高维小波分析

龙瑞麟 著

世界图书出版公司

高维小波分析

龙瑞麟

世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安
1995

内 容 简 介

本书是高维(非张量积形式)小波分析理论近几年新进展的反映，其中包括高维小波构造中所涉及到的矩阵扩充，尺度函数对 $\{\varphi(x), \tilde{\varphi}(x)\}$ 使得 $\{\varphi(x-k), \tilde{\varphi}(x-k)\}_k$ 双正交的刻划，双正交小波函数对 $\{\psi_\mu(x), \tilde{\psi}_\mu(x)\}_\mu$ 使 $\{\psi_{\mu,j,k}\}$, $\{\tilde{\psi}_{\mu,j,k}\}$ 具有稳定性的刻划，高维小波包的构造，高维周期小波的构造等．除此之外，本书还用了多于五分之一的篇幅介绍小波分析在函数空间刻划，数值分析以及数据处理等方面的应用．本书相当大部分的证明都经过简化处理，可读性很强．本书要求数学基础知识不多(主要需要分析数学中最基本部分)，适用于数学、物理、天文等方面的学生以及从事信号处理方面的工程技术人员．

高维小波分析

龙瑞麟

世界图书出版公司北京公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

邮政编码 100010

北京昌平百善印刷厂印刷

新华书店北京发行所发所　　各地新华书店销售

*

1995 年 5 月第一版　开本： 850×1168 1/32

1995 年 5 月第一次印刷　印张： 12

印数： 0001–2000 册　字数： 32 万字

ISBN: 7-5062-2599-9/O · 171

定价： 18 元

前 言

自 1807 年 J. Fourier 提倡用函数的 Fourier 级数展开研究热传导方程以来，近两百年来 Fourier 分析成了刻划函数空间、求解微分方程、进行数值计算与处理信号数据等的主要工具之一. Fourier 分析之所以能有如此作为，究其原因，从理论角度看主要在于许多常见运算在 Fourier 变换下性质变得很好 (例如微商运算变为多项式乘法，卷积变为普通乘积等); 从实际应用角度看是因为 Fourier 级数展开是每个周期振动都是具有简单频率的简谐振动的叠加这一物理现象的数学描述. 说得具体一些. 设 $f(x)$ 是一个 2π 周期的振动物理量 (x 通常代表时间). Fourier 分析说在某种收敛意义下，有

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\Big(=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\Big),$$

其中 $\{c_n\}$ 被称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，其定义如下

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

系数 c_n 正表示了 $f(x)$ 含简谐振动 e^{inx} 的分量有多少. 物理学中称集合 $\{n:c_n\neq 0\}$ 为 $f(x)$ 的谱点集，Fourier 分析也因之被称为频谱分析. 这一分析能清楚揭示出信号 $f(x)$ 的频率结构，因而频谱分析在信号分析中长期占据突出地位. Fourier 分析虽然有许多优点，然而也有不可忽视的缺点，这就是指数函数 e^{inx}(或它的实、虚部 $\cos nx,\sin nx$) 在整个时间域上是非零的，因而 Fourier 系数是 $f(x)$ 在整个时间域上的加权平均. 要想用它们来反映 $f(x)$ 的局部性质当然是不可能的. 可是局部性质的描述无论是理论方面，还是实际应用方面都是十分重要的，例如我们常常要知道 $f(x)$ 在某些给定点附近的光滑性质，要知道语音信号在何时具有何种频率的分量有多少. Fourier 分析在时间域上局部性的缺乏大大地限制了它的应用. 长期以来，数学家们与工程师们梦想对函数空间 $L^2(\mathbb{R})$ 能有一种基函数族，它能保持指数 (三角) 函数基的优点，又能弥补它的缺陷. 并且对这种基函数族的形式都有想象，它应该是由一个函数 $\psi(x)$ 经过两个简单的运算，即平移与伸缩，生成的函数族 $\{\psi_{j,k}(x)\}=\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)\},j,k\in\mathbb{Z}$, 其中 $\psi(x)$ 具有如下好性质：$\psi(x)$ 是光滑的 (高次可微), 局部的 (有紧支集，至少是无穷远处快速衰减), 也是振荡的，即具有充分多次的消失矩性质 (即 $\int_{-\infty}^{\infty}x^l\psi(x)dx=0,\ l\in\mathbb{Z}_+$).

