高等学校试用教材

数学分析

（卷 II）

秦曾复　朱学炎　编

高等教育出版社

内容提要

本书为综合大学力学专业的数学基础课教材，分三卷出版.

卷 II 内容包括：微分的理论与应用，积分的应用与计算，函数项级数，傅里叶级数，欧几里得空间等共 5 章.

本书与数学系的数学分析相比较，在原则上不降低数学要求的同时，增加了数学的基本概念与物理原型之间的联系以及侧重于数学在实际中的应用并适当地扩大知识面。

本书也可供物理类各专业，应用数学专业及理工科数学类各专业作为教材使用.

(京)112号

高等学校试用教材

数学分析

秦曾复 朱学炎 编

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张9.875 字数 230 000

1991 年9月第1版 1991 年9月第1次印刷

印数0001— 1 082

ISBN 7-04-003415-8/O·1040

定价3.60元

卷Ⅱ目录

卷 III 预 告

第 7 章　微分的理论与应用

通过第 4 章“导数与微分”，我们已经知道了导数与微分的概念，学会了计算导数与微分，包括隐函数和以参数形式表示的函数的导数与微分，以及高阶导数和高阶微分．这一章要在前面的基础上讲解导数与微分更进一步的理论，并运用这些理论来讨论函数的若干性质．

§1　微分中值定理

费马*定理　如果（1）函数 f 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\delta)$ 内 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或者 $f(x)\geqslant f(x_0)$），(2) f 在 x_0 可微，那末必有

$$f'(x_0)=0.$$

证明　由于在 $O(x_0,\delta)$ 内 $f(x)\leqslant f(x_0)$，

因此

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{当 } x<x_0 \text{ 时}\\ \leqslant 0 & \text{当 } x>x_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

这样，单侧导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

以及

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0,$$

因为 f 在 x_0 可微，所以

$$0\leqslant f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)\leqslant 0$$

* 费马(Pierre de Fermat，1601—1665)，法国数学家．

即 $f'(x_0)=0$，对于在 $O(x_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 的情况亦然. 证毕.

注　函数 f 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\delta)$ 内满足

$$f(x)\leqslant f(x_0),$$

就称 x_0 为函数 f 的局部极大值点；要是成立

$$f(x)\geqslant f(x_0),$$

则称 x_0 为函数 f 的局部极小值点，两者统称为极值点. 值得注意的是极值的局部性，譬如上海地区有一座小山叫佘山，上海天文台就建造在这上面，可算是局部极高处了，但是它比起西藏地区的那些峡谷或者湖底，要低得多，虽然这些峡谷或湖底确实是局部极低处.

费马定理的几何意义：在极值点，如果曲线有切线的话，一定是水平切线(图 7-1).

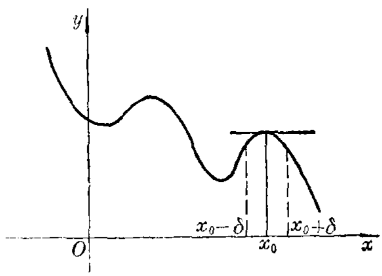

图　7-1

费马定理也可表述成：在函数 f 可微的前提下，x_0 为极值点的必要条件是 $f'(x_0)=0$，但 $f'(x_0)=0$ 不是 x_0 为极值点的充分条件，请读者自己举出反例.

罗尔*定理　如果(1)函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，(2) f 在 (a,b) 内可微，那末至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=0.$$

证明　作为平凡的情况，如果

$$f(x)\equiv\text{const.},\ x\in[a,b],$$

那显然

$$f'(x)\equiv0,\quad x\in(a,b).$$

* 罗尔(Michel Rolle, 1652—1719)，法国数学家.

在不是常函数的情况下，连续函数 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 与最小值 m 并且 $M>m$，这表明，M 与 m 中至少有一个在数值上不等于 $f(a)$ 与 $f(b)$，不失一般性，设 $M>f(a)=f(b)$，于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)=M.$$

此即

$$f(x)\leqslant f(\xi),\quad x\in[a,b],$$

由于 f 在 ξ 可微，应用费马定理得

$$f'(\xi)=0.\quad \text{证毕.}$$

罗尔定理的几何意义：在等高线所割的光滑曲线段上，至少有一条水平切线(图 7-2).

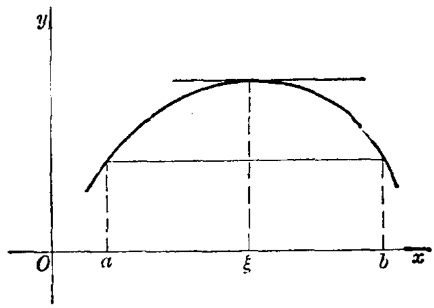

图 7-2

例 1　应用罗尔定理讨论勒让德*多项式的根.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

显然是一个 n 次多项式，微分符号前面的系数是为了使 $P_n(1)=1$. 这样的多项式称为勒让德多项式(图 7-3)，其中

$$P_0(x)\equiv 1,$$

* 勒让德(Adrien Marie Legendre, 1752—1833)，法国数学家.

