

高等学校教学参考书

平面连杆机构的计算设计

梁崇高 陈海宗 编

梁崇高 主编

高等教育出版社

TH112

L42

高等学校教学参考书

平面连杆机构的计算设计

梁崇高 陈海宗 编

梁崇高 主编

高等教育出版社

(京)112号

内 容 简 介

本书阐述了应用计算机对平面连杆机构进行设计综合的理论和实用方法。本书除第一章绪论外,分为六个部分。第一部分(第二章)为基本原理及方法;第二部分(第三章至第五章)是常规的连杆机构综合,包括导引机构、轨迹发生机构及函数发生机构的综合;第三部分(第六章)阐述瞬时运动几何学及其在机构综合中的应用;第四部分(第七章)是多环平面连杆机构以及齿轮连杆机构的综合;第五部分(第八章)介绍四连杆机构在综合过程中如何直接避免混支乱序的方法;最后一部分(第九章)简介机构结构综合专家系统的知识。

本书可以作为机械类各专业高年级学生选修课教材,机械学科的研究生参考教材,亦可供从事机器和机构设计、研究的科技人员及教师参考之用。

高等学校教学参考书
平面连杆机构的计算设计

梁崇高 陈海宗 编
梁崇高 主编

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京市顺新印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 330 000

1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷

印数 0001—1 458

ISBN 7-04-003936-2/TH·311

定价 6.85 元

前 言

连杆机构自瓦特发明蒸汽机以来在机器与各种机械中一直起着重要的作用。随着机器的自动化、高速化的发展,以及机器人机械手的兴起,连杆机构的作用更加显著,对它的设计与综合的研究也更加引起人们的兴趣。本书定名为《平面连杆机构的计算设计》,主要强调使用计算方法而非作图方法进行设计。面对当今计算机广泛普及的时代,所用的计算方法当然是面向计算机的方法,主要的地方配有流程图,书末还附有一些必要的程序。本书是在作者们近年来在北京邮电学院为本科生开设的《高等机构学》讲义及研究生课程《机构分析与综合》部分讲稿的基础上修订而成的。

本书第一章是绪论。第二章至第五章重点阐述平面连杆机构(主要是四杆机构)的三大设计问题,即刚体导引、函数发生及轨迹发生问题。第六章叙述瞬时运动几何学及其在机构设计中的应用。第七章介绍多环(多杆)机构及齿轮连杆组合机构的设计。第八章论述四杆机构设计中的分支与顺序问题,给出解决办法及计算机实施技术。第九章简略介绍机构结构综合专家系统的知识,给有兴趣向此方向开拓的读者提供点线索。本书各章大体上是独立的,尤其是后面几章。授课教师可视具体情况选择取舍。本书所用数学方法,是人们熟悉的矢量与矩阵,没有什么困难。主要各章都附有习题,便于同学们习作与自学者自我检查。

本书可作为高等学校机械类有关专业机械原理的后续提高课程的教材,专题教材,或研究生的参考教材。也可供有关教师及工程技术人员参考。

本书第一章、第八章及第九章由梁崇高执笔,第二章至第七章由陈海宗执笔,并由梁崇高主编。

在完成书稿中,研究生荣辉、赵凤杰及魏世民作了一定工作,工程师高杰同志给予不少帮助,一并在此致谢。

西南交通大学机械系主任陈永教授,悉心审阅了书稿,提出许多宝贵意见与建议,特此志谢。

梁崇高

陈海宗

1991.12 于北京

目 录

第一章 绪论	(1)	§3-5 用矩阵-约束法设计四位置 导引铰链二杆组	(55)
§1-1 机构学	(1)	§3-6 用矩阵-约束法计算刚体四 位置导引的圆心曲线和圆点 曲线	(58)
§1-2 机构综合的基本问题	(1)	§3-7 用矩阵-约束法设计三位置 导引的滑块二杆组	(59)
§1-3 精确综合与近似综合	(2)	习题	(63)
§1-4 闭环机构与开环机构的统一	(3)	第四章 轨迹发生机构综合	(64)
第二章 刚体导引机构的综合——矢 量环法	(5)	§4-1 引言	(64)
§2-1 引言	(5)	§4-2 连杆曲线	(65)
§2-2 刚体导引机构的综合方程式	(8)	§4-3 轨迹发生机构的位移分析	(71)
§2-3 给定位置数与任选参数个数 的关系	(10)	§4-4 用矩阵-约束法综合轨迹发 生机构	(73)
§2-4 三位置刚体导引铰链四杆机 构的设计	(11)	§4-5 用Newton-Raphson法求解 非线性联立方程组	(75)
§2-5 三位置导引铰链四杆机构设 计的计算机程序	(13)	§4-6 五个精确点轨迹发生机构的 设计	(79)
§2-6 四位置导引铰链四杆机构的 设计	(18)	§4-7 计时轨迹发生机构的设计	(82)
§2-7 圆心曲线及圆点曲线的求法 及其计算机程序设计	(22)	§4-8 曲线同源机构, Roberts定理	(88)
§2-8 五位置刚体导引铰链四杆机 构的设计	(26)	习题	(90)
§2-9 三位置刚体导引曲柄滑块机 构的设计	(31)	第五章 函数发生机构综合	(92)
§2-10 三位置导引的滑块二杆组 子程序设计	(33)	§5-1 引言	(92)
习题	(35)	§5-2 切贝谢夫精确点位置配置法, Freudenstein方法	(94)
第三章 矩阵法在机构学中的应用	(38)	§5-3 函数发生机构的综合方程式 和精确点个数	(97)
§3-1 引言	(38)	§5-4 三个精确点函数发生机构的 综合——铰链四杆机构	(99)
§3-2 刚体平面运动的基本矩阵	(40)	§5-5 函数发生机构的结构误差分析	(103)
§3-3 用矩阵-约束法建立机构的 综合方程式	(48)	§5-6 四个精确点函数发生机构的 综合——铰链四杆机构	(109)
§3-4 用矩阵-约束法设计三位置 刚体导引铰链四杆机构	(50)	§5-7 五个精确点函数发生机构的	