由于 $\psi(x)$ 的图象形如小波，因而这样的基便称为小波基. 对它的存在性、构造与性质的研究便是小波分析.

小波分析及其应用是一门新学科. 它的诞生虽与本世纪前半叶的某些数学发展，例如 Haar 分析与 Littlewood-Paley 分析有关，但直接地，却只能追溯到七十年代. 那个时候，A. Calderón 表示定理的发现与对 Hardy 空间的原子分解与无条件基的大量研究为小波分析的诞生作了理论上的准备. 1982 年，J.O. Strömberg 并首先构造出了一个很接近现在称之为小波基的基 (它被称之为历史上第一个小波基)，但它没有引起人们的注意. 八十年代初许多搞信号分析的工程师们也为小波分析的诞生作出了积极的贡献，例如 J. Morlet 就在八十年代初最早使用了小波这一名称. 直到 1986 年 Y. Meyer 在怀疑上述意义下的小波基的存在性的同时偶然地构造出了现在称之为 Meyer 基的真正的小波基，以及随后不久 S. Mallat 与 Y. Meyer 建立了构造小波基的通用方法即多尺度分析以后，小波分析才形成为一门学科. 在其后至今不到十年的时间内小波分析及其应用得到了蓬勃的发展. 它涉及面之宽广、影响之深远、发展之迅速都是空前的. 它所取得的成就也令人瞩目. 它能对几乎所有的常见函数空间给出通过小波展开系数的简单刻划，也能用小波展开系数描述函数的局部光滑性质，特别是在信号分析中，由于它的局部分析性能优越，因而在数据压缩与边缘检测方面它比现有的手段更为有效. 美国耶鲁大学以 R. Coifman 教授为代表的小波研究组利用小波分析对美国联邦调查局存贮的三亿个指纹进行数据压缩，取得了二十倍原有效益的成果. 单单因为节省存贮光盘而获得的效益便是三千万美元之巨，而由于指纹传输时间缩短为原来的二十分之一所创造的价值更是无法估量.

现在小波分析的发展方兴未艾，投身于小波分析的应用的人员也越来越多. 姑且不说从事小波分析理论研究的人应该对小波分析有更多的了解，即使对搞小波分析应用的人来说，他们也不应该只“知其然”，而且也应该“知其所以然”；不应该满足于依样画葫芦，而应该会创造性地应用小波. 因而社会对小波书藉的需求是很大的. 现在已经有了几本很不错的小波专著：例如 Y. Meyer 的“小波与算子”(1990), I. Daubechies 的“小波十讲”(1992) 与“小波的方方面面”(1993), 以及 C. Chui 的“小波引论”(1992). Meyer 的书是小波分析的第一本也是最重要之一的小波专著，它讲了小波分析在数学理论方面的许多应用，且观点精辟，然而却比较高深，似乎不宜作小波分析的普及教本. Daubechies 的“小波十讲”是根据她 1990 年在第三次国际小波大会上为众多来自数学与非数学方向的小波热心听众所作的十次讲演整理而成的小波专著，它讲得很详细，既有数学理论又有算法与具体数据，因而这是一本深受数学工作者与工程技术人员欢迎的小波专著. 略嫌不足的是，该书几乎没有涉及高维，并且它的处理大多数都不能平行移殖到高维. Chui 的书也是一本受欢迎的小波专著，它讲样条小波很有特色. 然而略嫌不足的是它不够全面. Daubechies 的第二本书是她主编的一本文集，它收录

了 1993 年初由美国数学会举办的短期训练班上的八篇由小波分析各方面专家提供的普及讲演．这些讲演都深入浅出，然而作为一个整体似嫌不够系统与连贯．有鉴于此，我们认为至少还应该有一本高维版本的类似于 Daubechies 的“小波十讲”那样的小波专著．本书便是试图填补这一缺陷的引玉之砖．

诚然，高维小波分析还远远不如一维小波分析那样成熟，例如 (非张量积) 高维紧支集小波基的构造尚没有有效的通用方法，应用方面也还只停留在使用张量积高维小波的阶段．但时至今日高维小波理论也已积累了相当的素材，用它们写成一本比较系统、比较完整的专著已成为可能．

