

塑性力学

杨桂通 树学锋 编著

中国建材工业出版社

塑性力学

杨桂通 树学锋 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

塑性力学/杨桂通, 树学锋编著. —北京: 中国建材工业出版社, 1999
ISBN 7-80090-971-9

I. 塑… I. ①杨… ②树… III. 塑性力学 IV. 0344

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 71270 号

塑 性 力 学

*

杨桂通 树学锋 编著

中国建材工业出版社出版

(北京海淀区三里河路 11 号 邮编: 100831)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云红光印刷厂印刷

*

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 7.125 字数: 200 千字

2000 年 3 月第一版 2000 年 3 月第一次印刷

印数: 1—3000 册 定价: 15.30 元

ISBN 7-80090-971-9/N·2

D12 14 / 13
内 容 简 介

本书是为初学塑性理论的大学本科高年级学生和研究生以及工程设计人员编写的。本书强调概念清晰，简明易懂，由浅入深，循序渐进，并注意和材料力学、初等微积分相衔接，与土木、机械、道桥的工程设计实用相关联。全书共分九章，第一章绪论，介绍材料塑性性质及相关重要概念；第二章讲授应力、应变状态的描述方法，这一章并不涉及塑性力学的特有问題，而与弹性应力和应变状态的描述是一致的；第三章讨论进入塑性状态的条件和本构理论与实用公式；第四章以后讨论弹塑性专门问题和求解方法研究，包括平面应变问題、柱体扭转问題以及结构的极限设计的理论与方法等等；第九章安排了动力学问題重要概念的介绍，包括简单塑性动力行为的讨论。最后，为便于阅读，书后附有两个附录。

本书适用于大学本科高年级学生和研究生作为教材以及相关工程技术人员参考之用。

前 言

《塑性力学》是一本为初学塑性理论的大学本科高年级学生和研究生以及工程设计人员编写的基础性教科书和自学教材。本书强调概念清晰，简明易懂，由浅入深，循序渐进，并注意和材料力学、初等微积分相衔接，与土木工程、机械工程、道路和桥梁工程的工程设计实用相关联。就是说，本书既是一本学生学习用的教材，又是一本工程师设计用的参考书。全书共分九章，第一章绪论，介绍材料塑性性质及相关重要概念；第二章讲授物体或结构受力后的应力、应变状态的描述方法和结果，这一章并不涉及塑性力学的特有问題，而与弹性应力和应变状态的描述是一致的；从第三章开始进入讨论塑性力学问题，包括材料进入塑性状态的条件（称屈服条件或判据或准则）、应力应变间的新的非弹性关系的几种理论和实用公式；第四章讨论弹塑性问题的提法和简单问题的求解实例；第五章以后进入一些专门问题和求解方法研究，包括平面应变问题的滑移线方法，柱体扭转的比拟法，建立求近似解的极值原理和变分原理的方法以及结构的极限设计的理论与方法等等。最后，考虑到科学技术的高速发展带来的众多不可回避的动力学问题，所以在第九章我们安排了对动力学问题重要概念的介绍，包括简单结构的动力塑性行为，塑性波有哪些特征等等。

我们希望本书的出版能够为已具有基础力学知识（包括弹性力学基础知识）和初等微积分知识的学生以及关心塑性设计和最小重量设计的研究人员和工程技术人员提供有益的帮助和启发，从而打下进一步学习和研究的基础。本书由杨桂通撰写第一章第3节及第七章；树学锋撰写第一章第1、2节、第二章至第六章、第八章、第

