高等学校教学参考书

电磁场边值问题的积分方程解法

张 钧

高等教育出版社

高等学校教学参考书

电磁场边值问题的积分方程解法

张　钧

高等教育出版社

Dt1010

内容简介

本书对电磁场理论的一个重要问题——电磁场边值问题的解法中两种密切相关联的解法，即格林函数法和积分方程法，作了较为详细和深入的讨论。

全书共分三章，主要内容包括：电磁场边值问题各种解法的述评，几个重要定理；静电场和时谐场中各种类型的格林函数的定义、分类、基本概念及其相互关系，各类格林函数的求解方法及其应用；积分方程的类型、积分方程的建立方法，常用的解积分方程的方法，如逐次逼近法、矩量法、威纳-霍普夫法和奇异积分方程法等。

本书是电磁场理论的参考书，可供无线电和电子学类各专业的大学生、研究生和大专院校教师及科技人员自学和参考。

责任编辑　马　达

高等学校教学参考书

电磁场边值问题的积分方程解法

张　钧

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

开本850×1168　1/32　印张7.625　字数190 000

1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷

印数0001—1 600

ISBN7-04-001072-0/TM 110

定价2.05元

前　言

电磁场边值问题在电磁场理论中占有极其重要的地位。研究它的解法不仅丰富了电磁场理论的内容，而且为分析和设计电磁场工程问题提供了依据。解电磁场边值问题的方法很多，内容涉及面很广。在一般的电磁场理论教材和参考书中，大多主要讨论了解边值问题的偏微分方程法——分离变量法，很少涉及格林函数法，而对积分方程法的讨论就更少。但在实际应用中，格林函数法和积分方程法占有很重要的地位。因为对某些实际工程问题，利用这两种方法可以得到严格解或近似解。特别是在当今高速计算机已普遍使用的情况下，由于积分方程是一种比较适合用计算机方法计算的方程，它使过去许多不能计算的边值问题能够得到足够准确的解答，使这种方法更加显示出其优越性。而积分方程的建立又和格林函数密切相联系。所以，本书主要讨论这两种解电磁场边值问题的方法，作为电磁场理论教材的参考和补充。

本书共分三章。第一章对解电磁场边值问题的各种方法作一简要述评，并介绍了在解电磁场边值问题中常用到的几个电磁定理。第二章讨论格林函数法。主要内容包括与格林函数密切联系的狄拉克 δ 函数；静电场中格林函数基本概念，格林定理，格林函数的分类、求解方法及其应用；时谐电磁场中并矢格林函数的分类，它们之间的相互关系，并矢分析，并矢格林函数的求解方法及应用。第三章讨论积分方程法。主要内容包括积分方程的类型；在辐射、散射和传输等各种实际边值问题中积分方程的建立；积分方程的解法，包括逐次逼近法、矩量法、威纳-霍普夫法和奇异积分方程法等。

本书在编写过程中得到许多同志的帮助。吴彝尊教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的建议和意见。著者在此一并表示衷心

的感谢。

由于著者水平有限，错误与不当之处，希望得到读者的指正。

张　　钧

于长沙国防科技大学 1987 年 4 月

目　录

第一章　电磁场边值问题的概述与基础

§1.1　电磁场边值问题与解的唯一性条件

电磁场边值问题是电磁场理论中一个极为重要的问题。探讨它的解法，不仅充实了电磁场理论的内容，而且为分析和设计电磁工程问题提供了依据。因此，它在解决和发展电磁场理论和工程问题中占有很重要的地位。

求解电磁场边值问题一般都是在已知某一区域的边界条件和媒质特性（对于瞬变场还包括初始条件）下，求下列问题之一：(一) 求在该区域内可能存在的各种场分布模式；(二) 在给定该区域内的源分布时，求解该区域内实际的场分布；(三) 给定实际的激励，先求源或等效源的分布，然后再求实际场分布。此外，还有一类电磁场边值问题的逆运算，在已知源和场分布的情况下，求解边界条件和媒质特性（即求解目标的形状和媒质特性）。这是上面提到的一类场的边值问题的反演。必须指出，不论何种电磁场边值问题的求解必不可少的基本依据是麦克斯韦方程组、媒质的本构方程和边界条件。

麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \tag{1-1 a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-1 b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-1 c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-1 d}$$

