高等数学习题课讲义

（生化类）

周建莹　李正元　编

北京大学出版社

高等数学习题课讲义

（生 化 类）

周建莹　李正元　编

北京大学出版社

内 容 提 要

全书共分三十四讲。内容包括一元微积分、多元微积分、级数和常微分方程等。本书总结了作者长期从事生化类高等数学习题课教学的经验，每讲精选了体现教学基本要求的典型习题和解法，对于初学者易犯的错误进行了分析。按教学大纲配备的课内、课外习题兼顾了基本概念与计算能力的训练，适当配置了若干较难的综合性习题，并对解题方法作了小结。它具有选择面宽、适应性强的特点。

本书可作为综合大学、师范院校生物、化学类各专业以及工、农、林、医相应各专业的大学生习题课用书，也可作为在职人员自学高等数学的学习用书和教师的教学参考书。

高等数学习题课讲义
(生 化 类)
周建莹　李正元　编
责任编辑：刘　勇
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　21.75　印张　530千字
1990年7月第一版　1990年7月第一次印刷
印数：0001—3,000册
ISBN 7-301-01108-3/O·0191
定价：9.15元

前　言

习题课是高等数学教学过程中的重要环节．上好习题课，能帮助学生更深入地理解大课的内容，培养学生利用所学的知识灵活地处理各种实际问题的能力．因而如何提高习题课的教学质量，是一个值得重视的问题．

我们编写这本习题课教材，力图将长期积累的习题课教学经验：每讲的基本要求，学生初学时的难点及易犯的错误，各种典型的解法，以及围绕基本要求的某些难题（书中用*号标出）等等，以教材的形式加以总结，使教师在上习题课时有一个较为固定的材料作参考，也便于学生上课及复习时使用．

这本教材，也可提供给电视大学的学员以及参加自学考试的人员在学习高等数学时使用．使他们在没有或缺乏辅导的条件下，在没法上习题课的条件下，能在这份教材的帮助下，掌握解题的基本方法．

由于我们缺乏编写习题课教材的经验，错误与不妥之处在所难免，希望广大师生与读者给予指正．

编　者

1988年10月于北京大学

目　录

第一章　函数、极限与连续性

第一讲　函数与极限概念

内　容　提　要

1．函数

(1) 函数概念

函数的定义　设在某一过程中有两个变量 x 与 y，若对变量 x 在其变化域 X 中的每一个值，依照某一对应关系，变量 y 都有唯一确定的一个值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)\quad (x\in X).$$

这时 x 称为自变量，y 称为因变量．自变量 x 的变化域 X 称为函数的定义域，而相应的因变量 y 的变化域 Y 称为函数的值域。

Y 是函数的值域的充要条件　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，则 Y 是 $f(x)$ 的值域的充要条件是：对 $\forall x\in X$，有 $f(x)\in Y$，且对 $\forall y\in Y$，至少 $\exists$ 一个 $x\in X$，使得 $f(x)=y$。

函数定义中的两个要素　定义域与对应规则是函数定义中的两个要素。值域是随定义域与对应规则而确定。两个函数仅当定义域相同且对应规则相同时，这两个函数才是相同的。若函数有分析表达式，使分析表达式有意义的自变量的取值范围就是函数的自然定义域。在具体问题中，自然定义域不一定就是定义域。

函数概念的实质　函数表示法(如分析表示法，图示法，列表法等)只是两个变量间函数关系的表现形式，变量之间是否存在函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量定了，另

一个量就被唯一确定．它不依赖于对应规则的表现形式．一个函数可以没有分析表达式，即使有分析表达式，在整个定义域上也不一定有统一的表达式。

(2) 函数的几种特性

① **有界性** 若$\exists$常数$M>0$，对$\forall x\in X$有$|f(x)|\leqslant M$，称$f(x)$在X上有界。几何意义是：$y=f(x)$的图形位于直线$y=M$与$y=-M$之间。

② **奇偶性** 设X关于原点对称(若$x\in X\Rightarrow -x\in X$)，若对$\forall x\in X$，有

$$f(x)=f(-x)\quad (f(x)=-f(-x)),$$

则称$f(x)$在X上是偶(奇)函数。

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

③ **单调性** 对$\forall x_1,x_2\in X$，若$x_1<x_2$时有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称$f(x)$在X上是单调上升的(单调下降的)。在X上单调上升与单调下降统称为在X上单调。单调上升(下降)也称为递增(递减)的。又若$x_1<x_2$时有$f(x_1)<(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在X上严格单调上升或严格递增(严格单调下降或严格递减)．

④ **周期性** 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上定义，若$\exists$常数$l>0$，对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$f(x+l)=f(x)$，称$f(x)$为周期函数，$l$为$f(x)$的周期。周期函数一定有无穷多个周期，若其中有一个最小的正数T，称T为周期函数的最小周期，简称周期。对于周期函数来说，自变量每增加或减少一个周期，函数图形重复出现。