综合——铰链四杆机构	(113)	§8-1 引言	(156)
习题	(118)	§8-2 布尔梅斯特曲线的性质	(156)
第六章 瞬时运动几何学及其在机构综合中的应用	(120)	§8-3 顺序问题	(159)
§6-1 瞬心和瞬心轨迹	(120)	§8-4 分支问题	(162)
§6-2 拐点与拐点圆	(122)	§8-5 无乱序无乱支设计举例	(167)
§6-3 瞬心轨迹的曲率	(124)	§8-6 顺序与分支甄别技术在计算机上的实施	(170)
§6-4 Euler-Savary公式	(125)	第九章 结构综合的专家系统简介	(181)
§6-5 驻曲率的三次方程式, Ball点	(127)	§9-1 专家系统的概念	(181)
§6-6 圆心曲线	(129)	§9-2 机构结构知识表达方法的评价	(182)
§6-7 瞬时运动几何学在机构综合中的应用举例	(131)	§9-3 特征多项式表达法	(183)
第七章 多环连杆机构及齿轮连杆机构的设计	(136)	§9-4 机构结构的分层表达法	(188)
§7-1 引言	(136)	附录	(118)
§7-2 轨迹发生—刚体导引六杆机构的设计	(139)	附录1 解线性方程组程序	(195)
§7-3 用矩阵—约束法设计六杆轨迹发生机构	(143)	附录2 求两圆弧交点的算法	(196)
§7-4 齿轮五杆函数发生机构的设计	(145)	附录3 求圆弧与直线交点的算法	(197)
§7-5 齿轮八杆机构的设计	(152)	附录4 一元二次方程求根程序	(197)
习题	(154)	附录5 一元三次方程求根程序	(198)
第八章 分支与顺序的甄别技术	(156)	附录6 一元四次方程求根程序	(199)
		附录7 用Newton-Raphson法综合轨迹发生机构的程序	(200)
		参考文献	(204)

第一章 绪 论

§1-1 机构学

机构的设计通常是机器设计的核心和首要环节。

按照应用力学的观点,机构学可分为两个分支:机构运动学和机构动力学。机构运动学只研究机构中各构件的相对运动关系,包括位移、轨迹、速度和加速度等。机构动力学研究运动过程中机构各构件的受力及力与运动的关系。过去大多把构件看作刚体,现在由于高速机械的发展,往往需要考虑构件的弹性,因而运动弹性动力学(KED)也得到了发展。除了机构运动学与动力学两大分支外,还有一个领域,称为机构的结构理论,它的研究对象是机构的自由度、结构类型、每类机构的种数等。

机构学研究的问题,按逻辑学观点分为两类,第一类是机构分析,第二类是机构综合。前者是对已有的机构进行运动学或动力学的分析计算以进行评价或鉴定;后者是根据给定的运动学或动力学要求,设计机构简图。一般说,机构综合比机构分析更困难一些。但机构分析是基础。

机构分为开式机构与闭式机构。前者如串联式机械手,后者主要有三种:齿轮机构、凸轮机构与连杆机构。由于连杆机构采用低副连接,因而结构简单、结实耐用、不易磨损,适于高速重载。又由于连杆机构种类繁多、变化多端,能满足各种运动要求,此外,还由于连杆机构是其他机构的理论结构原型,是机构的结构理论主要研究对象,因此,连杆机构的研究方兴未艾。同时机器人、机械手等开式机构也是低副机构,与连杆机构息息相关,更推动了连杆机构的发展。