对于各向同性、线性媒质，其本构方程为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1-2 a}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H} \tag{1-2 b}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E} \tag{1-2 c}$$

上面两组方程中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度和磁场强度矢量，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为电通量密度和磁通量密度矢量，$\boldsymbol{J}$ 为电流密度矢量，ρ 为电荷密度，ε、μ 和 σ 分别为媒质的介电常数、磁导率和电导率。

对于图 1-1 所示的两种媒质交界面的边界条件为

图 1-1　两种不同媒质的交界面

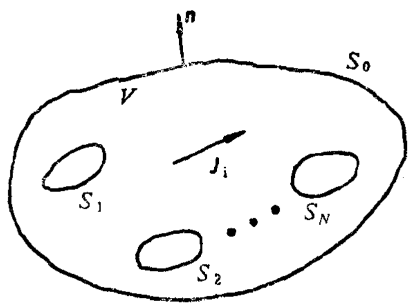

图 1-2　有限区域的边值问题

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s \tag{1-3 a}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1-3 b}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \tag{1-3 c}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s \tag{1-3 d}$$

式中 $\boldsymbol{J}_S$ 和 ρ_S 分别为电流(面)密度矢量和电荷(面)密度。

在求解边值问题时，人们自然要问，在什么样的条件下才能得到麦克斯韦方程组的解是唯一的呢？为了从数学上证明这个问题，我们考虑如图 1-2 所示的有限区域V，它是由表面S（包括表面 S_0，S_1，S_2，……，S_N）所围成的。V 内的媒质是各向同性的线性媒质，其参数 ε、μ 和 σ 可以是空间坐标的已知任意函数。$\boldsymbol{J}_i$ 是V 内的外加激励电流源。

令 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$ 分别为下列麦克斯韦方程组的两组解，

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_i\\\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{1-4}$$

现在需要证明的问题是，在什么样的条件下，这两组解之差 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$，在任意时刻和在体积内任一点上恒等于零。这样得到的结果便是麦克斯韦方程组解唯一性的最普遍条件。

为此，将 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$ 分别代入式（1-4），然后对应式分别相减，得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}'=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t}+\sigma\boldsymbol{E}'$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}'=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t}$$

由上式可见，两组解之差 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{H}'$ 满足在体积 V 内无外加激励源的麦克斯韦方程组。因此，根据坡印廷定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}'^2+\mu\boldsymbol{H}'^2}{2}\,\mathrm{d}V+\int_V\sigma\boldsymbol{E}'^2\mathrm{d}V=-\int_S(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}')\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\tag{1-5}$$

为了证明在什么条件下，式（1-5）中 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{H}'=0$，将式（1-5）对时间从零到 t 积分，得

$$\int_V\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}'^2+\mu\boldsymbol{H}'^2}{2}\bigg|_t\,\mathrm{d}V+\int_{r_0}^{t}\mathrm{d}t\int_V\sigma\boldsymbol{E}'^2\mathrm{d}V=-\int_0^t\mathrm{d}t\int_S(\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'_t)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\int_V\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}'^2+\mu\boldsymbol{H}'^2}{2}\bigg|_0\,\mathrm{d}V\tag{1-6}$$

上式中已将式（1-5）中在面积分下的 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{H}'$ 用在 S 上的切线分量代替，因为

$$(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}')\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'_t)\cdot\boldsymbol{n}$$

式（1-6）的左边所表示的电磁能量积分只可能等于或大于

零，而且只有当E'、H'在任意时刻t和体积V内的任一点上等于零时，才有可能等于零。因此，等式右边等于零，这就是$E'=H'=0$的充分条件。反之，如果E'、H'等于零，那么式(1-6)的右边必须等于零。可见，式（1-6）右边等于零又是E'、H'等于零的必要条件。

由上述讨论可知，$E'=H'=0$的充要条件是式（1-6）右边为零，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t\int_S (\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'_t)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}'^2+\mu \boldsymbol{H}'^2}{2}\bigg|_0 \mathrm{d}V \tag{1-7}$$

为了求出上式在什么条件下成立，可先假定式（1-7）成立。然后将式（1-7）对t微分，得到在任意时刻t有

$$\int_S (\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'_t)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{1-8}$$

将式（1-8）代入式（1-7），得

$$\int_V \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}'^2+\mu \boldsymbol{H}'^2}{2}\bigg|_0 \mathrm{d}V=0$$

