻辑之间的边缘学科。

布尔代数是一代数(K；·，+，$^{-}$；0，1)，它由一个布尔变量集合K（K至少包含0，1两个元素)和三个操作(与·，或+，非$^{-}$)组成，且对K中的任何元素x，y和z，它们的$x\cdot y$(x和y的积)、$x+y$(x和y的和)和$\bar{x}$（x的非)都仍在集合K内。

布尔代数有如下公理：

等幂律：	$x\cdot x=x,\ x+x=x$
交换律：	$x\cdot y=y\cdot x,\ x+y=y+x$
结合律：	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
	$x+(y+z)=(x+y)+z$
吸收律：	$x\cdot(x+y)=x$
	$x+(x\cdot y)=x$
分配律：	$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
	$x+(y\cdot z)=(x+y)(x+z)$

又对于0元素和1元素有如下一些公理：

对于每个$x\in K$，存在一个唯一的1元素(1 $\in K$)，使

$$x\cdot 1=1\cdot x=x$$

对于每个$x\in K$，存在一个唯一的0元素(0 $\in K$)，使

$$x\cdot\bar{x}=0$$

$$x+\bar{x}=1$$

应该指出，以上$x\cdot y$和$x+y$不是普通的代数运算，元素0和1没有普通代数中的0和1的意义，没有任何数量的概念。

逻辑代数是一种最简单的布尔代数，即二值布尔代数，二值布尔代数({0，1}；·，+，$^{-}$；0，1)的三个操作+，·，$^{-}$的定义如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

逻辑代数是用文字A，B，C，…代替数集合{0，1}中的元素，通过+，·，$^{-}$这三种运算而形成一个运算系统。在集合{0，1}上的运算+，·，$^{-}$叫作逻辑运算，分别读作或、与、非。显然，运算+，·，$^{-}$在{0，1}上是封闭的。

3-1 逻辑代数的基本知识

一、常量变量

集合{0， 1}叫做逻辑集合。0和1叫做逻辑常量；在{0， 1}上取值的变量叫做逻辑变量，常用A，B，C，…，X，Y、Z表示。

二、逻辑式

逻辑式是由常量、变量和运算符号组成的代数式。逻辑式归纳如下：

0是逻辑式；1是逻辑式；

任一逻辑变量是逻辑式；若F是逻辑式，则$\overline{F}$也是逻辑式；

若F、G是逻辑式，则$F+G$，$F\cdot G$都是逻辑式。

例如，1，A，$\overline{A}$，$A+B\cdot C$都是逻辑式，但$A++B$，$A+\cdot B$，则都不是逻辑式。

含有n个逻辑变量的逻辑式记作$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，有时简记作F。例如：

$$F(A, B)=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B};$$

$$F(A, B, C)=A\cdot(\overline{B}+C)。$$

与算术中规定先乘除、后加减的运算次序相类似，在逻辑式中的运算次序规定为：先计算逻辑非，再计算逻辑与(又称逻辑乘)，最后计算逻辑或(又称逻辑加)。现将文献中常用的或、与、非三种基本逻辑运算的运算符号归纳如下：

或——$\vee$，$\cup$，$+$；

与——$\vee$，$\cap$，$\cdot$；

非——$\overline{\ \ }$，$\lrcorner$。

通常“与”符号在逻辑式中可省略，如$A\cdot B$可写成AB。

逻辑式的值，系指逻辑式所含诸变量A_1，A_2，…，A_n分别取逻辑0或逻辑1，按该式所含逻辑运算求出的值。

例1-1 试计算下列逻辑式的值：

(1) $A(\overline{B}+C)$，其中$A=1$，$B=0$，$C=1$；

(2) $\overline{(AC+\overline{A}D)}+BD$，其中$A$，$B$，$C$同(1)，$D=1$。

解 (1) $A(\overline{B}+C)=1\cdot(\overline{0}+1)=1$

(2) $\overline{(AC+\overline{A}D)}+BD=\overline{(1\cdot 1+\overline{1}\cdot 1)}+0\cdot 1=0$

由逻辑运算在{0， 1}上的封闭性得知：任一逻辑式仅具有0或1值。

逻辑式的真值表是指该逻辑式所含诸变量的全体取值组合，连同逻辑式的相应值一起列成的表。例如，$A+\overline{B}$的真值表如表1-2所示。

表 1-2

A	B	$A+\overline{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

两逻辑式相等，则对于诸变量的任一组取值，此两逻辑式相应的值都相等。例如：$F=A+\overline{A}$和$G=1$两式相等，F含有变量A，而G不含变量。又如$F=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}C$和$G=\overline{A}$相等，$F$含变量$A$，$B$，$C$，而$G$只含变量$A$的逻辑非。

从以上论证，我们可得出一个重要性质，即两逻辑式

相等，它们的真值表必须完全相同。反之，当且仅当两逻辑式真值表完全相同，则它们一定相等。但两逻辑式所含变量并不要求一样。

设给定两个逻辑式F和G，它们所含变量为A_1，A_2，…，A_n。由于每一变量仅取0或1值，故n个变量可列出2^n组不同的取值。若$F=G$，对于这2^n组取值，F和G的相应值都应相等，因此，它们的真值表相同。