“高维小波分析”一书是一本应用数学理论书藉，但同时它对小波的应用也给予了足够的关注．它并不需要太多的基础数学知识，仅仅实分析、调和分析、泛函分析与线性代数的基本内容应假定为已知，为了读者的方便我们已将它们收录在第一章．第二、三章贡献于高维小波的构造与性质研究，这部分包括了一维小波的构造与性质中除了紧支集小波的构造以外的其他主要结果的高维变形．第四章贡献于窗口 Fourier 分析、局部余 (正) 弦分析、周期小波分析与小波包分析的讨论．本书第五章用了全书五分之一以上的篇幅讲小波分析的应用，其中包括在函数空间刻划、数值计算等方面的应用．本章虽然没有讲小波分析在数据处理方面的具体应用，但这类应用的准备工作，例如高维张量积与非张量积形式的数据的分解与重构算法，以及最好基的挑选算法等都在本章作了比较详细的介绍．那些从事这方面应用的读者完全可以从本书找到他们所需要的东西．

本书力图用尽可能简洁的表达方式反映高维小波分析领域重要的与新近的成果，因而本书的取材与处理都花费了很多精力．本书中的许多内容是尚未见诸专著的，例如 Jia-Micchelli ([JM1]), Jia-Shen ([JS]) 关于高维小波基构造的工作，Long-Chen ([LoC]) 关于高维双正交小波基的构造与性质的工作， Long-Chen (Wen)([LoCw]) 关于高维小波包的工作．此外，本书的主要内容虽然是高维的，但处理却不因是高维而复杂 (除了记号复杂以外)，有些甚至比一维时原来的处理还简单．因此即使对只关心一维小波的读者来说，本书也是值得一读的．

由于作者能力与兴趣的局限，本书的内容自然难免挂一漏万，谬误之处也在所难免．作者诚挚欢迎来自小波分析同仁的批评与帮助．作者在与中国科学院数学所小波组同事的讨论中受益非浅，作者对他们的帮助，对他们提供的研究成果表示感谢．中山大学邓东皋教授也在写一本小波分析的教材，作者有幸目睹了该教材手稿的部分内容，作者对此表示深深的谢意．最后作者对编辑王炜在本书加工过程中给予的帮助，王婷在打印全书中付出的辛勤劳动，均致以由衷的感谢．

作者　1995.3.　北京

目 录

第一章　准备知识

小波分析基本上可以说是一门应用数学学科，它并不需要太多、太深的数学基础知识便可入门．但是因为小波分析来自于调和分析，因而调和分析的某些基础知识应该被假定已知．好在这些基础知识在任何一本有关调和分析的教科书中都是容易找到的，因而我们只是引用便可．为了读者查阅方便，我们在 §1.1 将这些事实罗列出来．另外，小波分析还要用到线性代数、矩阵论与泛函分析中的某些技巧与基本事实．对前者我们只是引用，而对后者因为涉及到一些不太为人熟知的某些事实 (例如关于 Hilbert 空间中的 Riesz 基与框架), 我们专用一节 (§1.2) 予以简单介绍．§1.3 将对 Calderón-Zygmund 算子理论中三个最基本的有界性事实作介绍，这是为将小波分析应用于函数空间理论而作的准备，那些只关心将小波分析应用于数据处理之类的实际问题的读者暂时可撇开这一节．

1.1. 经典 Fourier 分析中的某些基本事实

经典 Fourier 分析是指 $\mathbb{R}^d$ 与 $\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ 上的 Fourier 分析．(注意 $\mathbb{T}^d$ 等同于基本域 $[-\pi,\pi]^d$ 或 $[0,2\pi]^d$, 因而 $\mathbb{T}^d$ 上函数便是 $\mathbb{R}^d$ 上以 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 为周期的函数．) 下述 Fourier 分析中的基本事实可在任何有关专著中找到，一个简明的参考文献是《实分析》 ([CDL]) 第二章．

