肖达川 编著

线性与非线性电路

科学出版社

线性与非线性电路

肖达川 编著

科 学 出 版 社

1 9 9 2

(京)新登字092号

内容简介

本书是作者1984年编著出版的《电路分析》一书的修订版．在本书中，作者对原书内容作了全面修改，重点增加了非线性电路的稳定性、分岔和混沌方面的内容．

全书共分八章．第一章介绍电路的基本知识．第二、三章讨论了线性时不变和时变电路．第四章讨论非线性电阻电路．第五、六、七章详细论述了非线性电路的振荡分岔和混沌等问题．第八章讲电抗元件的频率功率公式．书后附有参考文献及索引．

本书文字简洁，论证严谨，概念清楚，可供高等工科、理科院校电工、电子、通信、自动控制、电测量等专业的高年级学生和研究生使用，也可供有关教师、工程技术人员参考．

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1992年3月第一版　开本：850×1168 1/32

1992年3月第一次印刷　印张：8 1/2

印数：1—2 500　字数：220 000

ISBN 7-03-002631-4/TN·116

定价：7.50元

第二版前言

本书是1984年出版的《电路分析》的修订版．从《电路分析》出版至今的六年中，许多关于动力系统的知识被引入到了电路分析课中．为了满足读者的需要，我们对初版的内容作了较大增删而写成本书，并将书名改为《线性与非线性电路》．下面就内容的增减作一说明．

增加的内容：一种情况是该内容属于线性电路的基本理论，例如 RLC 无源网络策动点阻抗的复频特性．另一种是较新的内容，例如非线性电路中的分岔和混沌现象，它们在电力系统的研究中已受到人们的关注．在非线性电路的研究中，例如在研究自激振荡的稳定性和混沌轨线的李雅普诺夫指数时，都要涉及时变线性常微分方程的解，因此本书增加了线性时变电路一章．为了学习非线性电路，线性时变电路一章的3-3节和3-5节的内容可供选用．

删去的内容：一种情况是该内容已在大学本科有关课程中讲授过，如傅里叶变换．一种是实际应用很少的内容，如电阻电路的拓扑解法．还有一种似宜于另外设课，如非线性网络函数．

本书与《电路分析》的另一不同之处是，代表向量、矩阵的字母不再用黑体字表示，以便和许多技术书刊的作法一致．

本书稿承清华大学江缉光教授审阅，谨致感谢．书中不妥之处，请读者指正．

肖　达　川

1991年1月于北京

第一版前言

本书的目的，是希望提供一本电路分析的教材.

全书共五章. 第一章扼要叙述了电路的一些基本概念和基本分析方法，介绍了解线性电路的撕裂法等内容. 第二章是傅里叶变换. 这是一种基本的变换. 目前工科大学电机系所设课程大多不包括它，所以选入本书. 第三章介绍非线性电阻电路，论述了电路有解的条件、容度和余容度等内容. 这一章的内容，容易移植到非线性电感电路或电容电路上去. 第四章介绍了一种编写非线性电路状态方程的方法，从自治电路的状态方程出发讨论了这种电路的稳定性问题. 第五章选入分析非自治电路的方法，说明了在这种电路里出现的一些现象如分谐波等.

阅读本书时，考虑到读者学过工科大学的“电路”课程. 阅读第四、第五章时，还要求读者有相平面方面的基础知识.

本书根据授课讲义修改、定稿. 定稿时，承清华大学江缉光、郑君里两同志审阅部分书稿，在此对他们的帮助谨致谢意.

限于编著者水平，无论在选材及内容的叙述上，都会有缺点错误，欢迎读者指正.

编　著　者

1982 年 7 月

目　　录

第一章　关于电路的基本知识

1-1　n 端元件和 n 端口

每个集总电路元件都有自己的元件约束，它就是该元件的定义。在普通情况下，二端元件的约束用一个公式表示，例如线性定常电阻器的元件约束用 $u = Ri$ 表示，这是熟知的欧姆定律。

图 1-1 所示是一个 $(n+1)$ 端元件．由 KCL，

$$i_{n+1} = -(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)$$

由 KVL，任意二端钮间的电压可以用每个端钮对某个指定端钮（设为第 $n+1$ 个端钮）的电压表示：

$$u_{jk} = u_{j,n+1} - u_{k,n+1}$$

式中，u_{xy} 是从端钮 x 到端钮 y 的电压，而且 $u_{xx} = 0$．因此，独立电流变量和电压变量的数目都是 n． 在普通情况下，$(n+1)$ 端元件的约束用 n 个公式表示，它们把 $2n$ 个电压、电流变量联系在一起。