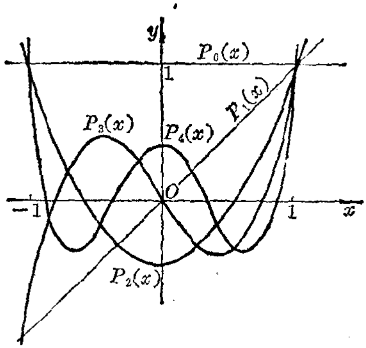

图 7-3

$$P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

等等.

现在证明，n 次勒让德多项式有 n 个相异实根，它们全部在 $(-1,1)$ 内. 首先，多项式 $(x^2-1)^n$ 有根 -1 和 1，应用罗尔定理. $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$ 有一个根 $\xi_{11}\in(-1,1)$. 然后，考察多项式 $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$，它有根 $-1,\xi_{11},1$，应用罗尔定理，可知 $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ 有根 $\xi_{21}\in(-1,\xi_{11})$ 和根 $\xi_{22}\in(\xi_{11},1)$. 以此类推，$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$ 有根 $-1<\xi_{n-1,1}<\xi_{n-1,2}<\cdots\cdots<\xi_{n-1,n-1}<1$. 再次应用罗尔定理得出 $P_n(x)$ 的根 $\xi_{n,1}\in(-1,\xi_{n-1,1})$，$\xi_{n,i}\in(\xi_{n-1,i-1},\ \xi_{n-1,i})$，$i=2,3,\cdots,n-1$，$\xi_{n,n}\in$

$(\xi_{n-1,n-1},1)$，即在$(-1,1)$内有n个相异实根.

拉格朗日*定理 如果(1)函数f在$[a,b]$上连续，(2)f在(a,b)内可微，那末，至少存在一点$\xi\in(a,b)$使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 作辅助函数

$$\varphi(x)=\{f(x)-f(a)\}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

不难验证：(1)φ在$[a,b]$上连续，且$\varphi(a)=\varphi(b)=0$；(2)φ在(a,b)内可微. 于是，应用罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(a,b)$使

$$\varphi'(\xi)=0,$$

此即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad 证毕.$$

注 这是微分理论中最重要的一个定理，有的书上叫做拉格朗日公式：

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1) \quad 0<\theta<1.$$

有时就直接称它为微分中值定理.

拉格朗日定理的几何意义：用任何直线去割曲线，在所割的光滑曲线段上，至少有一点的切线斜率等于该割线的斜率(图 7-4).

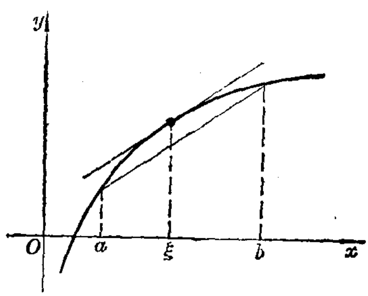

图 7-4

* 拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736—1813)，法国数学家和力学家.

拉格朗日定理与罗尔定理的关系：显然，罗尔定理是拉格朗日定理的一种特殊情况(水平割线)；另一方面，罗尔定理作为拉格朗日定理的一个引理，使得证明思路十分清晰．在拉格朗日定理的证明中所作的辅助函数，相当于在几何上将任何斜的割线变成水平割线．这样，就由特殊上升到一般，从罗尔定理达到拉格朗日定理．

拉格朗日定理的三个简单推论．

推论 1　如果在(a,b)内$f'(x)\equiv 0$，那末$f(x)\equiv\text{const.}$．

证明　对于任意一点$x\in(a,b)$，应用拉格朗日定理有

$$f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=0,$$

其中的ξ介于x与$\frac{a+b}{2}$之间，当然$\xi\in(a,b)$，由此得出

$$f(x)\equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

此即　$f(x)\equiv\text{const.}$，$x\in(a,b)$．证毕．

联系到常函数的导数恒为零，在(a,b)内就有

$$f'(x)\equiv 0\Longleftrightarrow f(x)\equiv\text{const.}$$

推论 2　如果函数f和g在(a,b)内满足

$$f'(x)=g'(x),$$

那末必有

$$f(x)=g(x)+\text{const.}$$

证明　作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-g(x),\quad x\in(a,b).$$

显然，在(a,b)内$\varphi'(x)=0$，于是应用推论 1，得

$$\varphi(x)\equiv\text{const.}$$

此即

$$f(x)=g(x)+\text{const.}\quad\text{证毕.}$$

注　这就是不定积分作为原函数族，其中出现任意常数c的

根据：同一个函数的任何两个原函数，彼此之间仅差一个常数 c. 因此，一个函数的原函数全体必可用它的某个原函数再加上任意常数 c 来表达，即若 $\Psi'(x)=\psi(x)$，则

$$\int\psi(x)dx=\Psi(x)+c.$$

这个道理，运用拉格朗日定理来论证，简单明了.

在数学分析以及微分方程理论中，常常用到一个所谓利普希茨*条件. 如果函数 f 在 $[a,b]$ 上有意义，且存在常数 L，使对任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$ 成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,$$

那末称 f 在 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件.

显然，如果 f 在 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件，那末 f 在 $[a,b]$ 上必定连续，实际上还是一致连续的.