设 $f(x)$ 是 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 或 $L^1(\mathbb{T}^d)$ 中函数，其 Fourier 变换与 Fourier 系数分别定义为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{ix\cdot\xi}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^d, \tag{1.1.1}$$

$$\hat{f}(n)=\int_{\mathbb{T}^d} f(x)e^{-in\cdot x}dx,\quad n\in\mathbb{Z}^d, \tag{1.1.2}$$

其中 $x\cdot\xi$ 表示欧氏内积．此时我们也说 $f(x)$ 有如下 Fourier(积分或级数)

展开

$$f(x) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi, \quad f(x) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \sum_n \hat{f}(n) e^{in\cdot x}.$$

命题 1.1.1. 当 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$. 此外在 $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$ 两情形分别有 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, $\lim\limits_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$, 只要 $f \in L^1$.

注. 这称为 Riemann-Lebesgue 引理.

在 $\mathbb{T}^d$ 情形, $L^1(\mathbb{T}^d)$ 是足够大的函数类. 在 $\mathbb{R}^d$ 情形需要扩大 Fourier 变换的定义域至 $\bigcup\limits_{1\le p\le 2} L^p(\mathbb{R}^d)$. 这由 $p=2$ 时的 Plancherel 定理 ($\mathbb{R}^d$ 情形), Parseval 等式 ($\mathbb{T}^d$ 情形), 以及 $1<p<2$ 时的 Hausdorff-Young 定理保证.

命题 1.1.2. 设 $1 \le p \le 2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (或 $L^p(\mathbb{T}^d)$, 下面只对 $\mathbb{R}^d$ 叙述). 则对任何序列 $\{f_n\} \subset L^1 \bigcap L^p$, $f_n \to f$ 在 L^p 中, 总有 $\hat{f}_n$ 在 $L^{p'}$ 中收敛于某极限, 记为 $\hat{f}$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 且有不等式

$$\|\hat{f}\|_{p'} \le C\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p. \tag{1.1.3}$$

当 $p=2$ 时有等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in L^2, \tag{1.1.4}$$

它还可写成如下形式

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g} dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\bar{\hat{g}} d\xi, \quad \forall f, g \in L^2, \tag{1.1.5}$$

以及如下形式

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g dx, \quad \forall f, g \in L^2. \tag{1.1.6}$$

命题 1.1.3. 在 $\mathbb{R}^d(\mathbb{T}^d)$ 情形, 如下 Fourier 逆转公式成立

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi, \quad \forall f \in L^2. \tag{1.1.7}$$

这个事实可以记为 $f = (\hat{f})^\vee$, $\forall f \in L^2$, $\vee$ 称为 Fourier 逆变换.

命题 1.1.4. 设 $1 \le p \le 2$, $f \in L^1$, $g \in L^p$, 则在 $\mathbb{R}^d(\mathbb{T}^d)$ 情形，卷积算子 $*$ 满足

$$\|f * g(x)\|_p = \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \right\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p, \tag{1.1.8}$$

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \tag{1.1.9}$$

现在引进小波分析中一个很有用的概念.

定义 1.1.5. 设 $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 定义方括号积为

$$[\hat{f}, \hat{g}](\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\xi + 2\pi\alpha)\overline{\hat{g}}(\xi + 2\pi\alpha). \tag{1.1.10}$$

命题 1.1.6. 对 $\hat{f}, \hat{g} \in L^2$, 定义方括号积的级数 a.e. 绝对收敛，它定义了 $L^1(\mathbb{T}^d)$ 中函数，其 Fourier(逆) 系数为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x-k)dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{T}^d} [\hat{f}, \hat{g}] e^{ik\cdot\xi} d\xi. \tag{1.1.11}$$

证明. 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha} |\hat{f}(\xi + 2\pi\alpha)| \, |\hat{g}(\xi + 2\pi\alpha)| d\xi \\
&\le \int_{\mathbb{T}^d} \Big(\sum_{\alpha} |\hat{f}(\xi + 2\pi\alpha)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\alpha} |\hat{g}(\xi + 2\pi\alpha)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha} |\hat{f}(\xi + 2\pi\alpha)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha} |\hat{g}(\xi + 2\pi\alpha)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= (2\pi)^d \|f\|_2 \|g\|_2.
\end{aligned}$$

这证明了前两个断言. 最后一个断言是因

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x-k)dx &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi) e^{ik\cdot\xi} d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{T}^d + 2\pi\alpha} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi) e^{ik\cdot\xi} d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha} \hat{f}(\xi + 2\pi\alpha)\overline{\hat{g}}(\xi + 2\pi\alpha) e^{ik\cdot\xi} d\xi.
\end{aligned}$$

命题证毕.