机构学是一门实用性很强的应用科学,它和国民经济的发展有着密切关系。大至各种机器设备,小至人民生活各种器具、电器及生活用品,以及各种玩具,往往都可以发现机构学课题。一个机构学问题的解决,有时可以产生很大的经济效益。因此,深入研究机构学,对促进我国的四化建设无疑是非常必要的。

§1-2 机构综合的基本问题

我们把机构运动简图的设计称为机构综合。可见,机构综合必须解决两个基本问题。第一个是结构综合问题,第二个是尺度综合问题。

结构综合内容可分为型综合与数综合。型综合是研究为了产生某种运动应当选用什么类型的

机构以及该类机构应当由多少构件及哪些类型的运动副组成。因此称为机构的选型设计。数综合是一种机构枚举学，它研究由一定数量的构件和一定类型的运动副，能组成一定自由度的运动链可能有多少种。譬如人们已经确知，完全由转动副组成的自由度为零的基本杆组，两杆组的基本结构型式只有一种；四杆杆组的基本结构型式为2种；六杆杆组的基本结构型式为10种；八杆杆组的基本结构型式有173种。目前，机构的选型设计主要还是依靠设计人员的知识和经验。但开始有人工智能的专家系统软件出现，我们将在第九章作一简介。

尺度综合是按照给定的运动要求或动力要求并按照已选定的机构类型决定机构简图的尺寸。它可分为运动综合与动力综合。传统的连杆机构综合即指尺度综合，它可归纳为三类问题：刚体导引、函数发生和轨迹发生。

所谓刚体导引问题，简单地说，就是规定连杆必须经过的几个位置来寻求机构杆件的尺寸。所谓函数发生问题，就是要求机构的输出变量与输入变量呈规定的函数关系。过去在机械式计算机中应用很多，它们可以产生正弦、余弦、微分、积分等关系。现今很多仪表机构中常见函数发生机构。所谓轨迹发生问题，就是要求连杆上的点产生预期的轨迹。譬如要求在一个循环中的某一段轨迹是圆弧、椭圆、直线等等。有些停歇机构实际上也是轨迹发生问题，因为输出杆的停歇是利用连杆轨迹上的一段圆弧或直线实现的。以上说的是运动综合。动力综合，主要是根据动力特性的要求设计机构简图并确定各构件的质量分布与配置。若考虑杆件的弹性变形及运动副间隙的动力影响则综合起来更复杂一些。本书只限于运动综合。

§1-3 精确综合与近似综合

如果将由于制造不精确、构件弹性变形及工作条件等因素造成的机构误差称为随机误差，那么，设计出来的机构简图理论上的运动与要求的预期运动之间的误差称为结构误差。凡是没有结构误差的机构综合称为精确综合，凡是包含着按某种规律分布的结构误差的机构综合称为近似综合。

精确综合在用多杆机构精确实现轨迹发生上得到了发展。譬如人们综合出反演仪、仿图仪、直线机构，画二次曲线（椭圆、双曲线、抛物线）的机构以及画某些高次曲线的机构。在函数发生机构上也有发展，譬如再现三角函数、幂函数的机构，有求解某类二次、三次甚至四次方程的机构^[5]。

但是，在许多情况下，实际上不能得到既简单方便又能精确发生轨迹或函数关系的机构。因此，近似综合方法得到了很大发展。而且，应用近似方法，在很多场合下可以不用多杆机构而仅用最简单的四杆机构就可以实现这些任务。

以尽量小的结构误差，使机构简图的理论上的运动再现预期运动，这就是机构近似综合所追求的目标。在数学上这属于函数逼近问题。函数逼近法有多种，最简单的一种方法是插值法。它的原理是这样的：要求机构实现预期函数 $\psi(x)$ ，我们用与它相近的一个函数（称为逼近函数） $P(x, c)$ 来逼近它。其中 x 为机构输入变量，如果是单自由度机构则可写为标量 x ； $c(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 为结构参数，即机构简图的尺度，是我们设计的对象。插值法要求

在 x 运动区间内的 k 个点 (称为插值点) 上, 使结构误差

$$\varepsilon_j = P(x_j, c) - \psi(x_j) = 0 \quad (1-1)$$
$$j = 1, 2, \dots, k$$

通过式 (1-1) 的处理, 我们得到了关于设计对象 c 的 k 个方程的联立方程组。当 $k=n$ 时, 可以求解这个方程组以决定结构参数 c 。当 $k < n$ 时, 可以预先人为地选定 $n-k$ 个结构参数, 然后求解此方程组以确定其余的 k 个参数。这样, 就保证了插值点上的结构误差为零。凡是结构误差为零的点 (也就是机构的位置) 称为精确点。这种保证在某些机构位置上结构误差为零的综合方法也称为精确点综合。在插值点与插值点之间, 结构误差一般不为零, 它按某种规律分布, 一般事先不易控制。这种结构误差的分布与精确点 (插值点) 的配置即预先对插值点的选择很有关系。可以调整精确点的配置来减小精确点之间的最大绝对误差。

