

SHUIDONGLIXUE

高等学校教学参考书

水动力学

张长高



高等教育出版社

TV 131.2
乙 11

365285

高等学校教学参考书

水 动 力 学

张 长 高



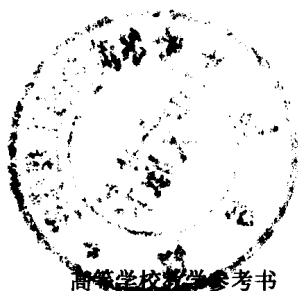
高等教育出版社

(京)112号

内容提要

DU40/15

本书是作者在自学和丰富教学经验的基础上,日积月累,花费了几十年的心血而编写成的。全书共分四篇23章,第一篇讲述液体运动学,第二篇为无粘性液体动力学,第三篇和第四篇为粘性液体动力学,分述层流和紊流。本书的特点是:内容编排与本学科发展过程相一致,循序渐近。本书篇幅较大,内容极为全面,对于每条概念和定律,作者都做了详细的说明并举了大量例题。在例题中,几乎包括了工程中所有常见的问题,并具有相当的深度。本书在数学理论上,对方程作了严谨的推导,中间过程也很少省略。所以本书不仅是一本很好的水动力学自学教材,而且对于工科教师和学生及有关研究人员也具有很高的参考价值。



高等学校教学参考书

水动力学

张长高 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

高等教育出版社激光照排技术部照排

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 58.5 字数 1 450 000

19 93年 3月第1版 1993年 3月 第1次印刷

印数 0001—1 340

ISBN 7-04-002305-9/TV·21

定价 29.85 元

前 言

本书的初稿其实是我的自学笔记，在那艰苦的岁月里，全凭任林一同志的全力支持，使我有可能会挤出些许时间学习，日积月累，便有了本书的主要内容。当然，有些材料是这几年补充的。

因为本书是在自学基础上编写成的，内容的编排自然带有循序渐进的性质，以后有意识地采用了与本学科发展过程大体上一致的写法，即从无粘性液体的无旋流动到有旋流动，从粘性液体的层流到紊流，从紊流半经验理论到统计理论基础。我叫这种写法是史论结合写法，即使在章节中，如边界层理论、圆管中紊流、明槽中紊流等，可能的话，也贯串了这种写法。我认为这种写法不是给读者一套静态的知识结构，而是把本学科的内容看作一条知识的长河介绍给读者，让读者领会一代一代科技工作者如何在前人的基础上、当时的条件下，推动本学科的发展；让读者了解某些思想方法的形成并不是偶然的，往往既有前人的思想萌芽，又有后人的突破。只能说在编写本书时我是这样打算的，也是这样做的，但还有待改进。

因为我的学习目的是想解决水利工程中的实际问题，内容的取舍也就以此为准。例如对于无旋流动，我强调了有自由面的计入重力作用的铅直平面无旋流动，并特辟一章。在有旋流动中，我简介了螺旋流动。对于层流，在水利工程中虽属罕见，然而其中许多思想方法却可借鉴，所以我把它作为研究紊流的前提来介绍，例如读者会看到，如果采用我的假设，那末求解恒定均匀紊流问题就可参照求解恒定均匀层流的方法。迄今为止，水利工程中的水力学问题，主要采用的还是总流分析法（水力学方法），这种方法结合量纲分析和模型实验，能够解决一系列工程实际问题，并将继续发挥作用，但也已显出越来越不能满足工程实际的要求；采用流场分析法（流体力学方法），研究流速分布和动水压强分布，脉动流速和脉动压强，无疑会把水力学的水平提高到新的阶段，然而又有许多难关有待突破。本书从书名到内容的选择，就贯串着试用流场分析法的意图，其中也列入了一些我的研究成果，那是抛砖引玉的。

本书力求通俗易懂，便于自学。为了使读者掌握概念和定律，我宁愿详加说明和举例，不厌其烦。在用到数学推导时也不过分省略，有时为了抓住主要线索，允许若干不严格的地方，以避免横生枝节。我从1961年在安徽水利电力学院讲授流体力学开始，渐有本书雏型，1978年在合肥工业大学流体力学讲习班采用了现在四篇的编排，其后多次试用，觉得这样的编写体系不无可取之处，在学完本科水力学后，本书可供继续自学之用。