九章及附录，全书由杨桂通负责修订统稿工作。由于作者水平有限，不当之处，请予指正。

本书在完成过程中得到了太原理工大学应用力学研究所的老师和研究生同学们的支持和帮助，特此一并表示谢意。

作 者

1999年5月于太原理工大学

目 录

| | |
|--------------------------------|------|
| 第一章 绪论 | (1) |
| § 1.1 固体材料的塑性性质 屈服与强化的概念 | (1) |
| § 1.2 实用的简化模型 | (3) |
| § 1.3 塑性力学的发展与应用前景 | (6) |
| 第二章 应力与应变 | (9) |
| § 2.1 一点的应力状态 | (9) |
| § 2.2 主应力、主方向与应力不变量..... | (11) |
| § 2.3 球张量与应力偏量 | (17) |
| § 2.4 主应变与主应变方向..... | (20) |
| 第三章 屈服条件与本构方程 | (25) |
| § 3.1 常用屈服条件..... | (25) |
| § 3.2 强化模型与加载条件..... | (29) |
| § 3.3 卓柯公设与依留申公设..... | (31) |
| § 3.4 增量理论..... | (34) |
| § 3.5 全量理论 | (42) |
| § 3.6 塑性势的概念..... | (44) |
| 第四章 简单的弹塑性问题 | (49) |
| § 4.1 塑性力学问题的提法及弹性解方法 | (49) |
| § 4.2 梁的弹塑性弯曲..... | (53) |
| § 4.3 厚壁筒的弹塑性解..... | (58) |
| § 4.4 薄壁管的组合拉扭塑性变形..... | (63) |
| 第五章 塑性平面应变和滑移线场理论 | (66) |
| § 5.1 基本关系式..... | (66) |

| | | |
|------------|------------------|--------------|
| § 5.2 | 滑移线场理论 | (69) |
| § 5.3 | 滑移线场的主要性质 | (79) |
| § 5.4 | 边界条件 | (83) |
| § 5.5 | 应用简例 | (87) |
| § 5.6 | 位移速度方程 | (99) |
| 第六章 | 柱体的扭转 | (104) |
| § 6.1 | 问题的提出 基本关系式 | (104) |
| § 6.2 | 塑性扭转 沙堆比拟法 | (110) |
| § 6.3 | 弹塑性扭转 薄膜—屋顶比拟法 | (114) |
| 第七章 | 极值原理与变分原理 | (120) |
| § 7.1 | 虚速度原理 | (120) |
| § 7.2 | 弹塑性材料的应力率极值原理 | (122) |
| § 7.3 | 弹塑性材料的应变率极值原理 | (124) |
| § 7.4 | 刚塑性材料的极值原理 | (125) |
| § 7.5 | 全量理论的变分原理 | (126) |
| § 7.6 | 极限分析定理 | (132) |
| 第八章 | 结构极限分析 | (145) |
| § 8.1 | 复合应力梁的屈服条件 | (145) |
| § 8.2 | 板的屈服条件 | (147) |
| § 8.3 | 拱的塑性极限分析 | (151) |
| § 8.4 | 圆板的塑性极限分析 | (153) |
| § 8.5 | 矩形板的塑性极限分析 | (157) |
| 第九章 | 动力学问题 | (167) |
| § 9.1 | 一般概念 | (167) |
| § 9.2 | 最简单的刚塑性系统的动力响应 | (169) |
| § 9.3 | 刚塑性简支梁的动力响应 | (172) |
| § 9.4 | 塑性铰的运动规律 | (179) |
| § 9.5 | 刚塑性交叉梁系的动力响应分析 | (184) |

| | |
|-----------------------------|-------|
| § 9.6 刚塑性体位移限界定理 | (189) |
| § 9.7 杆中弹塑性加载波及卸载波的概念 | (197) |
| 附录一 下标记号法与求和约定 | (202) |
| 附录二 变分法概要 | (205) |
| 索引 | (216) |
| 参考文献 | (218) |

第一章 绪 论

§ 1.1 固体材料的塑性性质 屈服与强化的概念

塑性力学是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体受到外荷载、温度变化及边界约束变动等作用时，塑性变形和应力状态的科学。塑性力学这个名词是根据固体材料在受外部作用时所呈现出的塑性性质命名的。塑性力学讨论固体材料塑性变形阶段的力学问题。可变形固体的弹性阶段和塑性阶段是整个变形过程中的不同阶段，弹性力学和塑性力学是研究这两个密切相连阶段的力学问题的科学。

塑性力学是人们在长期生产斗争与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。它的发展与社会发展有着特别密切的关系，它来源于生产实践，又反过来为生产实践服务。塑性力学作为固体力学的一个分支学科已有 100 多年的历史。它有一套较完善的经典理论和方法，在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前，由于现代科学技术的进一步发展，生产向塑性力学提出了一系列新课题、新任务。因而，研究塑性力学的新理论、新方法是非常必要的。在目前，塑性力学仍然是一门富有生命力的学科。