而上式只有在体积V内的任一点满足

$$\boldsymbol{E}'|_0=0,\quad \boldsymbol{H}'|_0=0$$

才能成立。由此可得唯一性的充要条件之一是解应满足初始条件

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_1(x,y,z,0)=\boldsymbol{E}_2(x,y,z,0)=\boldsymbol{E}_0(x,y,z)\\&\boldsymbol{H}_1(x,y,z,0)=\boldsymbol{H}_2(x,y,z,0)\\&\qquad=\boldsymbol{H}_0(x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

即在初始时刻$t=0$，两组解在体积V内任一点都应相等，也就是说，符合唯一性的解都要满足给定的初始条件（$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{H}_0$）。

反之，如果

$$\boldsymbol{E}'|_0=0,\quad \boldsymbol{H}'|_0=0$$

则只有在

$$\int_S (\boldsymbol{E}'_t \times \boldsymbol{H}'_t) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

时，式（1-7）才能成立。而要满足上式，只有在S上$\boldsymbol{E}'_t = 0$或$\boldsymbol{H}'_t = 0$。

由此可得，唯一性的充要条件之二是解应满足下列三种边界条件之一：

1. 对任意时刻$t \geqslant 0$，任何解的电场切向分量$\boldsymbol{E}_t$在S上满足给定的边界条件，这样才能满足在S上$\boldsymbol{E}'_t = 0$。

2. 对任意时刻$t \geqslant 0$，任何解的磁场切向分量$\boldsymbol{H}_t$在S上满足给定的边界条件，这样才能满足在S上$\boldsymbol{H}'_t = 0$。

3. 对任意时刻$t \geqslant 0$，在S的一部分边界S'上，$\boldsymbol{E}_t$满足给定的边界条件，而在其余的边界$S - S'$上，$\boldsymbol{H}_t$满足给定的边界条件。这称为第三类边界条件。

以上讨论的唯一性定理的条件适用于电磁场随时间呈任意变化。对于随时间呈周期性变化的时谐场，如只求稳态解，则只要给出上述边界条件，而不必给出初始条件，就可以保证解的唯一性。下面给出证明。

假设已给定时谐场的三类边界条件中之一，则在S上有$\boldsymbol{E}'_t$或$\boldsymbol{H}'_t$等于零。由式（1-5）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\varepsilon E'^2 + \mu H'^2}{2} \mathrm{d}V = -\int_V \sigma E'^2 \mathrm{d}V$$

又设在体积V内，媒质参数$\sigma \neq 0$，即为有耗媒质。在这个条件下，如果在V内$\boldsymbol{E}'$不等于零，那么上式右边恒为小于零的负值。这意味着，上式左端$\frac{\partial}{\partial t}$号后的电磁能量的积分将单调地随时间而递减。显然，对随时间作周期性变化的场来说，这是不可能的。因此，$\boldsymbol{E}'$在V内必须处处等于零。由$\boldsymbol{E}' = 0$，可得

$$\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}' = 0$$

这表明$\boldsymbol{H}'$只能等于零或常数。而对周期性场来说，$\boldsymbol{H}'$只能等

于零。这样就证明了在有耗媒质中的时谐场只要满足三类边界条件之一，就可以保证解的唯一性。

对于无耗媒质 $\sigma=0$ 的情况，如果规定在 $\sigma=0$ 时的场可取有耗媒质（$\sigma\neq 0$）中损耗趋于零时相应场的极限值，那么用这种方式得到的解仍然是唯一的。所以唯一性定理也可推广应用于无耗媒质区域。

唯一性定理的重要意义在于：一、它告诉我们在什么条件下获得的解是唯一解；二、它可以允许我们放心地自由选择任何一种解电磁场的方法。因为不管用什么方法，只要找到符合唯一性定理所规定的条件的解，那么此解一定是唯一解；三、根据唯一性定理可以建立许多场的等效原理，例如利用唯一性定理得到的镜像法就是一种求解场的等效方法。