当 $k > n$ 时, 式 (1-1) 中的方程数大于未知数, 则方程组不可解。即各插值点的结构误差 ε_j 不可能都为零。这时, 问题已经不能用精确点综合方法来解决。现在, 可以采用优化方法, 使各插值点的误差平方和这个目标函数

$$F = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j^2 \quad (1-2)$$

为极小来寻求最优解, 或者用其他目标函数。

优化方法 (也叫数学规则) 在机构综合中得到广泛的应用。应用这种方法, 人们就用不着针对具体问题寻求具体综合方法, 而可以采用一般格式去处理问题。因此可以说, 用电子计算机进行机构的优化设计是比较通用的方法。顺便指出, 当 $k \leq n$ 时也是可以用优化方法求解的。

但是, 优化方法也有它的缺点。譬如, 它只能定量地得到机构参数的数字解, 而对问题却不便作定性分析。而设计者却很希望对问题的性质作到心中有数。传统的综合方法, 即基于函数逼近理论的代数法与基于运动几何学的几何法在这方面却要优越的多。这也就是为什么有了现代优化方法之后, 传统的综合方法仍然继续得到研究发展与广泛应用的缘由之一。传统的机构综合方法的主要发展方向就是利用电子数字计算机来取代人工的繁重运算或作图。将运动几何原理以解析形式表达出来编程上机运算以取代图上作业。

优化设计在高等学校往往单独设课, 所以本书不涉及优化方法, 而只限于传统的机构综合范围, 但方法是面向计算机的。

§1-4 闭环机构与开环机构的统一

一提机器人或机械手, 人们便想到开环机构。但是, 除了开环机械手外, 也有闭环机械手。前者称为串联机械手, 后者称为并联机械手。譬如将机械手的手掌 (抓取器) 安装到四杆机构或六杆机构的连杆上, 就形成平面型并联机械手。当然, 也可将手掌安到五杆机构或七杆机构的连杆上, 不过, 这就是两自由度了。因此, 对于并联机械手的研究与闭环机构的研究可

用统一的理论。

即使是串联机械手,也可以和闭环机构统一起来。如图 1-1 所示平面 RRR 机械手,当它的手心位置 (x, y) 给定后,则我们可以由手心到第一关节假想地用一个杆件连起来,这就是假想机架(图中虚线)。因而一个开环机构变成闭环机构,一个铰链四杆机构。由于给定了手部姿态,亦即等于给定了四杆机构输入角 φ 。这样,就可以应用四杆机构的理论来求解有关的运动参数。当然,应当注意,与开环对应的假想闭环机构的机架的长度与方位并不是固定不变的。

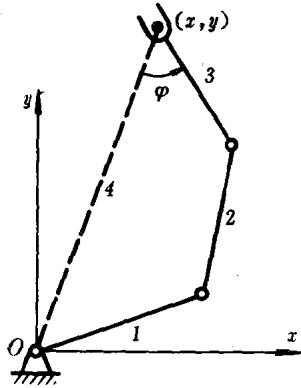


图 1-1

第二章 刚体导引机构的综合——矢量环法

§2-1 引言

一、刚体导引机构的应用

机械设计中有一类问题,要求机器或机构中的某一构件或物体,能顺次地通过若干个给定的位置。这类问题,在机构学中称为“刚体导引”(rigid body guidance),或“运动发生”(motion generation)。

图 2-1 是某一生产装配线上的一个传送装置。要求将工件从传送带 A 传送到传送带 B,并将其逆时针转过 90° 。在传送过程中,要求工件顺次通过图中 1, 2, 3 三个位置,并保持图示的角度。要求设计一个机构,来实现上述的运动要求。

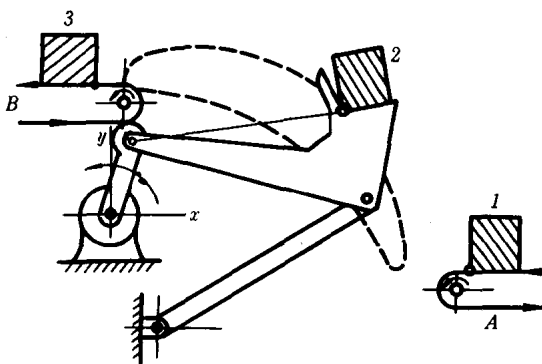


图 2-1

通常被引导的刚体的运动,是一般的平面运动。能够引导刚体通过给定位置的机构,就称为刚体导引机构。

二、实现刚体导引的方法

由于被导引的刚体的运动是一般的平面运动,因此,刚体导引机构中必须具有能作一般平面运动的构件。连杆机构具备有这个条件。因为在连杆机构中,不与机架直接联接的连杆的运动,在一般情况下是一般平面运动。

连杆机构有许多类型,如铰链四杆机构,铰链六杆机构等。而铰链四杆机构又可以派生出曲柄滑块机构、双滑块机构等多种形式。连杆机构与其它机构相结合,可以形成各种组合机构,