在弹性力学中，我们讨论问题中应力-应变间有惟一的、单值对应的关系，材料的弹性性质的根本特征是其变形过程是可逆的。当应力值超过弹性极限之后，一方面应力与应变关系将不再呈线性关系；另一方面，变形将不可完全恢复，即材料已产生了不可恢复或不可逆的塑性变形。如果在实际工作中不考虑塑性变形，即规定结

构必须在弹性状态下工作，则当结构中某一“危险点”处及其附近的应力达到或超过弹性极限时，其它大部分材料所承受的应力仍然在弹性范围内，构件有可能并不会“破坏”或失效，这种设计和校核在一定程度上将造成浪费。所以在结构设计中考虑材料的塑性性质是可取的。

由材料力学知识可知，弹性变形是物体卸载后就完全消失的那种变形，而塑性变形是指卸载后不能消失的那部分变形。塑性变形的机理要考虑晶体结构细节。例如夹杂、微孔、晶界、位错群等，都是影响塑性变形发展的因素。固体材料的弹性与塑性性质可以用简单拉伸实验来说明。

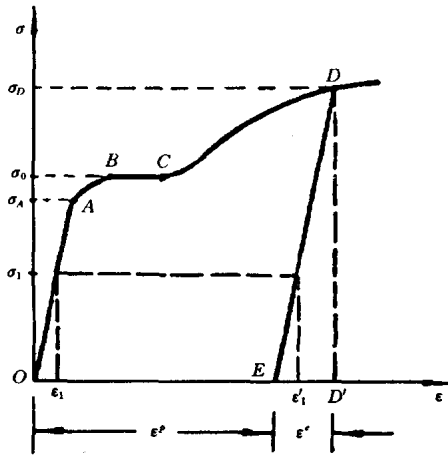


图 1-1

图 1-1 是熟知的低碳钢试件简单拉伸试验应力-应变曲线。其中 A 点所对应的应力 σ_A 称为比例极限，A 点以下 OA 段为直线。B 点所对应的应力 σ_0 为弹性极限。当应力超过 σ_A 时，应力应变关系不再是直线，但仍属弹性阶段，在 B 点之前，即 $\sigma < \sigma_0$ ，如卸载，则应力应变关系按原路径恢复到原始状态。 σ_0 称为屈服应力。可见，应力

在达到屈服应力以前经历了线性弹性阶段(OA段)和非线性弹性阶段(OB段)。应力超过屈服应力以后,如卸载,则应力与应变关系就不再按原路径回到原始状态,而有残余应变,即有塑性应变保留下来。BC段称为塑性平台。在BC段上,在应力不变的情况下可继续发生变形,通常称为塑性流动。

当应力达到 σ_D 时,如卸载,则应力应变关系自D点沿DE到E点,OE称为塑性应变部分,ED称为弹性应变部分,就是说,总应变可分为两部分:弹性部分 ϵ^e 和塑性部分 ϵ^p ,如总应变为 ϵ ,则有

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1-1)$$

若在D点卸载后重新加载,则在 $\sigma < \sigma_D$ 之前,材料呈弹性性质,当 $\sigma > \sigma_D$ 以后才重新进入塑性阶段。这就相当于提高了屈服应力。材料的这种当应力超出了弹性极限以后,就相当于增加了材料内部对变形抵抗能力的性质,叫做强化。

塑性力学研究的问题是弹性力学的继续,为了更好地了解固体材料在外力作用下较全面的性质,塑性理论的研究是十分必要的。

§ 1.2 实用的简化模型

为了使求解弹塑性力学问题成为可能,并能得到尽可能简单而又符合工程要求的解答,往往将 $\sigma-\epsilon$ 曲线作进一步简化,一般常见简化模型有四种。