最后还要指出一点，有时我们要处理两个区域在交界面具有边界形状或媒质参数突变的场解问题，在图 1-3 上举出两个具体例子，前者为边界形状突变，后者为媒质参数突变。这时，在交界面 S_a 上必须同时利用式（1-3 a 和 b）两个边界条件才能得两个区域的场解是唯一的。这与上面所证明的只需已知一个边界条件并不矛盾。因为现在的问题是两个区域的场均为待求的，所以利用一个边界条件，例如在 S_a 上 $E_{1t}=E_{2t}$，并未给定 E_{1t} 或 E_{2t} 的具体值。在这种情况下，需要同时利用式（1-3 a和 b），才能求解得到两个区域中场的唯一解。

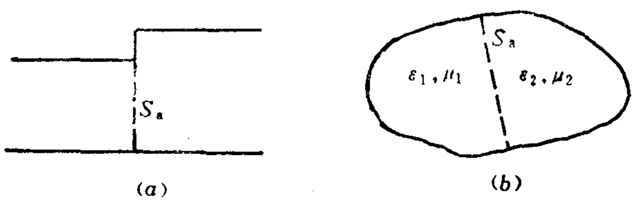

图 1-3 （a）矩形波导窄边突变

（b）两区域媒质突变

§1.2 电磁场边值问题的解法及其特点

本书将以讨论时谐场为主，并限于讨论时谐场的稳态解法，不涉及瞬态解。这样做并不失其普遍性。因为对线性媒质而言，任意时变场的瞬态响应总可以看成不同频率的时谐场的稳态响应的叠加。这样，我们可以将各个频率分量的时谐场稳态解，通过傅立叶变换，求得任意时变场的瞬态响应。这是研究瞬态响应常用方法之一，称为频域法。至于研究瞬态响应的其它方法，例如时域法等这里暂不涉及。下面将从时谐场稳态解的特性和数学物理方法两方面作一简要评述。

由解答的特性来分类，大致可将解答分为三类。

一、严格解

这是从麦克斯韦方程组和边界条件出发，能获得严格解的方法。严格解法虽然比较复杂，但在理论和工程上占有极重要的地位。即使在数值计算技术日益发展的今天，它仍然是人们感兴趣的。其原因有以下几个方面：

1. 根据边值问题的唯一性定理，严格解的正确性可以通过充分必要条件来检验。因而利用它可以检验近似解或数值解的正确性。也可以用于检验测量设备和方法的正确性。

2. 通过对某些问题的严格解的研究可以得到许多电磁理论方面的重要规律和结论。

3. 严格解是许多近似或数值解法发展的基础，例如几何绕射理论和微扰法等都是在严格解法的基础上发展起来的。

严格解的局限性是分析和计算较复杂，目前只有少数电磁场边值问题有严格解。

二、近似解

它是指对某一实际边值问题建立的数学模型，用近似解法得到一个具有明确表达式的解答。例如常用的变分法和微扰法等就是属于这一类解法。近似解法是一种常用的方法，现今仍占有一

定的重要地位。它的优点有以下几点：

1．有表达式，可以直观研究各参量间的关系，计算简便和省时，便于优化设计。

2．有些近似法借助于计算机，原则上可得到你所要求的任意精度。当然，实际上要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。

3．某些近似法（如变分法）可以估计解的误差上、下限。

近似解的局限性为：

1．对某些问题的解，其误差大小或正确性不易估计。目前，对一些近似解的误差已有了解，或者已得到一些估计误差的公式。

2．它的应用范围虽比严格解法已大大扩展，但仍有许多复杂边值问题无近似解，或得到的解误差太大而无法实用。

三、数值解

这是近十来年发展最快的一种方法。它的突出优点是，原则上适用任何复杂的边界问题。且可得到你所要求的精度。任何数值解法的主要特征都是将连续函数离散化，再解联立方程组得数值解。边界形状愈复杂或要求精度愈高，则方程组的阶数愈高。因此，实际上数值法还要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。随着巨型计算机和数值计算方法的发展，将使许多过去只能依靠实验来设计的问题都可借助数值法来实现，并可作到优化设计。数值法除受条件和经济限制外，还有一点不足。这就是数值解目前还没有找到一种比较简单的充分必要检验手段来验证解的正确性或估计误差。有的虽有误差估计公式，但又偏于保守而无法实用。目前行之有效的手段除实验验证外就是收敛试验，但要以大量消耗机时为代价。

综上所述，三种解各有特点，它们相互促进，互相补充，不能绝对肯定那一种。当前以数值解法发展最快。

下面我们再按数学物理方法分类来说明各种解法及其特点。由于解法很多，这里我们只能按数学或物理方面的主要特征来说明一些基本的和常用的方法。同时还应指出，一个具体问题往往