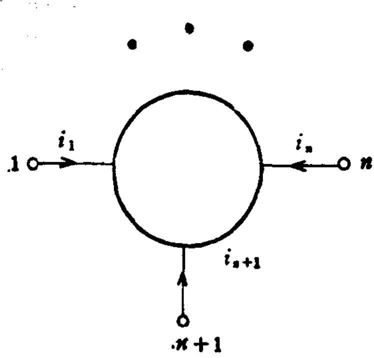

图 1-1　$(n+1)$ 端元件

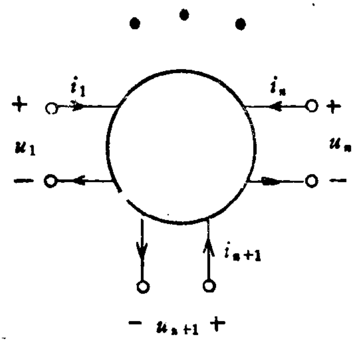

图 1-2 n 端口

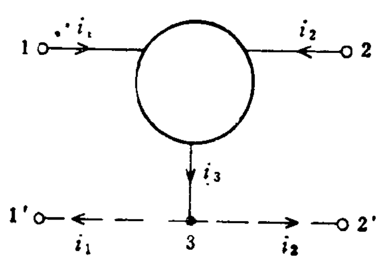

图 1-3

图 1-2 是一个 n 端口．对于端口，有个公认的约定：从任一端口（例如第 k 个端口）的一个端钮 k' 流入元件的电流，必须等于从另一端钮 k'' 流出的电流，因此两个端口之间不允许联接支路．按照图 1-2 中端口电压、电流的正方向规定，$u_k i_k$ 代表从端口 k 输入到元件的功率．以后一直采用这种正方向规定，否则将特别声明．

一个 $(n+1)$ 端元件，可以用一个 n 端口和它等效．以图 1-3的三端元件作为例子．设想将端钮 3 分成两路，使其中电流分别等于 i_1 和 i_2，这不影响 KCL；又因为这两路是短路线，不影响 KVL．这样，图中的三端元件就用二端口代替了．

二端元件有电阻器、电感器和电容器． n 端口也有这三类元件．

(1) 电阻元件

如果 n 端口的端口电压向量 u 和端口电流向量 i 之间的关系是代数关系，称 n 端口为电阻器或电阻性 n 端口．例如图 1-4 所示二端口的元件约束是

$$u_1 = r_1 i_1,\ u_2 = r_2(i_2 - \beta i_1) \tag{1-1}$$

上式是代数关系，因而这个二端口是电阻器．变比为 n 的理想变压器的元件约束是

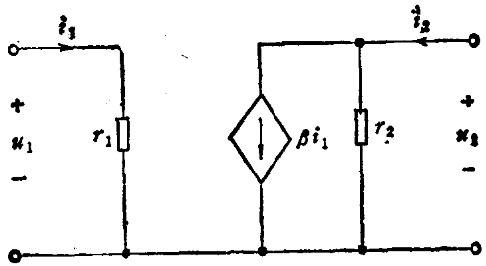

图 1-4 含受控源的二端口

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2)^{1)}$$

直流电压源的元件约束是 $u=\text{const}$. 根据此规定，它们都是电阻元件.

(2) 电感元件

二端元件的磁链 ϕ 和元件的电压 u 之间总是存在下述关系：

$$u = \frac{d\phi}{dt},\quad \phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(x)\,dx \qquad (1\text{-}3)$$

这里规定 u, ϕ 的正方向一致，见图 1-5. 将这关系推广到 n 端口时，把 u,ϕ 分别改作端口电压向量和端口磁链向量就行了.

如果 n 端口的端口电流向量 i 和端口磁链向量 ϕ 之间的关系是代数关系，称 n 端口为电感器或电感性 n 端口. 线性定常电感器当然属于这类. 直流电流源的元件约束是 $i=f(\phi)=\text{const}$, 从而它也可以当作电感器.

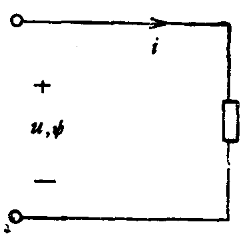

图 1-5

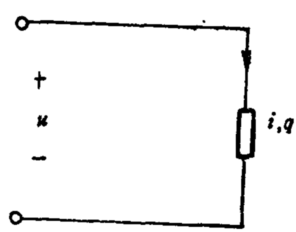

图 1-6

1) 此约束在恒定电压、电流下也成立.