注. 式 (1.1.11) 说明 f 的整平移线性生成的闭子空间与 g 的整平移线性生成的闭子空间正交当且仅当 $[\hat{f},\hat{g}]=0$, 以及

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x-k)dx=\delta_{0,k} \Longleftrightarrow [\hat{f},\hat{g}](\xi)=1, \text{ a.e. } \xi. \tag{1.1.12}$$

函数族 $\{f_k\}$ 与 $\{g_k\}$ 称为双正交的 (也说, $\{f_k,g_k\}$ 是一个双正交族), 如果

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k\overline{g}_l dx=\delta_{k,l}, \quad \forall k,l. \tag{1.1.13}$$

式 (1.1.12) 左边就是 $\{f(x-k)\}_k$ 与 $\{g(x-k)\}_k$ 双正交的意思.

Fourier 变换与求微商运算之间的关系也是小波分析中要用到的一个重要事实. 我们有

命题 1.1.7. 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 是多重指标 (其中 α_j 都是非负整数). 记

$$D^\alpha=\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha|=\sum_{j=1}^d \alpha_j. \tag{1.1.14}$$

设 $P(x)$ 是任一代数多项式, $P(D)$ 是对应的微分多项式, 即以 D^α 代替 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$. 则在广义函数意义下有

$$\begin{aligned} P(D)\hat{f}(\xi)&=(P(-ix)f)^\wedge(\xi),\\ P(i\xi)\hat{f}(\xi)&=(P(D)f)^\wedge(\xi). \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

当 f 性质充分好时等式在经典意义下也成立.

注. 这特别说明当 f 局部可积且在无穷远处按 $|x|$ 的任意负方幂衰减时, $\hat{f}$ 是无穷次可微的; 当 f 任意次可微, 且它的任意次导数可积时, 则 $\hat{f}$ 连续且在无穷远处按 $|\xi|$ 的任意负方幂衰减. 特别地, 由此可知具有紧支集的可积函数的 Fourier 变换是无穷次可微的. 有如下更精确一些的结果 (Paley-Wiener 定理平凡的一半).

命题 1.1.8. 设 $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\hat{f}\subset\{\xi:|\xi|\le B\}$. 则 $\hat{f}$ 的 Fourier 逆变换 $f(x)$ 是 d 个复变量 $(z_1,\cdots,z_d)$ 的如下意义下的指数型 B 的全纯函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的局限,

$$|f(z)|\le Ce^{B|I_m z|}, \quad \forall z=(z_1,\cdots,z_d). \tag{1.1.16}$$

反之，设 $f(x)$ 是满足如下性质的 d 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_d)$ 的全纯函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的局限：存在常数 C,N,B 使

$$|f(z)|\le C(1+|z|)^N e^{B|I_m z|},\quad \forall z\in\mathbb{C}^d. \tag{1.1.17}$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 是有紧支集 (支于 $\{\xi:|\xi|\le B\}$) 的广义函数.

前半的证明是平凡的，后半见 Yosida ([Y], Ch.VI,§4).

注. 设 $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是满足 (1.1.17) 的 $f(z)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的局限，则 $\hat{f}(\xi)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中有紧支集含于 $\{\xi:|\xi|\le B\}$ 的函数. 此外，当式 (1.1.17) 中 $e^{B|I_m z|}$ 改为 $\prod\limits_{j=1}^{d} e^{B_j|I_m z_j|}$ 时，则 $\hat{f}(\xi)$ 的支集含于长方形 $\prod_1^d[-B_j,B_j]$.