本书定稿前曾由胡德保副教授对第一章到第六章，王惠民（东北）讲师对第三篇，许荫椿副教授对第四篇若干章节进行过初审，在此表示谢意。本书出版前则由徐正凡教授逐章逐节进行了仔细的审查，提出了不少建议，改正了一些错误，还对文字给以修饰，这是对本书的关心，也是对读者负责的态度，我应该学习。许荫椿副教授在本书出版的准备工作方面如主持抄写、

制图等化了许多时间，赵崇善同志不辞劳累为本书制作插图，至于在出版社方面，张元直、周崇芝两位同志给予大力支持，责任编辑王晶同志为本书的出版做了细致的工作，都在这里表示感谢。

限于水平，错误和缺点在所难免，希望读者指正。

张长高

1987年3月12日

目 录

第一篇 液体运动学

第一章 液体运动的表达方法 (3)	第三章 液体质点运动速度分解 (39)
§1-1 连续介质假设 (3)	§3-1 液体质点的移动、变形和旋转 (39)
§1-2 液体运动的两种表达方法 (5)	§3-2 变形速度张量 (49)
§1-3 液体运动的分类 流线与迹线 (13)	§3-3 变形主轴 (51)
§1-4 流管与流量 (17)	§3-4 用主线变速度表示任意直角坐标 的变形速度张量 (54)
习题 (18)	习题 (57)
第二章 连续性方程 (20)	第四章 无旋流动和有旋流动 (60)
§2-1 Euler 连续性方程 (20)	§4-1 无旋流动 流速势函数 (60)
§2-2 平面流动 流函数 (25)	§4-2 有旋流动 (66)
§2-3 轴对称流动 Stokes 流函数 (30)	§4-3 螺旋流动 (73)
§2-4 Lagrange 连续性方程 (34)	习题 (82)
习题 (37)	

第二篇 无粘性液体动力学

第五章 无粘性液体动力学基本原理 (87)	§6-6 用反函数表示的平面无旋流动 (157)
§5-1 作用于无粘性液体的力 (87)	习题 (164)
§5-2 Euler 无粘性液体运动方程 (89)	第七章 用保角变换法解平面无旋流动 ... (165)
§5-3 初始条件和边界条件 液体动力 学的基本问题 (96)	§7-1 解析函数的保角变换原理 (165)
§5-4 Lamb-Громека 方程及其积分 能量分布 (106)	§7-2 保角变换的第一种方法 (171)
§5-5 动量定律 (116)	§7-3 保角变换的第二种方法 Kirchoff 方法 (182)
§5-6 Lagrange 无粘性液体运动方程 (123)	§7-4 保角变换的第三种方法 Жуковский 方法 (199)
习题 (127)	习题 (208)
第六章 不可压缩无粘性液体的无旋流动(129)	第八章 有自由面的铅直平面无旋流动 ... (210)
§6-1 不可压缩无粘性液体无旋流动基 本方程 (129)	§8-1 问题的提出 (210)
§6-2 Thomson 定理和 Lagrange 定理 ... (130)	§8-2 平底闸下出流的铅直收缩系数 (212)
§6-3 平面无旋流动 流网 复势 复 速度 (134)	§8-3 宽顶堰流探讨——直角进口与 圆角进口 (222)
§6-4 某些解析函数表示的平面无旋流 动 (138)	§8-4 圆顶堰流探讨 (237)
§6-5 平面无旋流动的叠加原理 (143)	§8-5 求解满足自由面条件的复势 (243)
	§8-6 给定自由面形状求解复势 (249)

§8-7 给定固体边界形状求解有自由面的复势	(257)	§10-1 基本概念和基本定律	(311)
习题	(265)	§10-2 不可压缩无粘性液体有旋流动基本方程	(314)
第九章 用变分法、有限元法和边界元法解平面无旋流动	(266)	§10-3 恒定平面有旋流动	(322)
§9-1 变分法的基本概念	(266)	§10-4 已知旋度求流速分布	(332)
§9-2 泛函取极值的必要条件——边界给定情形	(270)	§10-5 单个旋点 有环量的绕圆柱流动	(336)
§9-3 泛函取极值的必要条件——边界待定情形	(280)	§10-6 两个旋点 绕蛋形物体的流动 ..	(342)
§9-4 用变分法解平面无旋流动	(285)	§10-7 n 个旋点 走马灯原理	(347)
§9-5 用有限元法求平面无旋流动的数值解	(294)	§10-8 绕圆柱的流动——圆柱后有一对稳定的点旋涡	(352)
§9-6 边界元法的理论基础	(304)	§10-9 Kármán 涡列	(360)
习题	(309)	§10-10 固体在静水中匀速前进时的形状阻力	(375)
第十章 不可压缩无粘性液体的有旋流动	(311)	§10-11 涡层与间断面	(384)
		§10-12 不可压缩无粘性液体的螺旋流动	(388)
		习题	(393)