(3) 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域包含函数$u=\varphi(x)$的值域，则在函数$u=\varphi(x)$的定义域X上可以确定一个函数$y=f(\varphi(x))$ $(x\in X)$，称为由$u=\varphi(x)$与$y=f(u)$复合而成的复合函数。u称为中间变量。中间变量u在函数$y=f(u)$中是自变量，而在函数$u=\varphi(x)$

中是因变量。

(4) 反函数

① 反函数的定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y。若对 $\forall y\in Y$，有唯一确定的 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$，由此对应关系在 Y 上确定了一个函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

② 函数与其反函数的关系　设 $y=f(x)$，定义域为 X，值域为 Y。若 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，则它的定义域为 Y，值域为 X，且有

$$f(f^{-1}(y))=y \quad (\forall y\in Y),$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad (\forall x\in X).$$

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重合，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

③ 反函数的存在性　$f(x)$ 在 X 上存在反函数 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$。

严格单调函数一定存在反函数，且反函数有相同的严格单调性。

(5) 基本初等函数

常数函数($y=c$)，幂函数($y=x^a$)，指数函数($y=a^x$)，对数函数($y=\log_a x$)，三角函数($y=\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x,\sec x,\csc x$)，反三角函数($y=\arcsin x$，$\arccos x$，$\operatorname{arc\,tg} x$，$\operatorname{arc\,ctg} x$，$\operatorname{arc\,sec} x$，$\operatorname{arc\,csc} x$)称为基本初等函数。

要熟悉这些函数的函数关系，定义域，函数图形和一些性质(包括有界性、奇偶性、单调性与周期性等)。

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而得到的函数称为初等函数。

2. 序列极限的概念

(1) 序列的定义

无穷多个按一定顺序排列好的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为序列或数列。其中每个数称为序列的一项，第 n 项 x_n 称为通项或一般项。序列简记为 $\{x_n\}$。

我们常以通项 x_n 代表序列。

(2) 序列极限的定义

给定序列 x_n 和常数 a，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称 n 趋于无穷时 x_n 以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n\to+\infty).$$

(3) 序列极限的几何意义

以 a 为中心，ε 为半径的区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 称为点 a 的 ε 邻域，记作 $U(a,\varepsilon)$。

当 $n\to+\infty$ 时 x_n 以 a 为极限的几何意义是：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，x_n 落入 a 点的 ε 邻域。

(4) 按定义证明序列的极限等式

按定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，常用两种方法：

① 直接解不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

得 $n>f(\varepsilon)$。

② 先放大

$$|x_n - a| \leqslant y_n, \quad y_n \text{ 简单},$$

然后解不等式

$$y_n < \varepsilon,$$

得 $n>f(\varepsilon)$。

我们用定义可证：

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1);$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \infty (|q|>1);$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a>1,\ k>0);$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a>0).$$

3. 函数极限的概念

(1) 函数极限的定义

x 趋于 a 时 $f(x)$ 以 A 为极限 给定函数 $f(x)$ 与常数 a, A。若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 x 趋于 a 时 $f(x)$ 以 A 为极限，或 $f(x)$ 在 a 点有极限 A。记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to a).$$

x 趋于无穷时 $f(x)$ 以 A 为极限 给定函数 $f(x)$ 与常数 A，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正数 X，当 $|x|>X$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于无穷时 $f(x)$ 以 A 为极限。记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A (x\to\infty).$$

单侧极限 给定函数 $f(x)$ 与常数 a, A，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<x-a<\delta(-\delta<x-a<0)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 在 a 点的右(左)极限。记作

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to a+0)$$

$(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to a-0))$。

无穷小量 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，则称 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 是无穷小量。

无穷大量 给定函数 $f(x)$ 与常数 a，若 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M,$$

则称当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是无穷大量。

总之，我们对以下24种情形

$f(x)$ \ x	a	$a+0$	$a-0$	$+\infty$	$-\infty$	∞
A						
$+\infty$						
$-\infty$						
∞						

能够给出精确的数学定义。例如，对应于 x 是 $a-0$，$f(x)$ 是 $-\infty$，即 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$：$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $-\delta<x-a<0$ 时有 $f(x)<-M$。

(2) 函数极限的几何意义

a 点的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 除去 a 点，称为 a 的空心 δ 邻域，记为 $U_0(a,\delta)$。

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的几何意义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists a$ 的空心邻域 $U_0(a,\delta)$，当 $x\in U_0(a,\delta)$ 时 $f(x)\in U(A,\varepsilon)$。或者说，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$，$x\neq a$ 时，相应的一段曲线 $y=f(x)$ 夹在直线 $y=A+\varepsilon$ 与

$y=A-\varepsilon$ 之间。

(3) 极限，无穷小量与无穷大量之间的关系

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $x\to a$ 时 $\alpha(x)$是无穷小量。