如凸轮连杆机构，齿轮五杆机构，齿轮七杆机构等等。这些机构的连杆平面，都能作各种复杂的平面运动(图2-2)。而且，通过变动连杆机构的尺寸参数，可以得到连杆平面的不同运动规律。因此，设计时的选择余地很大，问题是要找出其设计规律。

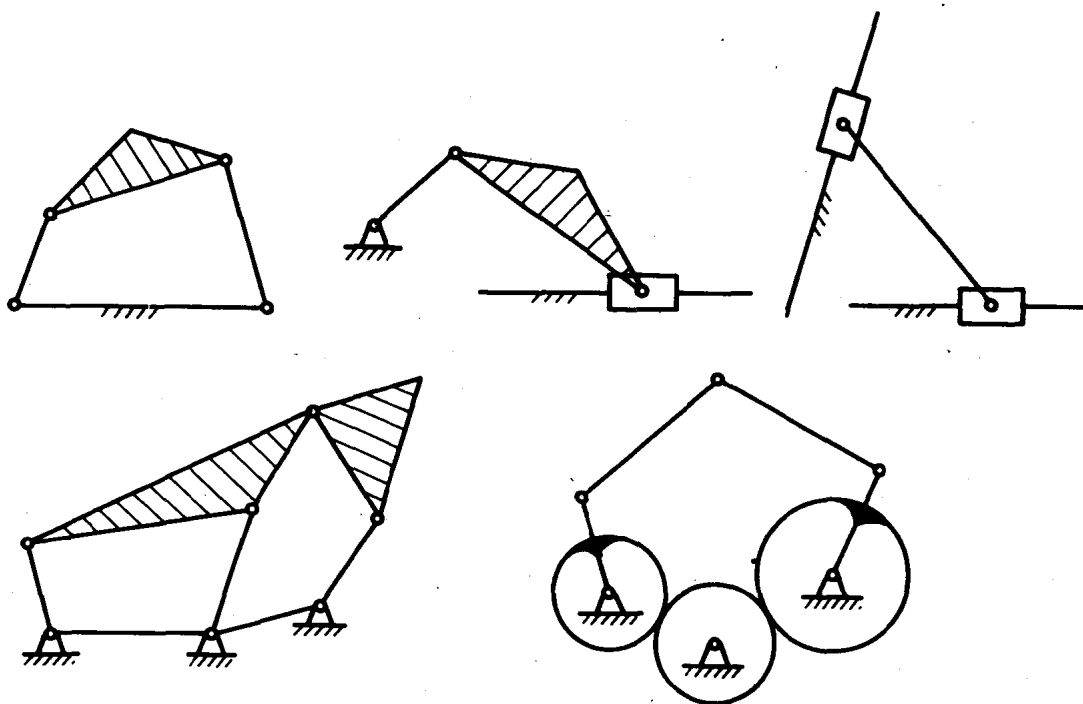


图 2-2

在连杆机构中，与机架联接的杆件(称为“连架杆”)不能作为被导引构件，因为它们只作定轴转动。而只有不与机架联接的杆件(连杆)才可以作为被导引构件。

三、基本概念与术语

- 1) 连架杆——连杆机构中与机架直接联接的杆，如图2-3中的 r_2, r_4 。
- 2) 连杆——连杆机构中不与机架直接联接的杆，亦称浮动杆，如图2-3中的 r_3 。
- 3) 定铰链——与机架铰接的铰链，如图2-3中的 A_0, B_0 。
- 4) 动铰链——与连杆铰接的铰链。如图2-3中的 A, B 。
- 5) 精确位置(精确点)——设计时，要求被导引刚体(连杆)必须到达的给定位置。
- 6) 相关点——被导引刚体通过各个给定的位置 E_1, E_2, E_3, \dots 时，刚体上的点 P 在固定参考平面内的相应位置为 P_1, P_2, P_3, \dots (图2-4)。图中 A_1, A_2, A_3 各点之间， B_1, B_2, B_3 各点之间，也互为相关点。
- 7) 圆点——在被导引刚体(或连杆平面)中，相关点位于同一圆周上的点，称为圆点。显然，圆点可以作为动铰链的铰接点。
- 8) 圆心点——相应于圆点各相关点的圆弧的圆心，称为圆心点。圆心点可以作为定铰链