一、弹性线性强化材料模型

在这种模型中,认为材料经过线性弹性阶段后进入线性塑性强化阶段,在线性塑性强化阶段 $E_1 = \text{常数}$,其材料本构关系为

$$\begin{cases} \sigma = E\epsilon & \text{当 } \epsilon \leq \epsilon_0, \sigma \leq \sigma_0 \\ \sigma = E_1\epsilon + (1 - \lambda)\sigma_0 & \text{当 } \epsilon \geq \epsilon_0, \sigma \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\lambda = E_1/E$$

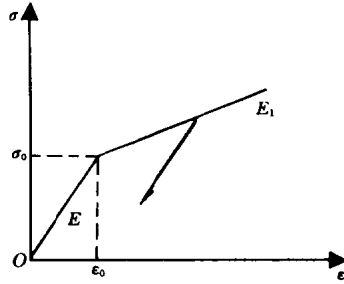


图 1-2

二、刚性线性强化材料

一般地，由于弹性变形比塑性变形小很多，为简化，可以省略，即认为材料不经过弹性阶段，直接进入线性塑性强化阶段，在这种模型中，有 $E \rightarrow \infty$ ， $E_1 = \text{常数}$ ，其本构关系为

$$\begin{cases} \epsilon = 0 & \text{当 } \sigma \leq \sigma_0 \\ \sigma = \sigma_0 + E_1 \epsilon & \text{当 } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (1-3)$$

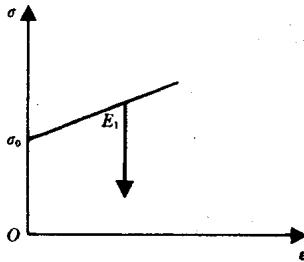


图 1-3

三、弹性理想塑性材料模型

该材料模型认为材料经过线性弹性阶段后，便进入流动状态，即塑性变形在屈服应力 σ_0 作用下可无约束地发展，这就相当于前述的塑性平台，只是略加扩大了。此时 $E_1 = 0$ ，其材料本构关系为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma = \sigma_0 & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \varepsilon \text{ 值不定} \end{cases} \quad (1-4)$$

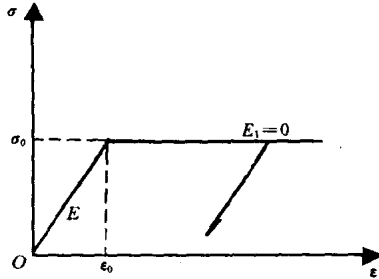


图 1-4

四、刚性理想塑性材料模型

刚性理想塑性材料模型认为材料在应力达到屈服应力 σ_0 时，便进入塑性流动状态，应力小于 σ_0 时，则处于刚性状态，即无应变状态。其材料本构关系为

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0, \varepsilon \geq 0, \varepsilon \text{ 值不定} \\ \sigma < \sigma_0, \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

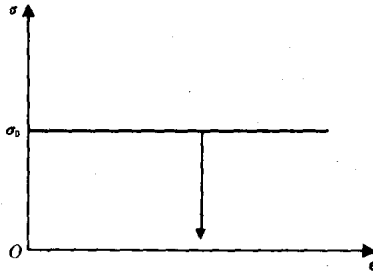


图 1-5

理想塑性材料的特点是：当 $\sigma < \sigma_0$ 时，材料为弹性的或刚性的，一旦应力达到屈服极限 σ_0 ，则变形可“无限”地增长，但应力不变；同时应力值不可能超过屈服极限。应力卸载时，对于弹性理想塑性

材料，应力应变关系遵循胡克定律；对于刚性理想塑性材料，应变保持不变，材料表现为刚性。

今后，在许多情况下，略去弹性变形而采用刚塑性分析所带来的误差非常小，故在大量的工程设计中可以允许用简化的理想刚塑性或理想弹塑性本构关系进行塑性分析。

§ 1.3 塑性力学的发展与应用前景

塑性力学的发展已有百余年历史，Coulomb C. A. (1773) 和 Rankine W. T. M. (1853) 首先研究了土壤的屈服准则，并给出了著名的 Coulomb 公式和 Rankine 理论等。Tresca H. (1864) 发表了关于金属挤压的实验报告，并指出金属在最大剪应力达到某一量值时，材料即发生塑性流动。从此产生了关于金属材料的第一个屈服准则。之后，Mises R. von (1913) 根据能量理论得出了一个新的屈服准则。令人高兴的是，Mises 屈服准则得到了大多数金属材料实验结果的支持。至今，Coulomb 公式，Tresca 和 Mises 屈服条件仍在工程中得到广泛应用。

