



医用高等数学

孙伟民 黄大颀 主编



上海科学技术文献出版社

医用高等数学

孙伟民 黄大旻 主编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

医 用 高 等 数 学

孙伟民 黄大旻 主编

·

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号 邮政编码 200031)

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

·

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 288,000

1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—9,000

ISBN 7-5439-0133-1/O·78

定 价: 8.30 元

《科技新书目》286-285

内 容 提 要

本书内容包括函数与极限, 导数与微分, 不定积分与定积分, 微分方程, 多元函数微积分, 概率论初步, 行列式与矩阵。

本书注意结合医学实际, 便于掌握应用, 可供医学院校临床医学、预防医学等各专业本科生、研究生和医学科研人员使用。

前 言

现代医学的迅速发展,使医学领域的各个学科正日益从定性描述向定量分析深化。高等医学院的学生和研究生具有一定高等数学知识已成为必需,医用高等数学是医学院校各专业的必修课程之一。

经过多年的教学实践,上海医科大学(孙伟民、赵耐青),南京医学院(黄大贲、丁勇),上海第二医科大学(王建明),浙江医科大学(金显),上海第二军医大学(高慕勤),安徽医科大学(方前胜),扬州医学院(陈芸),内蒙古医学院(韩明钟)决定合作编写本书,由孙伟民、黄大贲任主编,浙江医科大学周怀梧教授任主审。

本书共分八章,内容包括一元函数微积分、常微分方程、多元函数微积分、概率论初步以及行列式与矩阵。

在编写过程中力求做到:基本概念清楚、正确、深入浅出,便于教学,本书适合医学院校临床医学、预防医学等各专业作为教材,也可供医学科研人员作为参考书。在目录中打有“*”号的章节,各校可根据不同专业的教学时数选用。

由于编者水平有限,书中一定存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正。

编 者

1992年8月

目 录

第一章 函数与极限

第一节 函数	1
一、函数概念	1
二、复合函数	3
三、初等函数	4
习题1-1	6
第二节 极限	8
一、极限概念	8
二、极限的四则运算法则	12
三、两个重要极限	14
习题1-2	15
第三节 无穷小量与无穷大量	17
一、无穷小量	17
二、无穷小量的阶	17
三、无穷大量	18
习题1-3	19
第四节 函数的连续性	20
一、函数的连续性	20
二、连续函数的性质	22
习题1-4	24

第二章 导数与微分

第一节 导数概念	26
一、变化率问题	26
二、导数的定义及几何意义	28
三、几个基本初等函数的导数	30
四、函数的连续性与可导性的关系	33

习题2-1	33
第二节 求导法则	34
一、函数四则运算的求导法则	34
二、复合函数的求导法则	37
三、隐函数的求导法	39
四、幂函数、指数函数和反三角函数的导数	40
五、基本初等函数的导数公式	41
六、高阶导数	43
习题2-2	44
第三节 中值定理与罗必塔法则	46
一、拉格朗日中值定理	46
二、罗必塔法则	48
习题2-3	50
第四节 导数的应用	51
一、函数的单调性	51
二、函数的极值	53
三、最大值、最小值问题	57
四、曲线的凹凸和拐点	59
五、函数图形的描绘	61
习题2-4	64
第五节 微分	65
一、微分概念	65
二、微分的运算法则	68
三、微分的应用	70
习题2-5	72

第三章 不定积分

第一节 不定积分的概念和性质	74
一、不定积分的概念	74
二、基本积分公式	76
三、不定积分的性质	77
习题3-1	80

第二节 换元积分法	81
一、第一类换元法	81
二、第二类换元法	87
习题3-2	92
第三节 分部积分法	94
习题3-3	98
第四节 有理函数的积分	99
习题3-4	103

第四章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念和性质	104
一、两个实际问题	104
二、定积分的定义	107
三、定积分的性质	110
习题4-1	111
第二节 定积分的计算	112
一、微积分学基本定理	112
二、定积分的计算法	115
习题4-2	118
第三节 定积分的近似计算	119
一、矩形法和梯形法	119
二、抛物线法	121
习题4-3	123
第四节 积分区间为无限的广义积分	123
习题4-4	126
第五节 定积分的应用	127
一、定积分的微元法	127
二、平面图形的面积	127
三、旋转体的体积	130
四、变力所作的功	133
五、连续函数的平均值	135
习题4-5	137