推论 3　如果函数 f 在 $[a,b]$ 上存在有界的导函数 f'，那末 f 在 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件.

证明　设

$$|f'(x)|\leqslant L,\quad x\in[a,b].$$

对于任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，应用拉格朗日定理有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(x_1+\theta(x_2-x_1))|\,|x_2-x_1|\leqslant L|x_2-x_1|$$

其中的 $\theta\in(0,1)$，因而 $x_1+\theta(x_2-x_1)\in[a,b]$. 证毕.

例 2　考察微分中值定理的中值.

对于 $f(x)=x^2$，显然，

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=(2x+\Delta x)\Delta x,$$

按拉格朗日定理，应有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x=2(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

比较两式，得

* 利普希茨(Rudolf Lipschitz, 1832—1903)，德国数学家.

$$\theta=\frac{1}{2}.$$

对于 $f(x)=x^3$，首先有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x,$$

然后按拉格朗日定理，应为

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x=3(x+\theta\Delta x)^2\Delta x\\&=(3x^2+6\theta x\Delta x+3\theta^2\Delta x^2)\Delta x.\end{aligned}$$

比较两式，得出

$$\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{\Delta x^2}{3}}-x}{\Delta x}$$

当 $x=0$ 时，$\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 当 $x\neq0$ 时，可以算出

$$\lim_{\Delta x\to0}\theta=\frac{1}{2}.$$

例 3　正弦函数满足利普希茨条件. 这是因为

$$(\sin x)'=\cos x,\ \text{而}\ |\cos x|\leqslant1,\ x\in(-\infty,+\infty),$$

所以应用拉格朗日定理，对于任何的 x_1 和 x_2 成立

$$|\sin x_1-\sin x_2|=|\cos\xi||x_1-x_2|\leqslant|x_1-x_2|.$$

拉格朗日定理还有一个有趣的应用. 如果函数 f 在$O(x_0,\delta)$内连续，在$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$内可微，那末有如下结论:

$$f'\ \text{在}\ x_0\ \text{有极限}\Longrightarrow f\ \text{在}\ x_0\ \text{可微}$$

并且

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x).$$

事实上，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$，应用拉格朗日定理，有

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}f'(x_0+\theta(x-x_0))=A,\end{aligned}$$

由此得出上述结论．但反之不然：导函数 f' 在 x_0 没有极限，不能断定 f 在 x_0 不可微，读者记得这样的例子吗？

柯西定理 如果(1)函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，(2) f 和 g 在 (a,b) 内可微且 $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，那末至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 预先说明一下定理的条件足以保证 $g(b)-g(a)\neq 0$，因为，要是 $g(a)=g(b)$，应用罗尔定理会导致 $g'(c)=0, c\in(a,b)$，而这与 $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$ 不相容．

作辅助函数

$$\varphi(x)=\{f(x)-f(a)\}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}.$$

不难验证，φ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，又 φ 在 (a,b) 内可微．应用罗尔定理，得 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\varphi'(\xi)=0,$$

此即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$．证毕．

注 柯西定理是拉格朗日定理的一般化．事实上，置 $g(x)=x$，即为拉格朗日定理．再者，柯西定理可以视为以参数形式表示的函数的拉格朗日定理，设 y 是 x 的函数，表示为

$$\begin{cases}y=f(t)\\ x=g(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta],$$

于是在 f,g 可微，且 g' 不为零等等条件下

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

这时，应用柯西定理有

$$\frac{y(t_2)-y(t_1)}{x(t_2)-x(t_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中ξ介乎t_1与t_2之间. 由此得出书写方式稍为不同的拉格朗日公式

$$y(t_2)-y(t_1)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\xi}\{x(t_2)-x(t_1)\}.$$

柯西定理有时也表述为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{f'(x_1+\theta(x_2-x_1))}{g'(x_1+\theta(x_2-x_1))}\{g(x_2)-g(x_1)\},$$

其中的$\theta\in(0,1)$.

习　题

1. 设函数f在$O(x_0,\delta)$内定义,且$f'_+(x_0)>0$, $f'_-(x_0)<0$. 证明x_0为f的局部极小点.
2. 设f在$[a,b]$上连续, $f(a)=f(b)=0$, 并且$f'(a)f'(b)>0$. 证明f在(a,b)内至少有一个零点.
3. 设f在(a,b)内可微. 如果x_1, $x_2\in(a,b)$且$f'(x_1)f'(x_2)<0$, 那末在x_1与x_2之间至少有一点ξ,使$f'(\xi)=0$.
4. 应用罗尔定理证明方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$上不可能存在两个相异的根.
5. 证明方程

$$x^4-8x^3+22x^2-24x+4=0$$

恰有两个正根.

6. 证明: 切比晓夫*多项式

$$P_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

有n个正根.

7. 设f在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微. 借助于辅助函数

$$\Phi(x)=\begin{vmatrix}x & f(x) & 1\\ b & f(b) & 1\\ a & f(a) & 1\end{vmatrix}$$

* 切比晓夫(П.Л. Чебышёв, 1821—1874),俄国数学家,力学家.