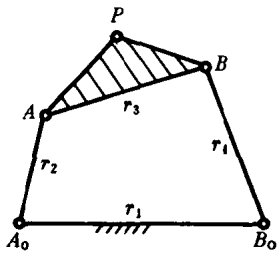


图 2-3

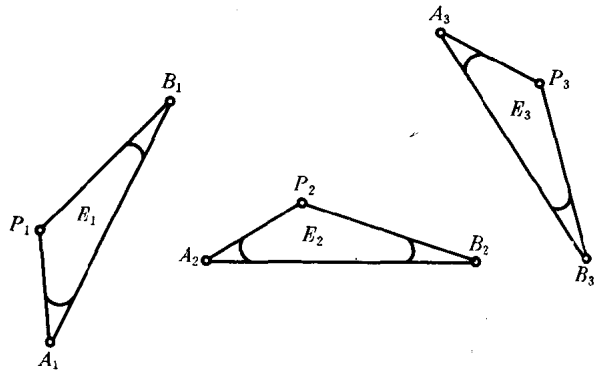


图 2-4

的铰接点。

必须注意，圆点位于被导引刚体（连杆平面）内，而圆心点则位于固定平面内。

四、被导引刚体位置的给定方法

由理论力学可知，刚体作平面运动时，可以用某一个平面图形 (lamina) 来代表。而其位置的给定，则可以有不同的方法。例如，我们可以选择平面图形中的任意点 P (称为基点)，以点 P 的两个坐标 (P_x, P_y) ，及通过点 P 的直线 PL 的幅角 δ ，共三个参数来给定刚体的位置 (图 2-5)。

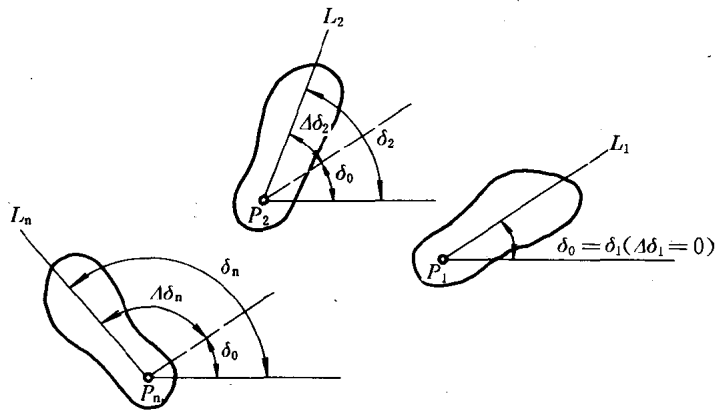


图 2-5

设运动开始时，刚体所处的位置是初始位置，幅角为 δ_0 ，称为初始角。当刚体位于第 i 个精确位置时，基点 P 的位置为 $P_i (P_{ix}, P_{iy})$ ，而直线 PL 的幅角为 δ_i (绝对转角)。这时，刚体相对于初始位置的相对转角为 $\Delta\delta_i$ 。显然， $\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_0$ 。

我们规定，被导引刚体的第 1 个精确位置是初始位置，即 $\delta_0 = \delta_1$ 。因此有 $\Delta\delta_1 \equiv 0$ 。

§2-2 刚体导引机构的综合方程式

一、二杆组

平面连杆机构一般可以分解成一系列的二杆组 (dyad)。二杆组有两种：只含回转副的铰链二杆组 (图 2-6a)，和含有移动副的滑块二杆组 (图 2-6b)。二杆组类似于阿苏尔 II 级组，而其外端运动副之一连接到机架上。



图 2-6

例如，图 2-7a 中的铰链四杆机构，可以分解成左侧铰链二杆组 r_2 、 r_5 ，和右侧铰链二杆组 r_4 、 r_6 。图 2-7b 中的曲柄滑块机构，可以分解为铰链二杆组 r_2 、 r_5 和滑块二杆组 B 、 r_6 。图 2-7c 中的双滑块机构，则可以分解成两个滑块二杆组。

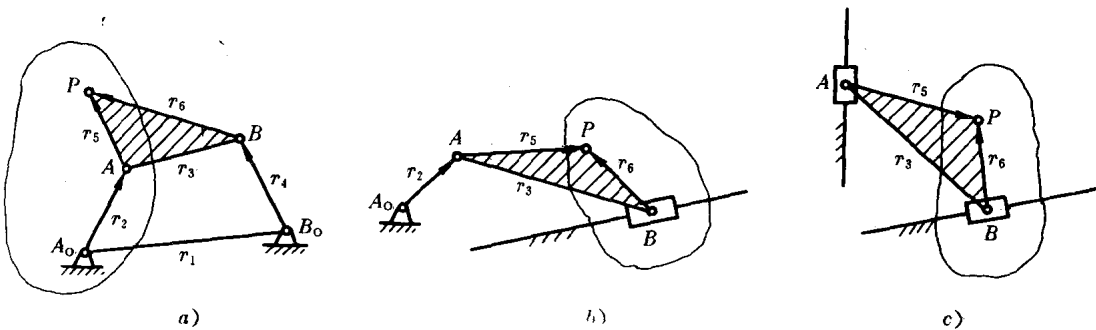


图 2-7

在设计一个平面连杆机构时，通常先分别计算其中每一个二杆组的参数，然后再结合起来，组成一个完整的机构。

二、基本符号

图 2-8 表示一个铰链四杆的刚体导引机构。其中 r_1 是机架， r_2 和 r_4 是连架杆， r_3 (以及 r_5 和 r_6) 是连杆，亦即被导引的刚体； A_0 和 B_0 是固定铰链， A 和 B 是动铰链， P 是连杆平面内