第五章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念	138
习题5-1	141
第二节 可分离变量的微分方程	142
习题5-2	145
第三节 一阶线性微分方程	147
一、一阶线性微分方程	147
二、贝努里方程	150
习题5-3	152
第四节 二阶常系数线性齐次微分方程	153
一、二阶常系数线性齐次方程解的性质	153
二、二阶常系数线性齐次方程的解法	155
习题5-4	158
第五节 拉普拉斯变换	159
一、拉氏变换的概念和性质	159
二、拉氏变换在解微分方程中的应用	163
习题5-5	165
第六节 微分方程在医学中的应用	166
一、肿瘤生长的数学模型	166
二、药物动力学室模型	168
习题5-6	170

第六章 多元函数微积分

第一节 多元函数	171
一、空间直角坐标系	171
二、多元函数的概念	173
三、二元函数的极限与连续性	176
习题6-1	177
第二节 偏导数与全微分	178
一、偏导数	178
二、高阶偏导数	179

三、全微分	181
习题6-2	182
第三节 多元复合函数的求导法则	183
习题6-3	186
第四节 多元函数的极值	187
习题6-4	190
*第五节 最小二乘法	190
一、最小二乘法的经验公式	190
二、曲线的直线化及其应用	193
习题6-5	195
第六节 二重积分	196
一、二重积分的概念	196
二、二重积分的性质	197
三、二重积分的计算	198
习题6-6	202

第七章 概率论初步

第一节 随机事件及其运算	203
一、随机事件	203
二、事件的关系和运算	205
习题7-1	209
第二节 概率的概念与计算	210
一、概率的概念	210
二、概率的性质与计算	212
习题7-2	215
第三节 条件概率与事件的独立性	215
一、条件概率	215
二、概率乘法公式	216
三、事件的独立性	217
四、全概率公式和逆概率公式	219
五、贝努里概型	221
习题7-3	223

第四节 随机变量及其概率分布	224
一、随机变量的概念	224
二、离散型随机变量及其分布	225
三、连续型随机变量及其分布	230
习题7-4.....	236
第五节 随机变量的数字特征	237
一、数学期望及其性质	237
二、方差及其性质	242
习题7-5.....	246

第八章 行列式与矩阵

第一节 行列式	247
一、行列式的概念	247
二、行列式的性质	249
三、行列式的计算	252
习题8-1.....	259
第二节 矩阵的概念和运算	260
一、矩阵的概念	260
二、矩阵的运算	261
习题8-2.....	267
第三节 逆矩阵及其求法	268
习题8-3.....	273
第四节 矩阵的初等变换及其应用	273
一、矩阵的初等变换	273
二、用初等变换求逆矩阵	275
三、用行的初等变换解线性方程组	276
习题8-4.....	279
第五节 矩阵的特征值与特征向量	280
习题8-5.....	282

* * *

习题答案.....	284
附录一、微积分基本公式和积分表.....	307

附录二、拉普拉斯变换简表..... 322

附录三、标准正态分布函数数值表..... 324

教学参考书..... 326

第一章 函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象。极限方法是人们从量变中认识质变,从近似中得到精确的一种数学方法,它是微积分学的基本研究方法。

第一节 函 数

一、函数概念

在我们考察某种现象的变化过程时,常会遇到两种不同的量:一种是在过程中保持同一数值的量,称为**常量**;另一种是在过程中取不同数值的量,称为**变量**。例如,在热胀冷缩过程中,一个圆盘的半径 R 与其面积 S 都是变量,但面积与半径的平方之比 π 是常量。

正如把静止视作是运动的特例,有时也把常量视作是特殊的变量,即在所考察的变化过程中,始终只取同一数值的变量。

通常,在一个实际的变化过程中出现的各个变量并不都是独立变化的,而是相互联系,相互依赖的,函数概念就是这种变量间相互依赖关系的抽象和概括。

定义 设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量,如果对于变量 x 的每一个允许取的值,变量 y 依照一定的对应关系,有唯一的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function),记作

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y$$

其中 x 称为**自变量**, y 称为**因变量**。

因变量与自变量之间的对应关系称为函数关系。自变量所有允许取的值的集合称为函数的**定义域**; 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定

义域中的一点,有时我们也说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义。与自变量的值对应的因变量的值称为 **函数值**。函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $f(x_0)$ 。所有的函数值构成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**。

函数关系可用解析式表示,如 $S=\pi R^2$, $y=x^2+1$;也可用图象表示,如心电图、自动记录仪记录的气温曲线;还可用于表格表示,如对数表、三角函数表以及从某些实验得到的观测数据表等等。解析法、图示法和列表法是三种常用的函数表示法。