可用多种解法或需数种方法联合使用。而且在解的过程，还要借助许多电磁定理和概念。

一、分离变量法——偏微分方程法[3][4][12]

大家知道，静电场边值问题可以归结为解拉普拉斯方程或泊松方程，再加边界条件。任意时变场则为解矢量或标量的、齐次或非齐次的波动方程，再加上初始条件和边界条件。对时谐场边值问题的稳态解，波动方程变成亥姆霍兹方程，此时只需边界条件。

根据前面讨论的唯一性定理可知，由封闭面S所包围的均匀空间，场量或位函数满足亥姆霍兹方程，如在S上满足E_t或H_t的边界条件，则解是唯一的。如在边界或介质突变的两个区域，则在交界面S_a上还要同时满足E_t和H_t的连续条件，解才唯一确定。还要指出，获得解答的充分必要检验是解应满足麦克斯韦方程组和边界条件。

为了能写出边界条件的表达式，实际问题的边界必须选择与一组正交曲线坐标系的一个或数个坐标面重合。而分离变量法只有在该坐标系的斯达克尔矩阵满足一定条件下才能应用。对于标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0 \tag{1-10}$$

目前只有十一种坐标系能用分离变量。它们是直角、圆柱面、球面、椭圆柱面、抛物柱面、抛物面、旋转抛物面、长旋转椭球、扁旋转椭球、锥面和椭球。此外，还有二种坐标系通过适当变换后，拉普拉斯方程可分离变量，它们是双球面和环坐标。

对于矢量亥姆霍兹方程，除在直角坐标系可分解为三个标量亥姆霍兹方程外，其它坐标系就不一定能直接得到一个到三个标量亥姆霍兹方程。因此，必须找到场矢量与满足标量亥姆霍兹方程的量之间的关系，这有很多方法，大致可分为三种情况：

一种方法是直接解$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{H}$的一个分量的亥姆霍兹方程，而不借助位函数。这就要求场矢量至少要有一个分量满足亥姆霍兹

方程。例如，在直角和圆柱坐标系，E_z和H_z满足标量亥姆霍兹方程，通过先求出这两个纵向分量，再由麦克斯韦方程求出其余四个横向分量。通常这种方法称为纵向场法。当场量具有某些特点时，某些坐标系也可利用直接解某一分量的亥姆霍兹方程的方法。例如，当场量与z轴无关，则在直角、圆柱、椭圆柱和抛物柱面坐标系中．E_z和H_z满足标量亥姆霍兹方程。当场量具有轴对称的情况下，在球、长和扁旋转椭球以及旋转抛物面坐标系中，E_ψ和H_ψ可化为标量亥姆霍兹方程，等等。

第二种方法是将$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$用下列矢量函数来表示

$$\boldsymbol{L}=\nabla\psi$$

$$\boldsymbol{M}=\nabla\times(\boldsymbol{a}\psi)$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{M}=\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{a}\psi)$$

式中$\boldsymbol{a}$是一个单位常矢量，ψ满足标量亥姆霍兹方程。在这种情况下，可以证明矢量函数$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$都是$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的亥姆霍兹方程的独立解。因此，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的解直接可由这些矢量函数的线性叠加的展开式来表示。标量ψ可在直角、圆柱、椭圆柱、球、抛物圆柱和圆锥等六种坐标系下满足标量亥姆霍兹方程。

第三种方法引入各种辅助的矢量位和标量位来求解电磁场。在许多情况下，这些位函数可通过标量亥姆霍兹方程求出。对于无源场区，理论上可证明，此时电磁场量可用二个标量位函数来表示。因此，在某一确定的坐标系，可设法引入辅助位函数来求场。

用分离变量法解标量亥姆霍兹方程还要用一组正交完备函数系来表示，这些函数组都是一些特殊函数。不同的坐标系，有不同的特殊函数。在这些函数中，目前只有三角函数、指数函数、各类贝塞尔函数、各类连带勒让德函数、马许函数和旋转椭球函数等研究比较完善，并已制有大量数据和图表可供应用。有些函数如拉美函数、贝尔函数和韦伯函数等虽有解的形式，但数据表格还不完善，还不常用。目前实际应用较广泛的只有直角、圆柱