还有如下类似结果. 记 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 为 Schwartz 函数类，即所有满足如下性质的函数的全体

$$x^\beta\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x)=O(1),\ 当|x|\to\infty 时,\quad \forall 多重指标\alpha,\beta.$$

$\mathcal{S}$ 可用距离函数族

$$\rho_{\alpha,\beta}(f)=\sup_x\left|x^\beta\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f(x)\right| \tag{1.1.18}$$

被定义为一个完备距离空间，称为 Schwartz 检验函数空间. $\mathcal{S}$ 上所有连续线性泛函的全体 $\mathcal{S}'$ 称为缓增广义函数空间. 我们在其上赋以弱 $*$ 拓扑，即 $\{l_n\}\subset\mathcal{S}'$ 称为收敛于 $l\in\mathcal{S}'$，如果

$$l_n(\varphi)\to l(\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}. \tag{1.1.19}$$

命题 1.1.9. Fourier 变换 $\wedge$, Fourier 逆变换 $\vee$ 分别是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 上的，$\mathcal{S}'$ 到 $\mathcal{S}'$ 上的拓扑同构. 这里 Fourier 变换在 $\mathcal{S}'$ 上的定义是：对 $l\in\mathcal{S}'$，定义

$$\hat{l}(\varphi)=l(\hat{\varphi}),\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}. \tag{1.1.20}$$

小波分析还与如下滤波与取样理论密切有关. 我们介绍 Shannon 取样定理.

命题 1.1.10. 设 $\delta, T > 0$, $f(x)$ 是一个能量有限且有限频谱的信号, 即设 $f \in L^2$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-T, T]^d$ (supp 表示支集). 则当 $\delta > \frac{\pi}{T}$ 时, f 在格点集 $\{k\delta\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 上的取样 $\{f(k\delta)\}_k$ 不能决定 $f(x)$. 当 $\delta < \frac{\pi}{T}$ 时, 对任取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset [-\pi\delta^{-1}, \pi\delta^{-1}]^d, \quad \hat{\varphi}|_{[-T,T]^d} = 1, \tag{1.1.21}$$

对 $1 \le p \le \infty$, 总有

$$f(k\delta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi}(x - k\delta)dx, \ \forall k, \text{ 且 } \|\{f(k\delta)\}\|_p \le C_{\delta,p}\|f\|_p, \tag{1.1.22}$$

$$f(x) = \delta^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k\delta)\varphi(x - k\delta), \text{ 且 } \|f\|_p \le C_{\delta,p}\|\{f(k\delta)\}\|_p. \tag{1.1.23}$$

其中 (1.1.22) 中积分绝对收敛, (1.1.23) 中级数绝对收敛与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中收敛, 以及当 $\{f(k\delta)\} \in l^p$ 时, 也在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中收敛.

证明. $\delta > \pi/T$ 时, 举一个一维的例子. 设 $\hat{\theta}(\xi)$ 是无穷次可微的, 支于 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上的函数, 其中

$$\pi\delta^{-1} + \varepsilon \le T, \quad \varepsilon \le \pi\delta^{-1}.$$

令 $\hat{f}(\xi) = \hat{\theta}(\xi - \pi\delta^{-1}) - \hat{\theta}(\xi + \pi\delta^{-1})$. 则

$$f(x) = (e^{-i\pi\delta^{-1}x} - e^{i\pi\delta^{-1}x})\theta(x) = -2i\sin(\pi\delta^{-1}x)\theta(x).$$

它满足

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\pi\delta^{-1} - \varepsilon, \pi\delta^{-1} + \varepsilon] \subset [-T, T], \quad f(k\delta) = 0, \quad \forall k.$$

它证明了对任意满足 $\operatorname{supp} \hat{g}(\xi) \subset [-T, T]$ 的信号 g, g 与 $f + g$ 有相同的取样 $\{g(k\delta)\}_k$.

现考虑 $\delta < \pi/T$ 情形. 取 φ 满足 (1.1.21). 设信号 $f(x)$ 为已知. 注意有 $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}}(\xi), \forall\xi$. 故类似于 (1.1.9) 有

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{\varphi}(y - x)dy.$$

既然两边都是 x 的连续函数，这给出了 $\{f(k\delta)\}_k$ 的表示. 既然 $\sum_k |\varphi(x-k\delta)| \in L^{\infty}$, 故由

$$|f(k\delta)|^p \le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p |\varphi(x-k\delta)| dx\Big) \|\varphi\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

即可完成 (1.1.22) 的证明.