函数的定义域和值域,常用不等式、区间或集合表示。现将不等式、区间、集合三者对照,如表 1-1 所示。

表 1-1 不等式、区间与集合对照表

不 等 式	区 间	集 合
$a \leq x \leq b$	闭 区 间 $[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$
$a < x < b$	开 区 间 (a, b)	$\{x a < x < b\}$
$a \leq x < b$	半开区间 $[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$
$a < x \leq b$	半开区间 $(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$
$-\infty < x < b$	无限区间 $(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$
$-\infty < x \leq b$	无限区间 $(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$
$a \leq x < +\infty$	无限区间 $[a, +\infty)$	$\{x x \geq a\}$
$a < x < +\infty$	无限区间 $(a, +\infty)$	$\{x x > a\}$
$-\infty < x < +\infty$	无限区间 $(-\infty, +\infty)$	$\{x x \in R\}$

例 1 设物体从离地面高度为 h 处自由下落,不计空气阻力,则物体下落的路程 s 与时间 t 的关系可表示为:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 t 是自变量, s 是因变量。函数的定义域为: $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ($\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 是物体到达地面的时刻), 值域为: $0 \leq s \leq h$ 。

例2 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \arccos \frac{x-2}{3}$ 的定义域.

解 使该函数有定义的 x 值须满足

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ -1 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

即

$$-1 \leq x < 3.$$

所以函数 y 的定义域是 $-1 \leq x < 3$.

例3 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$ (单位/毫升) 随时间 t (分钟) 的变化数据, 建立如下经验公式:

$$C(t) = \begin{cases} t(10-t), & 0 \leq t \leq 5 \\ 25e^{-k(t-5)}, & t > 5 \end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里, 函数 $C(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同, 其函数关系是用两个解析式表示的. 有时, 还会遇到用两个以上解析式表示的函数. 这种在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数是一个函数, 而不是两个或几个函数, 它称为**分段函数**. 在求分段函数的函数值时, 必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算. 例3中, $t=2$ 时, 对应的浓度 $C(2) = 2 \times (10-2) = 16$. $t=10$ 时, 对应的浓度 $C(10) = 25e^{-k(10-5)} = 25e^{-5k}$.

二、复合函数

定义 如果变量 y 是变量 u 的函数, 变量 u 又是变量 x 的函数:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

并且 x 在函数 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值, 函数 $y = f(u)$ 是有定义的, 则称 y 是 x 的**复合函数**. 记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量。

例如, 运动物体的动能 E 是速度 v 的函数:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

而速度 v 又是时间 t 的函数, 对于自由落体运动: $v = gt$, 故复合函数为:

$$E = \frac{1}{2} m g^2 t^2$$

又如, $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^2 + 1$, 经二次复合构成 y 关于 x 的复合函数: $y = \lg \operatorname{tg}(x^2 + 1)$ 。

须注意, 不是任何两个函数都可以复合成一个函数的。例如 $y = \arccos u$, $u = 2 + x^2$, 就不能复合成 $y = \arccos(2 + x^2)$, 因为对于 x 所取的任何值, u 总是大于 1, 从而使 $y = \arccos u$ 没有意义。

我们不仅要学会把若干个函数“复合”成一个复合函数, 而且要善于把一个复合函数“分解”成若干个简单的函数。

例如, $y = \sin^3(1 + x^2)$ 可以看成是由 $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 1 + x^2$ 复合而成的。

三、初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 它们统称为基本初等函数。现将其归纳成表 1-2 所示。

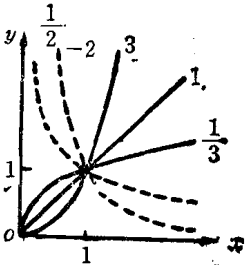
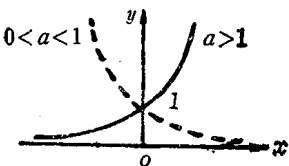
定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算(加、减、乘、除)以及有限次的函数复合构成的函数, 称为初等函数。

例如: 多项式 $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$,

$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, 都是初等函数。

本书今后主要讨论初等函数, 分段函数一般不是初等函数。

表 1-2 基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值 域	图 形
幂 函 数	$\mu > 0$ μ 次抛物线	因 μ 而异, 但 $[0, +\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异, 但 $[0, +\infty)$ 是公共值域	 (在第一象限内)
	$\mu < 0$ 令 $\mu = -m (m > 0)$ $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ m 次双曲线	公共定义域为 $(0, +\infty)$	公共值域为 $(0, +\infty)$	
指数函数 $x = a^x (a > 0, a \neq 1)$		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$		$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	