的一个基点。

现在我们先研究左侧二杆组 r_2, r_5 (图 2-9)。当机构处于第 i 个精确位置时, A 点和 P 点的位置分别是 A_i 和 P_i 。

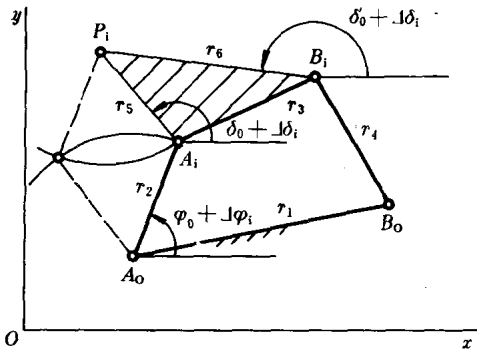


图 2-8

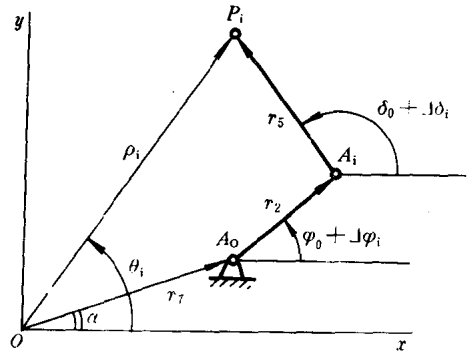


图 2-9

在固定的参考平面内任取坐标系 xOy , 作出这个二杆组的矢量图, 并规定各矢量的正方向 (可以任意)。当机构运动时, 除了矢量 r_7 是定矢量外, 其它各矢量都在变化。

图中符号的意义是

φ_0 —— 连架杆 r_2 的初始幅角。

φ_i —— 连架杆 r_2 在第 i 个位置时的幅角。

$\Delta\varphi_i$ —— r_2 在第 i 个位置相对于初始位置的相对转角。

δ_0 —— 矢量 r_5 的初始幅角。

δ_i —— r_5 在第 i 个位置时的幅角。

$\Delta\delta_i$ —— r_5 在第 i 个位置时相对于初始位置的相对转角。

根据上述的定义可知

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_0$$

$$\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_0$$

我们规定第 1 个精确位置为初始位置, 即 $\varphi_0 = \varphi_1, \delta_0 = \delta_1$ 。故有 $\Delta\varphi_1 = 0$ 和 $\Delta\delta_1 = 0$ 。

三、二杆组的综合方程式

根据图 2-9, 可以写出二杆组 r_2, r_5 在第 i 个位置的矢量环封闭方程式 (loop closure equation)。

$$r_7 + r_2 + r_5 - \rho_i = 0$$

将这个矢量方程式向 x 轴和 y 轴投影, 可以得到两个方程式

$$A_{0x} + r_2 \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi_i) + r_5 \cos(\delta_0 + \Delta\delta_i) - P_{ix} = 0$$

$$A_{0y} + r_2 \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi_i) + r_5 \sin(\delta_0 + \Delta\delta_i) - P_{iy} = 0$$

由以上两式消去连架杆 r_2 的幅角 $(\varphi_0 + \Delta\varphi_i)$, 可得

$$\frac{1}{2} [P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + A_{Ox}^2 + A_{Oy}^2 - r_2^2 + r_5^2] - P_{ix} A_{Ox} - P_{iy} A_{Oy} - P_{ix} r_5 \cos(\delta_0 + \Delta\delta_i) + A_{Ox} r_5 \cos(\delta_0 + \Delta\delta_i) - P_{iy} r_5 \sin(\delta_0 + \Delta\delta_i) + A_{Oy} r_5 \sin(\delta_0 + \Delta\delta_i) = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2-1)$$

上式中, i 是被导引刚体的精确位置。当给定的位置数为 n 时, 则式 (2-1) 含有 n 个方程式。在刚体导引机构的设计中, 刚体的 n 个精确位置是给定的, 故式中 P_{ix} 、 P_{iy} 和 $\Delta\delta_i$ (n 组) 是已知值, 而待求的参数是 r_2 、 r_5 、 A_{Ox} 、 A_{Oy} 和 δ_0 。

§2-3 给定位置数与任选参数个数的关系

用一个铰链四杆机构来实现刚体导引, 则被导引刚体最多可以给定几个精确位置? 这是一个古典的机构学问题, 可以用不同的方法来加以论证。现在我们通过方程式 (2-1), 可以得到一个简单而又清晰的结论。

