高等工科院校系列教材

线性代数

阎家灏 主编　党华周 李铅林 副主编

重庆大学出版社

高等工科院校系列教材

线 性 代 数

主 编 阎家灏
副主编 党华周
李铅林

重庆大学出版社

内容简介

本书系中国西部地区工科系列专科教材之一。是根据国家教委有关教学大纲和教学要求的规定，联系工科专业实际，结合编者教学实践编写而成。全书共七章，包括了行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、特征值和特征向量、二次型、投入产出数学模型共7部分内容。前三章为“工具篇”，后四章为“实用篇”。各章内容既紧密联系，又相对独立。在表述上力求深入浅出，通俗易懂，适应面宽，便于自学。适于工科院校本专科师生及广大科技工作者作教材及参考书使用。

线性代数

[illegible]

责任编辑　谭敏

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆通信学院印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:6.25　字数:140千

1994年2月第1版　　1994年2月第1次印刷

印数:1—6000

ISBN 7-5624-0799-1/O·96　定价:3.60元

(川)新登字020号

序

近年来我国高等专科教育发展很快，各校招收专科生的人数呈逐年上升趋势，但是专科教材极为匮乏，专科教材建设工作进展迟缓，制约了专科教育的发展。在重庆大学出版社的倡议下，中国西部地区14所院校（云南工学院、贵州工学院、宁夏工学院、新疆工学院、陕西工学院、广西大学、广西工学院、兰州工业高等专科学校、昆明工学院、攀枝花大学、四川工业学院、四川轻化工学院、渝州大学、重庆大学）联合起来，编写、出版机类和电类专科教材，开创了一条出版系列教材的新路。这是一项有远见的战略决策，得到国家教委的肯定与支持。

质量是这套教材的生命。围绕提高系列教材质量，采取了一系列重要举措：

第一，组织数十名教学专家反复研究机类、电类三年制专科的培养目标和教学计划，根据高等工程专科教育的培养目标——培养技术应用型人才，确定了专科学生应该具备的知识和能力结构，据此制订了教学计划，提出了50门课程的编写书目。

第二，通过主编会议审定了50门课程的编写大纲，不过分强调每门课程自身的系统性和完整性，从系列教材的整体优化原则出发，理顺了各门课程之间

的关系，既保证了各门课程的基本内容，又避免了重复和交叉。

第三，规定了编写系列专科教材应该遵循的原则：

1. 教材应与专科学生的知识、能力结构相适应，不要不切实际地拔高；

2. 基础理论课的教学应以“必须、够用”为度，所谓“必须”是指专科人才培养规格之所需，所谓“够用”是指满足后续课程之需要。

3. 根据专科的人才培养规格和人才的主要去向，确定专业课教材的内容，加强针对性和实用性；

4. 减少不必要的数理论证和数学推导；

5. 注意培养学生解决实际问题的能力，强化学生的工程意识；

6. 教材中应配备习题、复习思考题、实验指示书等，以方便组织教学；

7. 教材应做到概念准确，数据正确，文字叙述简明扼要，文、图配合适当。

第四，由出版社聘请学术水平高、教学经验丰富、责任心强的专家担任主审，严格把住每门教材的学术质量关。

出版系列专科教材堪称一项浩大的工程。经过一年多的艰苦努力，系列专科教材陆续面市了。它汇集了中国西部地区14所院校专科教育的办学经验，是

西部地区广大教师长期教学经验的结晶。

纵观这套教材，具有如下的特色：它符合我国国情，符合专科教育的教学基本要求和教学规律；正确处理了与本科教材、中专教材的分工，具有很强的实用性；与出版单科教材不同，有计划地成套推出，实现了整体优化。

本套教材立足于我国西部地区，面向全国市场．它的出版必将对繁荣我国的专科教育发挥积极的作用。这套教材可以作为大学专科及成人高校的教材．也可作为大学本科非机类或非电类专业的教材，亦可供有关工程技术人员参考。因此我不揣冒昧向广大读者推荐这套系列教材，并希望通过教学实践后逐版修订，使之日臻完善。