现证 (1.1.23). 待定 $\hat{f} \in L^2$, $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-T,T]^d$. 由 (1.1.7) 得

$$\begin{aligned} f(k\delta) &= \big(\frac{1}{2\pi}\big)^d \int_{[-T,T]^d} \hat{f}(\xi) e^{ik\delta\cdot\xi} d\xi \\ &= \big(\frac{1}{2\pi}\big)^d \delta^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}\big(\frac{\xi}{\delta}\big) e^{ik\cdot\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

这里我们已经把 $\hat{f}$ 看成 $\delta^{-1}2\pi\mathbb{Z}^d$- 周期的 L^2 中的函数. 这样 $\{f(k\delta)\}_k \in l^2$, 且由逆转公式得

$$\delta^{-d}\hat{f}\big(\frac{\xi}{\delta}\big) = \sum_k f(k\delta) e^{-ik\cdot\xi}, \quad \hat{f}(\xi) = \delta^d \sum_k f(k\delta) e^{-ik\cdot\delta\xi}. \tag{1.1.25}$$

这里级数是 $L^2([-\pi\delta^{-1}, \pi\delta^{-1}]^d)$ 中收敛的，即对 $\mathbb{Z}^d$ 的任意有限子集的增加列 $\{\triangle_j\}$ ($\bigcup_j \triangle_j = \mathbb{Z}^d$), 在 L^2 中有

$$\begin{aligned} m_{\triangle_j}(\xi) &= \delta^d \sum_{k\in\triangle_j} f(k\delta) e^{-ik\cdot\delta\xi} \longrightarrow \\ m(\xi) &= \delta^d \sum_k f(k\delta) e^{-ik\cdot\delta\xi}. \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

由 (1.1.25), 以及 $\hat{\varphi}$ 在 $\operatorname{supp}\hat{f}$ 上为 1, 得

$$\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \text{a.e. } \xi. \tag{1.1.27}$$

考虑 (1.1.23) 右边级数的有限部分和 $f_\triangle$, (略去 $\triangle_j$ 中的下标 j), 求其 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \hat{f}_\triangle(\xi) &= \delta^d \sum_{k\in\triangle} f(k\delta) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-k\delta) e^{-i(x-k\delta+k\delta)\cdot\xi} dx \\ &= \delta^d \sum_{k\in\triangle} f(k\delta) e^{-ik\cdot\delta\xi} \hat{\varphi}(\xi) = m_\triangle(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_\triangle(\xi)|^2 d\xi &= \sum_\alpha \int_{\delta^{-1}(\mathbb{T}^d + 2\pi\alpha)} |m_\triangle(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\delta^{-1}\mathbb{T}^d} |m_\triangle(\xi)|^2 \sum_\alpha |\hat{\varphi}(\xi + \delta^{-1}2\pi\alpha)|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

这里用到 $m_\triangle(\xi)$ 的 $\delta^{-1}2\pi\mathbb{Z}^d$- 周期性. 注意 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset[-\pi\delta^{-1},\ \pi\delta^{-1}]^d$, 故对所有 ξ, (1.1.29) 中级数各项对不同 α 不叠加, 这样

$$\sum_\alpha|\hat{\varphi}(\xi+\delta^{-1}2\pi\alpha)|^2\in L^\infty.$$

再注意 $m_\triangle(\xi)$ 在 $L^2([-\pi\delta^{-1},\pi\delta^{-1}]^d)$ 中收敛于 $m(\xi)$, 这推出 $\hat{f}_\triangle$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中收敛于 $\hat{f}$, 从而 $f_\triangle$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中收敛于 f. 此外, 对任意 x, 由 φ 的快速下降以及 $\{f(k\delta)\}\in l^2$, 知 $\{f(k\delta)\varphi(x-k\delta)\}_k\in l^1$, 故 (1.1.23) 中级数也绝对收敛. 最后由 (记 p' 为 p 的相伴数)

$$|f(x)|^p\leq\Big(\sum_k|\varphi(x-k\delta)|\Big)^{\frac{p}{p'}}\delta^p\sum_k|f(k\delta)|^p|\varphi(x-k\delta)|,$$

这便得到 (1.1.23) 中的不等式. 故当 $\{f(k\delta)\}_k\in l^p$ 时, (1.1.23) 中级数也在 L^p 中收敛于 f. 命题获证.