(3) 电容元件

二端元件的电荷 q 和元件的电流 i 之间总是存在下述关系：

$$i=\frac{dq}{dt},\quad q(t)=q(t_0)+\int_{t_0}^{t} i(x)dx \tag{1-4}$$

这里规定 i,q 的正方向一致，见图 1-6. 将这关系推广到 n 端口时，把 i,q 分别改作端口电流向量和端口电荷向量就行了.

如果 n 端口的端口电压向量 u 和端口电荷向量 q 之间的关系是代数关系，称 n 端口为电容器或电容性 n 端口. 线性定常电容器当然属于这一类. 电压 $u=f(q)=\text{const}$ 的直流电压源也可看成是电容元件.

1-2 n 端口的分类

上节介绍的三类 n 端口，不能包括所有的 n 端口(参见习题1-12). 这节介绍 n 端口的其它分类方法. 为此，首先介绍容许电压、容许电流的概念.

二端元件的性能，常用它的电压、电流的关系来说明. 例如一个电阻值是 $R=3\ \Omega$ 的电阻器，设其电流、电压分别为 $i(t)=2\sin 100t$ A, $u(t)=6\sin 100t$ V. 这一对具体的电压、电流波形是允许的，称作元件的容许电压、电流偶，简称容许偶，记作 $[u(t), i(t)]$. 其实容许偶就是 $[Ri(t), i(t)]$，这里的 $i(t)$ 是合理的时间函数. 总之，凡是元件可能有的一对具体的电压、电流波形，称作元件的容许偶. 推广起来说，n 端口的容许偶 $[u(t), i(t)]$，则是一对可能的端口电压向量波形 $u(t)$ 和端口电流向量波形 $i(t)$. n 端口有两种最基本的分类方法.

(1) 时不变 n 端口和时变 n 端口

定义 1-1 设 $[u(t), i(t)]$ 是 n 端口的任一容许偶，τ 是任一常数. 如果 $[u(t-\tau), i(t-\tau)]$ 也是容许偶，称这 n 端口为时不变 n 端口，否则称作时变 n 端口.

例 1 独立电压源的电压 $u(t)=E\sin\omega t$, $u(t)$ 的时间平移

$u(t-\tau)=\dot{E}\sin\omega(t-\tau)$. 选 $\tau=\pi/6\omega$, 则 $u(t-\tau)=\dot{E}\sin(\omega t-\pi/6)$. 这是另一个电压，它落后于电源电压 $\pi/6$，电源不能"容许"有这个电压. 因此，若 $[u(t),i(t)]$ 是容许偶，则 $[u(t-\tau),i(t-\tau)]$ 不是容许偶. 这个独立电压源是时变元件.

一般讲来，时变的独立电源都是时变元件，恒定电压源或电流源是时不变元件.

例 2 忽略铁芯磁特性的非线性时，带铁芯线圈的电感 L 是常数. 反复地将铁芯移出线圈、插入线圈，电感量随时间变化，记作 $L(t)$. 这时，线圈可看成是时变电感器，其元件约束是

$$\psi=L(t)i,\quad u=\frac{d\psi}{dt}$$

式中，ψ，i 分别代表磁链、电流；u 是线圈电压. 当电流分别是 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)\overset{\text{def}}{=\!=}i_1\ (t-\tau)$ 时，对应的磁链分别是 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$：

$$\psi_1(\cdot)=L(t)i_1(t)$$
$$\psi_2(t)=L(t)i_2(t)=L(t)i_1(t-\tau)$$

但是

$$\psi_1(t-\tau)=L(t-\tau)i_1(t-\tau)\neq\psi_2(t)$$

与 $i_1(t),i_2(t)$ 对应的电压分别是

$$u_1(t)=\frac{d\psi_1(t)}{dt}$$

$$u_2(t)=\frac{d\psi_2(t)}{dt}\neq\frac{d\psi_1(t-\tau)}{dt}=u_1(t-\tau)$$

这就是说，$[u_1(t),i_1(t)]$ 和 $[u_2(t),i_2(t)]=[u_2(t),i_1(t-\tau)]$ 是元件的容许偶，而 $[u_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau)]$ 却不是元件的容许偶，元件是时变的. 只在 $L(t)=\text{const}$ 时，元件才是时不变的.

一般地讲，电阻器、电感器、电容器的参数 R，L，C 是常数时，它们是时不变元件；若参数是时间的函数，它们是时变元件.