吴云鹏

1993年

仲夏

前　言

本书是中国西部地区工科系列专科教材之一。

根据国家教委有关本课程的教学大纲和教学要求的规定，联系工科专业实际，结合编者教学实践编写了本教材。在内容上突出“精选、够用”的特色；在表述上力求深入浅出，通俗易懂，适应面宽，便于自学。

全书七章，既紧密联系，又相对独立，教学约34课时，前三章为“工具篇”，后四章为“实用篇”。这样，在使用本教材时，按照各专业需求和教学时数，可以选择有关章节进行教学。

在编写过程中得到兰州大学、渝州大学、攀枝花大学、兰州工专和重庆大学出版社的大力支持。兰州大学数学系博士生导师郭聿琦教授仔细审阅书稿，并担任主审。另外，兰州工专赵锡英老师对习题编选做了大量工作。在此，我们衷心表示感谢！

由于我们水平有限，疏漏乃至错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1993.5.

目　　录

第一章 行 列 式

线性代数是高等工科院校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展。而行列式是研究线性代数的重要工具，利用它可以给出某些 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的解的公式，这在理论上是十分重要的。本章介绍行列式的概念、基本性质，以及解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则。

§1 n 阶行列式的定义

在这一节里，我们通过解一般二元、三元线性方程组，引进二阶、三阶行列式，并对其结构规律进行分析、归纳，引入一般 n 阶行列式的概念。要求通过一些实例和练习，加深对这一基本概念的理解。

(一) 二元、三元线性方程组与二阶、三阶行列式

设含有两个未知量两个方程的一般线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

我们用消元法解此方程组。

用 a_{22} 乘(1-1)的第一式各项，得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$$

再用 a_{12} 乘(1-1)的第二式各项，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$$

然后从所得的前式减去后式消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同理，用消元法也可以消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

这是方程组(1-1)在条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 下的唯一解。

式(1-2)提供了(1-1)在条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 下解的一般公式，但却难于记忆，且应用时不方便。因此有必要引进新的简明符号来表示。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式。横排称“行”，纵排称“列”。

这样，方程组(1-1)的系数构成二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

计算二阶行列式的值可用对角线法则：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$(-)\qquad(+)$

实线联结的两元素的乘积取正号，虚线连结的两元素的乘积

取负号，然后作代数和。

如果用常数项 b_1、b_2 分别替换系数行列式 D 中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数，可得下列二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

于是，当 $D \neq 0$ 时，方程组(1-1)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

对于含有三个未知量三个方程的一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

可仿照前面的方法解此方程组。用消元法分别消去(1-4)中的 x_2 与 x_3，x_3 与 x_1，x_1 与 x_2；当

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时，得到三元线性方程组(1-4)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{12}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

(1-5)

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

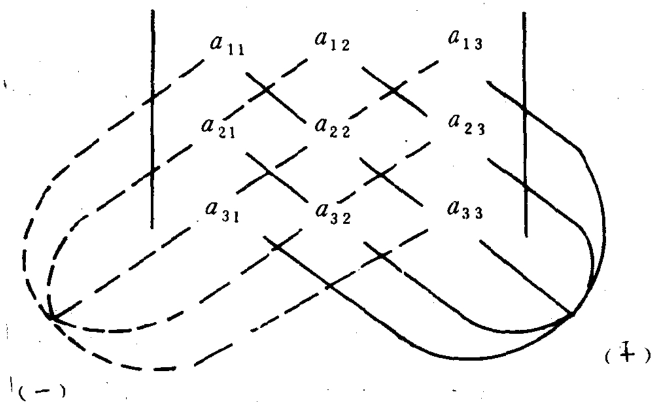
称为三阶行列式。

这样，方程组(1-4)的系数构成三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

计算三阶行列式的值可用对角线法则：



其中实线联结的三个元素的乘积项取正号，虚线联结的三个元素的乘积项取负号，然后作代数和。

如果用(1-4)中常数项 b_1、b_2 和 b_3 分别替换(1-6)中 x_j 所在列的系数，$j=1,2,3$，可得下列三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