Shannon 取样定理通常指 $\delta=\pi/T$ 时的下述命题.

命题 1.1.11. 记 $\delta, T>0$, $\delta T=\pi$. 设 $1<p\leq 2$, $f\in L^p\bigcap\varepsilon_T$, 意即 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\hat{f}\subset[-T,T]^d$. 则

$$f(k\delta)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\prod_{j=1}^d\frac{\sin\pi\delta^{-1}(x_j-k_j\delta)}{\pi(x_j-k_j\delta)}dx,\quad \|\{f(k\delta)\}\|_p\leq C_{\delta,p}\|f\|_p. \tag{1.1.30}$$

设 $1<p\leq 2$, $\{c_k\}\in l^p(\subset l^2)$. 则存在 $f\in L^p\bigcap\varepsilon_T$, 使 $f(k\delta)=c_k$, 且

$$f(x)=\sum_k f(k\delta)\prod_{j=1}^d\frac{\sin\pi\delta^{-1}(x_j-k_j\delta)}{\pi\delta^{-1}(x_j-k_j\delta)},\quad \|f\|_p\leq C_{\delta,p}\|\{c_k\}\|_p. \tag{1.1.31}$$

证明. 设 $f(x)\in L^p\bigcap\varepsilon_T$, $1\leq p\leq\infty$. 不管 δ, T 的关系, 总存在 $\varphi\in\mathcal{S}$ 使 $\hat{\varphi}|_{[-T,T]^d}=1$, 因而

$$f(k\delta)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\overline{\varphi}(y-k\delta)dy,\quad \|\{f(k\delta)\}\|_p\leq C_{\delta,p}\|f\|_p. \tag{1.1.32}$$

这证明了 (1.1.30) 中的不等式. 等式的证明待补.

设 $1 < p \le 2$, $\{c_k\} \in l^p$. 定义

$$\hat{f}(\xi) = \delta^d \chi_{[-T,T]^d}(\xi) \sum_k c_k e^{-ik\cdot\delta\xi}, \tag{1.1.33}$$

这里级数在 $L^2([-T,T]^d)$ 中收敛. 注意到

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d &\int_{\mathbb{R}^d} \delta^d \chi_{[-T,T]^d}(\xi) e^{-ik\delta\cdot\xi} e^{ix\cdot\xi} d\xi \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)}{\pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)},\end{aligned} \tag{1.1.34}$$

这里 χ_E 表示集合 E 的特征函数，在 (1.1.33) 两边求 Fourier 逆变换说明在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 收敛意义下有

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_k c_k \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)}{\pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)} \\ &= \sum_k \delta^{\frac{d}{2}} c_k \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)}{\pi\delta^{-\frac{1}{2}}(x_j - k_j\delta)}.\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

再注意 $\{\delta^{\frac{d}{2}}\chi_{[-T,T]^d}(\xi)e^{-ik\cdot\delta\xi}\}_k$ 是 $L^2([-T,T]^d)$ 的标准正交基，Plancherel 定理与 (1.1.34) 说明 (用省略记号)

$$\frac{\sin \pi\delta^{-1}(x - k\delta)}{\pi\delta^{-\frac{1}{2}}(x - k\delta)} = \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)}{\pi\delta^{-\frac{1}{2}}(x_j - k_j\delta)}$$

是 $L^2 \bigcap \varepsilon_T$ 的标准正交基. 这样由 (1.1.35) 得到

$$\begin{aligned}\delta^{\frac{d}{2}} c_k &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi\delta^{-1}(x_j - k_j\delta)}{\pi\delta^{-\frac{1}{2}}(x_j - k_j\delta)} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\delta^{\frac{d}{2}}\chi_{[-T,T]^d}(\xi)e^{ik\delta\cdot\xi}d\xi = \delta^{\frac{d}{2}} f(k\delta).\end{aligned} \tag{1.1.36}$$

式 (1.1.36) 说明 $f(k\delta) = c_k$, 并同时给出了 (1.1.30) 与 (1.1.31) 中的两个等式. 现还剩下 (1.1.31) 中的不等式.