同一个极限过程中，若 u 是无穷小量，$u\neq0$，则$\frac{1}{u}$是无穷大量；若 u 是无穷大量，则$\frac{1}{u}$是无穷小量。

(4) 单侧极限与双侧极限的关系

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=A。$$

本讲习题课的要求是：

1. 复习函数概念与函数的若干特性。
2. 熟悉极限的定义及按定义证明简单的极限等式。

课 内 习 题

1. 设 $y=f(x)$的定义域为[0,2]，求下列函数的定义域：

(1) $y=f(x^2)$；

(2) $y=f(\operatorname{sgn}x)$，其中 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$

(3) $y=f(x+a)+f(x-a),a>0$；　(4) $y=f(\sin x)$。

解　若已知 $y=f(x)$的定义域为X，求复合函数 $y=f(\varphi(x))$的定义域即求 $u=\varphi(x)$ 的定义域中最大部分使得相应的值域等于或属于X。

(1) 使 $u=x^2$ 的值域为[0,2]时相应的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故 $y=f(x^2)$的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

(2) 仅当 $x\geqslant0$ 时 $u=\operatorname{sgn}x$ 的值域属于[0,2]，所以 $y=f(\operatorname{sgn}x)$的定义域为$[0,+\infty)$。

(3) $y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域为

$$\begin{cases} 0 \leqslant x+a \leqslant 2, \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 2. \end{cases}$$

当 $a \leqslant 1$ 时，定义域为 $a \leqslant x \leqslant 2-a$；当 $a>1$ 时，这个函数没有定义。

(4) 使 $u=\sin x$ 的值域属于 $[0,2]$ 相应的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。这就是 $f(\sin x)$ 的定义域。

2. 求复合函数：

(1) 设 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，求 $\varphi(\varphi(x))$，$\varphi(\psi(x))$，$\psi(\varphi(x))$，$\psi(\psi(x))$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1, \end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$；

(3) 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\arcsin x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$。

解

(1) $\varphi(\varphi(x))=(x^2)^2=x^4$，$\varphi(\psi(x))=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$，

$\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$，　　$\psi(\psi(x))=2^{2^x}$。

(2) 注意，当 $x>\mathrm{e}$ 时 $\ln x>1$，$0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时 $\ln x<-1$，$\mathrm{e}^{-1} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$ 时 $-1 \leqslant \ln x \leqslant 1$。于是

$$f(g(x))=f(\ln x)=\begin{cases} \ln^2 x, & |\ln x| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & |\ln x|>1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \ln^2 x & (\mathrm{e}^{-1} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}), \\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & (x>\mathrm{e} \text{ 或 } 0<x<\mathrm{e}^{-1}), \end{cases}$$

$$g(f(x))=\ln f(x)=\begin{cases} \ln x^2, & 0<|x| \leqslant 1, \\ -\ln x^2, & |x|>1. \end{cases}$$

(3) 注意反三角函数的主值。

$$\arcsin(\sin x)=x \quad \left(x \in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

当$-\frac{\pi}{2}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi$时，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x-k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。令$t=x-k\pi$，则

$$\arcsin(\sin(t+k\pi))=\arcsin((-1)^k\sin t)=(-1)^k\arcsin(\sin t)$$
$$=(-1)^k t=(-1)^k(x-k\pi),$$

即

$$\arcsin(\sin x)=(-1)^k(x-k\pi)\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right].$$

另一方面，

$$\sin(\arcsin x)=x\quad(x\in[-1,1]).$$

3．给出下列各表达式的定义：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$。

解　(1) 若$\forall M>0$，$\exists N$，当$n>N$时有$x_n<-M$，则称x_n为负无穷大量，记为$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$。

(2) 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称$x\to-\infty$时$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

(3) 若$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当$0<x-a<\delta$时，有$f(x)>M$，则称$x\to a+0$时$f(x)$为正无穷大量，记为$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$。

4．按定义证明下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-a)^k}=0$（$a$为常数，$k$为正常数）；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=\infty\quad(|q|>1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n^2-n}=4$。

解　(1) 当$n>a$时，$\forall\varepsilon>0$，解不等式

$$\frac{1}{(n-a)^k}<\varepsilon,$$

得

$$(n-a)^k>\frac{1}{\varepsilon},\quad n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/k}+a.$$

以$[x]$表示不超过x的最大整数，取$N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/k}+|a|\right]+1$，则$n>N$时有

$$\left|\frac{1}{(n-a)^k}\right|=\frac{1}{(n-a)^k}<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-a)^k}=0.$$

(2) $\forall M>1$，解不等式

$$|q^n|=|q|^n>M,$$

得

$$n\lg|q|>\lg M,\quad n>\frac{\lg M}{\lg|q|}.$$

取$N=[\lg M/\lg|q|]+1$，当$n>N$时

$$|q^n|>M.$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=+\infty.$$

(3) 先对$\frac{n!}{n^n}$放大，然后再解不等式。

因

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}<\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$，解不等式

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

得$n>\frac{1}{\varepsilon}$。取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时