由时不变元件和独立电源（作为激励，独立电源可以是时变电源）组成的电路称时不变电路，否则称时变电路. 例如由正弦电

压源和 1Ω 电阻串联而成的一端口是时变一端口。在端口外接 2Ω 电阻构成的电路，是时不变电路。

(2) 线性 n 端口和非线性 n 端口

定义 1-2 设 $[u_1(t), i_1(t)]$ 和 $[u_2(t), i_2(t)]$ 是 n 端口的两个任意容许偶，a, b 是二个任意常数。如果 $[au_1(t)+bu_2(t), ai_1(t)+bi_2(t)]$ 也是容许偶，则称这 n 端口为线性 n 端口，否则称非线性 n 端口。

按此定义，可选 $a=b=0$，这时 $(0,0)$ 即 $[u(t)=0, i(t)=0]$ 是线性元件的一个容许偶，这是线性元件的一个必要条件。据此，激励不恒为零的独立电源，例如电动势 $E=2\text{V}$ 的独立电压源，是非线性元件。独立正弦电压源既是非线性的，又是时变的。

参数 $R(t), L(t), C(t)$ 随时间独立变化的电阻器、电感器、电容器是线性元件。所谓独立变化，是指函数 $R(t)$ 等不受电流、电压的影响。

例 3 设 $C(t)=C_0+C_1\sin\omega t$。由 $q=C(t)u$ 得

$$i=\frac{d}{dt}[C(t)u]$$

设有两个任意电压 $u_1(t), u_2(t)$，与 i 对应的电流分别是

$$i_1(t)=\frac{d}{dt}[C(t)u_1(t)],\quad i_2(t)=\frac{d}{dt}[C(t)u_2(t)]$$

令 a，b 是任意常数。与 $u_3(t)=au_1(t)+bu_2(t)$ 对应的电流 $i_3(t)$ 是

$$i_3(t)=\frac{d}{dt}[C(t)(au_1(t)+bu_2(t))]=ai_1(t)+bi_2(t)$$

据定义 1-2，此电容器是线性元件。

由线性元件和独立电源（作为激励，它不必是线性元件）组成的电路，称为线性电路。

有的书籍从响应和激励的关系来定义线性元件和非线性元件。以 $C=\text{const}$ 的电容器为例。设以电压 u 为激励，即加独立电压源，以电流 i 为响应，由 $i=Cdu/dt$ 可推论出电容器是线性元件，见例 3。若设以电流为激励，即加独立电流源，以电压 u 为

响应,则

$$u(t)=u_0+\frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx\ ,\ t\geqslant 0 \tag{1-5}$$

式中,u_0 是起始电压. 令 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 分别代表激励是 $i_1(t)$,$i_2(t)$ 和 $i_3(t)=ai_1(t)+bi_2(t)$ 时的对应电压,即响应,由式(1-5)得

$$u_k(t)=u_0+\frac{1}{C}\int_0^t i_k(x)\,dx\ ,k=1,2$$

$$u_3(t)=u_0+\frac{1}{C}\int_0^t [ai_1(x)+bi_2(x)]\,dx$$

$$\begin{aligned}au_1(t)+bu_2(t)=&(a+b)u_0\\&+\frac{1}{C}\int_0^t[ai_1(x)+bi_2(x)]\,dx\end{aligned}$$

若 $u_0\neq 0$, 则 $u_3\neq au_1+bu_2$, 因为可选 $a+b\neq 1$. 因此,有的作者认为,如果 $u_0=0$, 电容器是线性元件; $u_0\neq 0$ 时它是非线性元件. 本书不采用这种定义. 从容许偶的观点看,$[au_1(t)+bu_2(t)]$ 仍是电容器的容许电压,不过起始电压值不是 u_0, 而是 $(a+b)u_0$.因此 $[u_3(t),\ i_3(t)]$ 还是容许偶. 电容器是线性元件这一事实和所加激励、初始电压值无关.

采用激励、响应关系来定义线性元件时,若元件是线性的,响应和激励之间的关系满足叠加定理.

从容许偶角度定义线性元件时,若元件是线性的,只有响应和起始值(如例 3 中的 u_0)无关的那一部分,即零状态响应,和激励一起满足叠加定理. 第三章对此将作出讨论.

最后介绍两个命题:

(a) 由线性元件构成的 n 端口是线性 n 端口,但线性 n 端口不必由线性元件构成.

(b) 由时不变元件构成的 n 端口是时不变 n 端口,但时不变 n 端口不必由时不变元件构成.