将它们按对角线法则展开后，正好分别是(1-5)中 x_1,x_2,x_3 的分子。

于是，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-4)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}。$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-7x_2+5x_3=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}=10-12+7+56+5+3=69\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}=69,D_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=23$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -7 & -1\end{vmatrix}=-23$$

所以，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{3}。$$

（二） 排列的逆序数及其对换

为了揭示二阶、三阶行列式的结构规律，以便把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式。为此，需要对排列的有关知识作一些讨论。

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列。其中按自然顺序的 n 级排列"$1,2,\cdots,n$"约定为标准排列，其它任一 n 级排列"$j_1j_2\cdots j_n$"均为非标准排列。

若 n 级排列的总个数记为 P_n，则

$$P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，若有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面，则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序。一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，且有

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n)=&(j_2\text{ 前面比 }j_2\text{ 大的数的个数})\\&+(j_3\text{ 前面比 }j_3\text{ 大的数的个数})\\&+\cdots\\&+(j_n\text{ 前面比 }j_n\text{ 大的数的个数})\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n)=&(j_1\text{ 后面比 }j_1\text{ 小的数的个数})\\&+(j_2\text{ 后面比 }j_2\text{ 小的数的个数})\end{aligned}$$

$+\cdots$

$+(j_{n-1}$后面比 j_{n-1}小的数的个数)

逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列。标准排列的逆序数是零，为偶排列。

例 2 求由 1，2，3 构成的三级排列，并判断其奇偶性。

解 数 1，2，3 构成 3! =6 个三级排列，即 123，231，312，132，213，321，其中

$\tau(123)=0$， $\tau(231)=2$， $\tau(312)=2$，

$\tau(132)=1$， $\tau(213)=1$， $\tau(321)=3$

所以，123、231、312 是偶排列，132、213、321 是奇排列。

在排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，仅将两个元素 i_s 与 i_t 对调，称为一个对换，记作对换 (i_s, i_t)。相邻元素的对换称为相邻对换。

例如，排列 24513 施以对换(4，1)后得排列 21543，施以相邻对换(4，5)得排列 25413。

定理 1 任一排列经过一次对换，改变其奇偶性。

证 先证相邻对换的情形。

设排列 $\overbrace{\cdots\cdots}^{A} ij \overbrace{\cdots\cdots}^{B}$，经对换 (i, j) 后变为新排列 $\overbrace{\cdots\cdots}^{A} ji \overbrace{\cdots\cdots}^{B}$，显然 A 与 B 中元素的逆序数不变，只是 i 与 j 改变顺序：当 $i<j$ 时，i 的逆序数增加 1 而 j 的逆序数不变；当 $i>j$ 时，i 的逆序数不变而 j 的逆序数减少 1。于是，新排列的逆序数或者增加 1 或者减少 1，所以，原排列改变了奇偶性。

再证一般对换的情形。

不妨设排列为 $\cdots i k_1 k_2 \cdots k_m j \cdots$，用下述方法作对换 (i, j)：先作 m 次相邻对换得到 $\cdots i j k_1 k_2 \cdots k_m \cdots$，再作 $m+1$ 次相邻对换得到新排列 $\cdots j k_1 k_2 \cdots k_m i \cdots$，总共经过 $2m+1$ 次相邻对换

后，实现了一次一般对换(i,j)，使新排列与原排列奇偶性相反。所以，原排列改变了奇偶性，证毕。

由此可知，对换的次数就是排列奇偶性改变的次数。即可得

推论 偶排列调换成标准排列的对换次数为偶数，奇排列调换成标准排列的对换次数为奇数。

(三) n 阶行列式的定义

三阶行列式(1-6)有如下特点：

(1) 它表示所有取自不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和。各乘积项可一般表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列。当列标 $j_1j_2j_3$ 取遍三级排列(见例 2)时，就得到三阶行列式的所有项。

(2) 每一项的符号是：当行标排列均按标准排列后，对应的列标排列是偶排列时取正号，是奇排列时取负号。

这样，三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中符号$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$表示对列标的一切三级排列求和。

类似地，二阶行列式也具有上述特点，从而可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\ j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

根据这个规律，可把二阶、三阶行列式的概念进行推广。

定义 2 用 n^2 个数 $a_{ij}, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,n$，组成