本世纪上半叶是塑性力学发展最旺盛的时期，在这一时期，静力学问题得到了完善的发展，理想塑性的平面问题和轴对称问题都可得到完全解。值得指出的是 Prandtl L. (1921) 和 Hencky H. (1923) 对平面塑性力学问题求解方法及滑移线场理论的贡献是有重要意义的。在这时期塑性增量理论已日臻完善，同时 Hencky H. , Nadai A. (1931), Il'yushin A. A. (1940), Sokolovsky W. W. (1940) 等发展了全量理论。之后，Prager W. (1943), Ziegler H. (1959), Drucker D. C. , Symonds P. S. , Koiter W. T. , Kachanov L. M. , Hill R. , Ivlev D. D. , Lee E. H. , Melan E. 等人发展强化理论，极限分析理论，本构理论，安定性理论，多种类型的变分原理，极值原理以及位移限界定理等等。从此塑性力学得到多方面的大发展，基本上完善了塑性力学学科的理论框架，同

时在工程上也得到了广泛的应用，如结构的塑性设计，最小重量设计以及机械加工方面的应用等等。

在第二次世界大战期间，由于军工的需要，塑性动力学问题得到了发展。前苏联 Rakhmatulin Kh. A.，Shapiro G. S. 及美国的 Taylor G. I. 等人研究了塑性杆及索中应力波的传播理论和卸载波理论等，从此弹塑性波的传播以及结构塑性动力响应理论得到快速发展。Malvern L. E.，Perzyna P.，Hodge P. G. Jr.，Clifton R. J.，Ting T. C. T. 等人在动力学方面做出了卓越贡献。由于应用的需要从而诞生了侵彻力学，穿甲力学，冲压成型力学，非线性波动力学等等新的学科分支。

我国学者在塑性力学的发展中曾做出了不少重要贡献，且至今仍进行着新的研究课题。北京大学，清华大学，中国科技大学，中国科学院力学研究所，上海交通大学以及太原理工大学（原太原工业大学）等单位的学者们在研究结构塑性分析，弹塑性动力屈曲，结构动力响应分析，弹塑性断裂力学问题，弹塑性损伤力学问题，塑性本构理论方面，塑性成形力学方面，复合应力波传播理论方面以及冲击屈曲理论和弹塑性结构动力系统的稳定性，分叉，非规则运动，混沌运动等方面都有重要研究成果。

面临科学技术的飞速发展的 21 世纪新时代，塑性力学亟待扩大理论体系，与相邻学科协调发展有众多亟待研究解决的问题。例如，塑性有限变形理论，特别是在强动载荷作用下的有限变形的基本塑性行为，本构理论，非规则运动的控制理论以及塑性力学和材料科学与工程实际有密切的关系。从而引发了塑性变形与材料内部结构的关系，所谓应变场的尺度效应，应变梯度塑性理论的研究等等。这些问题都离不开创造新的实验手段和新的实验技术，发现新现象，建立新模型、新理论。

塑性力学的发展与工程应用有着直接密切的关系。为了充分发挥材料的潜力，最早发展了塑性极限设计，在建筑结构工程、船舶、

桥梁工程中得到了广泛应用；同时，在材料的拉拔、压延等成形、铸造工业方面，也发挥了塑性力学的重要作用。塑性力学有着广阔的应用前景。在短时强载荷作用下的弹塑性体，能量的吸收主要由其塑性变形吸收。有限变形条件下的塑性动力学将在塑性成形动力学、穿甲力学等领域有着重要应用。

当材料的本征长度为微米量级，应变梯度的影响必然表现在微机电系统以及信息材料、微元件的力学行为。诸如微细元件的断裂、损伤、强度及稳定性等等问题。以应变梯度理论为核心的微结构塑性力学将会迅速得到发展，应用于高新技术的众多领域。