由上节可知, 方程组 (2-1) 中所含方程式的个数, 等于被导引刚体的精确位置数 n 。方程组的未知数共有 5 个, 即 r_2 、 r_5 、 A_{Ox} 、 A_{Oy} 和 δ_0 (我们称之为“机构参数”)。根据方程式个数等于未知数个数的原则, 显然, 给定被导引刚体的精确位置数 n 最多不能超过 5 个。

若被导引刚体的给定位置数为 2 ($n=2$), 则方程组 (2-1) 仅含两个方程式。因此, 在 5 个未知的机构参数中, 有 3 个可以任意给定。由于每个任意给定参数都有无穷多种选择, 故对于两位置问题, 可能解的数目一般情况下是三次无穷多 (记作 ∞^3)。

若给定的位置数为 3 (即 $n=3$, 称为三位置问题), 则方程组 (2-1) 包含 3 个方程式, 而 5 个未知的机构参数中, 可以任意给定 2 个。因此, 可能解的数目一般情况下是二次无穷多 (∞^2)。

对于四位置问题来说, 方程组 (2-1) 含 4 个方程式, 故 5 个未知的机构参数可以任意给定一个。因而解的可能个数一般情况下是一次无穷多 (∞)。

若给定的位置数是 5 ($n=5$), 则方程组 (2-1) 中方程式的个数与未知的机构参数的个数相等 (都等于 5), 故没有机构参数可以任意给定。因此, 解的个数是有限个 (见 §2-8)。

以上结论, 可以概括地用表 2-1 来表示。根据上述结论, 用铰链二杆组综合的刚体导引机构, 被导刚体最多只能给定 5 个精确位置。

表2-1 用铰链二杆组导引刚体时, 给定位置数与任选参数个数的关系

给定位置数 n	方程式个数	机构参数个数	任选参数个数	待求参数个数	解的个数
2	2	5	3	2	∞^3
3	3	5	2	3	∞^2
4	4	5	1	4	∞
5	5	5	0	5	有限个

上述问题实质上是：给定平面图形的若干个位置，求其圆点及圆心点的分布问题。这个问题最初由德国学者布尔梅斯特(L. Burmester)于1876—1888年期间提出，故称为布尔梅斯特问题。我们在本节中所得出的结论，显然与古典的布尔梅斯特问题的结论相一致。

§2-4 三位置刚体导引铰链四杆机构的设计

我们在§2-2中说过，在综合一个铰链四杆机构时，常常是先分别计算其中的各个二杆组，然后再将它们结合在一起。两个二杆组的计算方法完全相同，因此我们只需研究其中一个(如左侧)二杆组的设计。

给定被导引刚体的三个位置，即刚体内某一任选的基点 P 的三个相关点的坐标，以及刚体的三个相对转角：

$$\begin{aligned} P_1(P_{1x}, P_{1y}) \quad \Delta\delta_1 (=0) \\ P_2(P_{2x}, P_{2y}) \quad \Delta\delta_2 \\ P_3(P_{3x}, P_{3y}) \quad \Delta\delta_3 \end{aligned}$$

由式(2-1)，可以得到含有3个方程式的联立方程组。根据上节的结论，在5个未知的机构参数中，可以任意给定其中的2个。我们可以把定铰链的坐标 A_{Ox} 、 A_{Oy} 定为任选参数，然后求解其余的3个，即 r_2 、 r_5 和 δ_0 。

将式(2-1)中的已知量和未知量分开，可得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} (P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + A_{Ox}^2 + A_{Oy}^2) - P_{ix} A_{Ox} - P_{iy} A_{Oy} \right] + r_5 \cos \delta_0 [\cos \Delta\delta_i (A_{Ox} - P_{ix}) \\ & + \sin \Delta\delta_i (A_{Oy} - P_{iy})] + r_5 \sin \delta_0 [\cos \Delta\delta_i (A_{Oy} - P_{iy}) - \sin \Delta\delta_i (A_{Ox} - P_{ix})] \\ & + \frac{1}{2} (r_3^2 - r_2^2) = 0 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (2-2)$$

方程组(2-2)粗看起来是非线性的，实际上是线性的。式中方括号内的量都是已知量，为简明起见，我们引用如下的记号来代表

$$\begin{aligned} f_{0i} &= \cos \Delta\delta_i (A_{Ox} - P_{ix}) + \sin \Delta\delta_i (A_{Oy} - P_{iy}) \\ f_{1i} &= \cos \Delta\delta_i (A_{Oy} - P_{iy}) - \sin \Delta\delta_i (A_{Ox} - P_{ix}) \\ f_{2i} &= 1 \\ F_i &= \frac{1}{2} (P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + A_{Ox}^2 + A_{Oy}^2) - P_{ix} A_{Ox} - P_{iy} A_{Oy} \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (2-3)$$

引入新的未知量 S_0 、 S_1 和 S_2 来代替式(2-2)中原来未知量 r_2 、 r_5 和 δ_0 的组合