医用高等数学

孙伟民　黄大贶　主编

上海科学技术文献出版社

医用高等数学

孙伟民　黄大觃　主编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

医 用 高 等 数 学

孙伟民　黄大觋　主编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号　邮政编码 200031)

全国 新 华 书 店 经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 10.75　字数 288,000

1993 年 7 月第 1 版　　1993 年 7 月第 1 次印刷

印 数：1—9,000

ISBN 7-5439-0133-1/O·78

定 价：8.30 元

《科技新书目》 286-285

内 容 提 要

本书内容包括函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分，微分方程，多元函数微积分，概率论初步，行列式与矩阵。

本书注意结合医学实际，便于掌握应用，可供医学院校临床医学、预防医学等各专业本科生、研究生和医学科研人员使用。

前　言

现代医学的迅速发展，使医学领域的各个学科正日益从定性描述向定量分析深化。高等医学院的学生和研究生具有一定高等数学知识已成为必需，医用高等数学是医学院校各专业的必修课程之一。

经过多年的教学实践，上海医科大学(孙伟民、赵耐青)，南京医学院(黄大觃、丁勇)，上海第二医科大学(王建明)，浙江医科大学(金显)，上海第二军医大学(高慕勤)，安徽医科大学(方前胜)，扬州医学院(陈芸)，内蒙古医学院(韩明钟)决定合作编写本书，由孙伟民、黄大觃任主编，浙江医科大学周怀梧教授任主审。

本书共分八章，内容包括一元函数微积分、常微分方程、多元函数微积分、概率论初步以及行列式与矩阵。

在编写过程中力求做到：基本概念清楚、正确、深入浅出，便于教学，本书适合医学院校临床医学、预防医学等各专业作为教材，也可供医学科研人员作为参考书。在目录中打有“*”号的章节，各校可根据不同专业的教学时数选用。

由于编者水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

1992年8月

目　　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章 不定积分

第四章　定积分及其应用

第五章　微分方程

第六章　多元函数微积分

第八章　行列式与矩阵

*　*　*

第一章　函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象. 极限方法是人们从量变中认识质变,从近似中得到精确的一种数学方法,它是微积分学的基本研究方法.

第一节　函　　数

一、函数概念

在我们考察某种现象的变化过程时,常会遇到两种不同的量:一种是在过程中保持同一数值的量,称为**常量**;另一种是在过程中取不同数值的量,称为**变量**. 例如,在热胀冷缩过程中,一个圆盘的半径 R 与其面积 S 都是变量,但面积与半径的平方之比 π 是常量.

正如把静止视作是运动的特例,有时也把常量视作是特殊的变量,即在所考察的变化过程中,始终只取同一数值的变量.

通常,在一个实际的变化过程中出现的各个变量并不都是独立变化的,而是相互联系,相互依赖的,函数概念就是这种变量间相互依赖关系的抽象和概括.

定义　设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量,如果对于变量 x 的每一个允许取的值,变量 y 依照一定的对应关系,有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function),记作

$$y=f(x) \quad 或 \quad f: x\to y$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

因变量与自变量之间的对应关系称为函数关系. 自变量所有允许取的值的集合称为函数的**定义域**; 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定

义域中的一点，有时我们也说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义。与自变量的值对应的因变量的值称为**函数值**。函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$。所有的函数值构成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**。

函数关系可用解析式表示，如 $S=\pi R^2$，$y=x^2+1$；也可用图象表示，如心电图、自动记录仪记录的气温曲线；还可用表格表示，如对数表、三角函数表以及从某些实验得到的观测数据表等等.解析法、图示法和列表法是三种常用的函数表示法。

函数的定义域和值域，常用不等式、区间或集合表示。现将不等式、区间、集合三者对照，如表 1-1 所示。

表 1-1 不等式、区间与集合对照表

不等式	区间	集合
$a\leqslant x\leqslant b$	闭区间 $[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$a<x<b$	开区间 (a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$
$a\leqslant x<b$	半开区间 $[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$a<x\leqslant b$	半开区间 $(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$-\infty<x<b$	无限区间 $(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$
$-\infty<x\leqslant b$	无限区间 $(-\infty,b]$	$\{x\mid x\leqslant b\}$
$a\leqslant x<+\infty$	无限区间 $[a,+\infty)$	$\{x\mid x\geqslant a\}$
$a<x<+\infty$	无限区间 $(a,+\infty)$	$\{x\mid x>a\}$
$-\infty<x<+\infty$	无限区间 $(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid x\in R\}$

例 1 设物体从离地面高度为 h 处自由下落，不计空气阻力，则物体下落的路程 s 与时间 t 的关系可表示为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 t 是自变量，s 是因变量。函数的定义域为：$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\text{ 是物体到达地面的时刻}\right)$；值域为：$0\leqslant s\leqslant h$。

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域。

解 使该函数有定义的 x 值须满足

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ -1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-3<x<3\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$$

即
$$-1\leqslant x<3.$$

所以函数 y 的定义域是 $-1\leqslant x<3$.

例 3 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$（单位/毫升）随时间 t（分钟）的变化数据，建立如下经验公式：

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t),\ 0\leqslant t\leqslant 5\\ 25e^{-k(t-5)},\ t>5\end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里，函数 $C(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同，其函数关系是用两个解析式表示的。有时，还会遇到用两个以上解析式表示的函数。这种在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数是一个函数，而不是两个或几个函数，它称为**分段函数**。在求分段函数的函数值时，必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算。例 3 中，$t=2$ 时，对应的浓度 $C(2)=2\times(10-2)=16$. $t=10$ 时，对应的浓度 $C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

二、复合函数

定义 如果变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数：

$$y=f(u),\ u=\varphi(x)$$

并且 x 在函数 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 是有定义的，则称 y 是 x 的**复合函数**. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**。

例如，运动物体的动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 又是时间 t 的函数，对于自由落体运动：$v=gt$，故复合函数为：

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

又如，$y=\lg u$，$u=\mathrm{tg}v$，$v=x^2+1$，经二次复合构成 y 关于 x 的复合函数：$y=\lg\mathrm{tg}(x^2+1)$。

须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个函数的。例如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$，就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$，因为对于 x 所取的任何值，u 总是大于 1，从而使 $y=\arccos u$ 没有意义。

我们不仅要学会把若干个函数"复合"成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数"分解"成若干个简单的函数。

例如，$y=\sin^3(1+x^2)$ 可以看成是由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=1+x^2$ 复合而成的。

三、初等函数

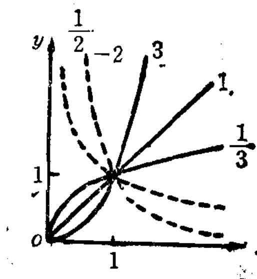
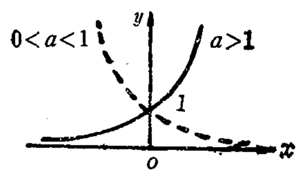
中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，它们统称为基本初等函数。现将其归纳成表1-2所示。

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）以及有限次的函数复合构成的函数，称为**初等函数**。

例如：多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\mathrm{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，都是初等函数。

本书今后主要讨论初等函数，分段函数一般不是初等函数。

表 1-2　基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值　域	图　　形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 （在第一象限内）
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^{m}}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $x=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$