下面只证明 (a) 命题. 所谓端口电压、电流波形为容许偶,

是指这一套具体的电压、电流和 n 端口内部各元件的具体的电压、电流一起满足 KCL 和 KVL. 另外各内部元件的电流、电压还应满足元件约束，即它们是内部元件的容许偶.

将端口电压、电流向量分别记作 u_p, i_p; 内部元件的电压、电流向量分别记作 u_t, i_t. 把每个端口看作一条支路，但在此支路上，电压、电流的正方向相反，见图 1-7 中端口上联接的虚线支路.

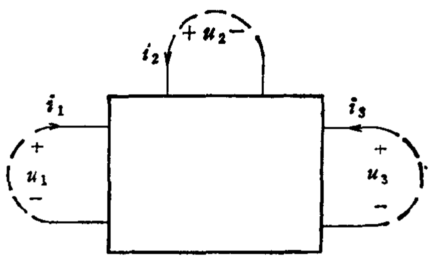

图 1-7　将端口当作支路

令整个电路(包括端口"支路")的降阶关联矩阵为 A, 回路矩阵为 B, 将它们按端口支路和内部支路分块，

$$A = [A_p, A_t],\quad B = [B_p, B_t]$$

则有

$$\left.\begin{aligned} \text{KCL:}\quad & A_p i_p + A_t i_t = 0 \\ \text{KVL:}\quad & -B_p u_p + B_t u_t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式中，B_p 前的负号代表端口支路的电压的方向和规定的方向(即端口支路电流的方向)相反.

设 $[u_t^{(k)}(t), i_t^{(k)}(t)]$ 和 $[u_p^{(k)}(t), i_p^{(k)}(t)]$分别是内部元件和 n 端口的任意两个容许偶，$k=1,2$. 它们当然满足式(1-6). 例如满足 KCL 的方程是

$$A_p i_p^{(1)}(t) + A_t i_t^{(1)}(t) = 0$$
$$A_p i_p^{(2)}(t) + A_t i_t^{(2)}(t) = 0$$

用常数 a 乘第一式，用常数 b 乘第二式，再将它们相加，得

$$A_p[a i_p^{(1)}(t) + b i_p^{(2)}(t)] + A_t[a i_t^{(1)}(t) + b i_t^{(2)}(t)] = 0 \tag{1-7 a}$$

类似地，

$$-B_p[au_p^{(1)}(t)+bu_p^{(2)}(t)]+B_l[au_l^{(1)}(t)+bu_l^{(2)}(t)]=0 \quad (1\text{-}7\text{b})$$

已知内部元件是线性元件，从而$[au_l^{(1)}(t)+bu_l^{(2)}(t),\ ai_l^{(1)}(t)+bi_l^{(2)}(t)]$是内部元件的容许偶。它们符合 KCL，KVL 方程的形式，如式(1-7)。因此得到结论：$[au_p^{(1)}(t)+bu_p^{(2)}(t),\ ai_p^{(1)}(t)+bi_p^{(2)}(t)]$是端口的容许偶。

由定义 1-2，这个 n 端口是线性 n 端口。

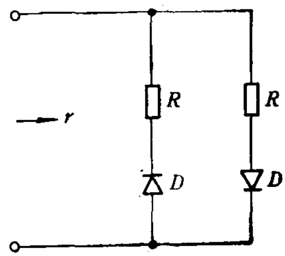

图 1-8

图 1-8 的一端口内部有两个二极管 D，它们是非线性元件。设D的模型是：正向电阻 R_+ 和反向电阻 R_- 都是正常数。线性电阻 $R=\text{const}$。则二端电路的等效电阻 $r=\text{const}$，它是线性一端口，虽然它的内部含有非线性元件。

1-3 线性 n 端口的分类

线性 n 端口还可以进一步分类。

(1) 无源 n 端口和有源 n 端口

输入到 n 端口的瞬时总功率 p 是

$$p(t)=u^T(t)i(t)=\sum_{k=1}^{n}u_k(t)i_k(t)$$

式中，$u=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^T$，$i=[i_1,i_2,\cdots,i_n]^T$ 分别是端口电压、电流向量，n 是端口数。元件获得的总能量 $\varepsilon(t)$ 是

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{t}u^T(x)i(x)\,dx \quad (1\text{-}8)$$

这里，假定 $u(-\infty)=0, i(-\infty)=0$。

定义 1-3 如果对于任一容许偶 $[u(t),i(t)]$，对任意时刻 t，$\varepsilon(t)\geqslant 0$，称线性 n 端口为无源的，否则称为有源的。