例 1-2 试证下列逻辑等式成立：

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

证 列真值表如下：

A	B	C	$A+BC$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

因为真值表完全相同，所以$A+BC=(A+B)(A+C)$。

综上所述，不难证明，逻辑运算或、与、非满足四条基本运算规律：

交换律

$$A+B=B+A$$
$$AB=BA$$

分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

互补律

$$A+\overline{A}=1$$
$$A\cdot\overline{A}=0$$

0-1 律

$$A+0=A$$
$$A\cdot 1=A$$

三、运算规律

在逻辑代数中，除上述四条基本运算规律外，还有下述一些重要的运算规律。

极元律

$$A+1=1$$
$$A\cdot 0=0$$

结合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$A(BC)=(AB)C$$

幂等律

$$A+A=A$$
$$AA=A$$

双否律

$$\overline{\overline{A}}=A$$

反演律(De Morgan律)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$$
$$\overline{(AB)}=\overline{A}+\overline{B}$$

吸收律1

$$A+AB=A$$
$$A(A+B)=A$$

吸收律2

$$A+\overline{A}B=A+B$$
$$A(\overline{A}+B)=AB$$

消去律

$$AB+A\overline{B}=A$$
$$(A+B)(A+\overline{B})=A$$

包含律

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

上述各等式可分别用真值表方法验证。

3-2 分解定理

利用分解定理可以证明逻辑变量有可能从逻辑式中分离出来。因此分解定理又叫作变量分离式。

一、任给逻辑式$F(A)$，则有

(1) $F(A)=A\cdot F(1)+\overline{A}F(0)$;

(2) $F(A)=[A+F(0)][\overline{A}+F(1)]$

证 列真值表

A	$F(A)$	$A\cdot F(1)+\overline{A}\cdot F(0)$	$[A+F(0)][\overline{A}+F(1)]$
0	$F(0)$	$F(0)$	$F(0)$
1	$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$

由真值表证得(1)和(2)两等式成立。

二、任给一个n变量的逻辑式$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，则

(1) $F(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n)$

$=A_iF(A_1, \cdots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}\cdots, A_n)+\overline{A_i}F(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \cdots, A_n)$

(2) $F(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n)$

$=[A_i+F(A_1, \cdots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \cdots, A_n)][\overline{A_i}+F(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, 1, A_{i+1}, \cdots, A_n)]$

证 设诸变量$A_1, A_2, \cdots, A_n$的任一组取值为

$$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n$$

其中$\varepsilon_i=0$或$1(1\leqslant i\leqslant n)$。若将$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 0, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n$代入(1) 式两边则

左边$=F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 0, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n)$

右边$=0\cdot F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 1, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n)+\overline{0}\cdot F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 0, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n)$

$=F(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 0, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n)$

因此对于$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 0, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n$的$2^{n-1}$组不同的具体值，(1) 式两边的$2^{n-1}$个相应值都相等。

同理，对于$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, 1, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n$的$2^{n-1}$组不同的具体值，(1)式两边的$2^{n-1}$个相应值也都相等。因此，对于$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n$的$2^n$组不同的值，(1)式两边的$2^n$个相应值都相等，从而由两逻辑式相等的定义证得(1)式成立。(2)

式留给读者自己证明。

3-3 逻辑式的转换定理

一、代入定理

任何一个含有变量A_i的逻辑等式，如果将所有出现A_i的位置，都代之以一个逻辑式F，则此等式仍然成立。

例 1-3 已知逻辑等式$A\cdot(B+C)=AB+AC$，逻辑式$F=C+D$。用F代替上述等式中任一变量(若B)，此等式必仍然成立。

证 把F代入$A\cdot(B+C)=AB+AC$中，则有

$$A[(C+D)+C]=A(C+D)+AC$$

$$A(C+D+C)=AC+AD+AC$$

$$A(C+D)=AC+AD$$

$$AC+AD=AC+AD$$

因此，应用代入定理，可以把一个变量看成是一个逻辑式。据此读者不难证明n个变量的德·摩尔根(De Morgan)定理

$$\overline{(A_1+A_2+\cdots+A_n)}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\cdots\cdot\overline{A}_n$$

$$\overline{(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3+\cdots+\overline{A}_n$$

二、反演定理

逻辑式$F(A_1, A_2,\cdots, A_n)$的反演式，系指按照 $A\rightarrow\overline{A}$；$\overline{A}\rightarrow A$；$+\rightarrow\cdot$；$\cdot\rightarrow+$；$0\rightarrow1$；$1\rightarrow0$ 的转换规则将$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$实行全面转换而成的逻辑式，记作$\overline{F}$。

例如：$F(A, B)=A+B$的反演式$\overline{F(A,B)}=\overline{A}\,\overline{B}$，$G(A,B)=AB$的反演式$\overline{G(A,B)}=\overline{A}+\overline{B}$。

当直接运用反演规则时，原来运算符号的顺序不能搞乱。

三、对偶定理

逻辑式$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$的对偶式，系指按照$+\rightarrow\cdot$；$\cdot\rightarrow+$；$0\rightarrow1$；$1\rightarrow0$的转换规则，在$F(A_1,A_2,\cdots,A_n)$中实行部分转换而成的逻辑式，记作F'。

例如：$A+B$和AB互为对偶式，$A(B+C)$和$A+BC$互为对偶式，$A+0$和$A\cdot1$互为对偶式，$A+\overline{A}$和$A\cdot\overline{A}$互为对偶式。

两个逻辑式F和G相等，它们各自的对偶式F'和G'也相等。由此可见，当证明了某一等式相等时，便可根据对偶定理得到其对偶式的等式，这就使要证明的式子数目减少了一半。例如 $A+BC=(A+B)(A+C)$，其对偶式为

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

3-4 逻辑函数的完备性

由运算$+$，$\cdot$，$\overline{\ }$在$\{0,1\}$上的封闭性可得出结论，无论变量A_1，A_2，$\cdots$，A_n怎样