第三篇 粘性液体动力学 —— 层流

第十一章 粘性液体的应力	(397)	定均匀层流	(442)
§11-1 粘性液体的应力	(397)	§13-3 圆管、椭圆管、等边三角形管中的恒定均匀层流	(445)
§11-2 应力张量的主要性质	(399)	§13-4 矩形断面管和矩形断面明槽中的恒定均匀层流	(448)
§11-3 应力主轴 主应力	(403)	§13-5 用变分法解恒定均匀层流问题 ..	(452)
§11-4 用主应力表示任意坐标平面上的正应力和切应力	(406)	§13-6 用有限元法解恒定均匀层流问题	(459)
§11-5 粘性液体的阻力定律	(408)	习题	(463)
习题	(414)	第十四章 非恒定均匀流动	(465)
第十二章 粘性液体动力学基本原理	(416)	§14-1 非恒定均匀流动的特点、基本方程及其解法	(465)
§12-1 粘性液体的运动方程	(416)	§14-2 无界平面在液体中突然做匀速运动或振动	(467)
§12-2 推广的 Lamb-Громека 方程和 Helmholtz 方程	(421)	§14-3 间断面的流速分布光滑化过程 ..	(471)
§12-3 不可压缩粘性液体的能量方程 ..	(425)	§14-4 微风吹在水面的影响 Couette 流动的形成	(473)
§12-4 不可压缩粘性液体流动的无量纲方程组	(429)	§14-5 矩形断面管中的非恒定均匀层流	(475)
§12-5 流动的力学相似	(433)	§14-6 圆管中的非恒定均匀层流	(478)
习题	(439)	习题	(486)
第十三章 恒定均匀流动	(440)		
§13-1 恒定均匀流动的特点、基本方程及其解法	(440)		
§13-2 无限宽平面壁间和明槽中的恒			

第十五章 平面流动与轴对称流动 (487)

- §15-1 基本方程 (487)
- §15-2 平面圆周运动和圆弧段流动 (492)
- §15-3 驻点邻近的流动 (496)
- §15-4 求精确解的Hamel, G.方法 (500)
- §15-5 绕平板流动的精确解——
Кочин, Н, Е.方法 (505)
- §15-6 求精确解的Taylor, G. I方法 (508)
- §15-7 求精确解的Kovácsnay, L. S. G.
方法 (509)
- §15-8 用有限分析法求恒定平面流动
的数值解 (510)
- 习题 (527)

第十六章 Re 数微小时的近似解法 (529)

- §16-1 Re 数微小时求近似解的 Stokes
方法 (529)
- §16-2 Re 数微小时求近似解的 Oseen
方法 (534)
- §16-3 扩散管和收缩管中的流动 (537)
- §16-4 绕圆柱的流动 (541)
- §16-5 绕圆球的流动 (548)
- §16-6 平面壁附近圆柱在液体中以角
速度 ω 转动 (554)
- §16-7 两平行平板间的Hele - Shaw

流动 (557)

习题 (564)

第十七章 Re 数很大时求近似解的

边界层理论 (565)

- §17-1 边界层概念 (565)
- §17-2 边界层方程——Prandtl, L 方
程 (569)
- §17-3 边界层方程的其它形式 (577)
- §17-4 平板边界层 位移厚度、动量厚
度、能量厚度 (579)
- §17-5 圆柱驻点邻近边界层 $\bar{U} = cx$ 情形 ... (588)
- §17-6 楔形柱体边界层 $\bar{U} = cx^n$ 情形 (590)
- §17-7 平面管道收缩段边界层 $\bar{U} = -\frac{c}{x}$
情形 (595)
- §17-8 边界层方程转换为常微分方程的
条件 (597)
- §17-9 凸形柱体边界层 $\bar{U} =$
 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1}$ 情形 (600)
- §17-10 外流速 $\bar{U} = x^m [c_0 + c_1 x^{(m+1)} +$
 $c_2 x^{2(m+1)} + \dots]$ 情形 (608)
- §17-11 边界层动量方程和能量方程 (612)
- §17-12 边界层问题的近似解法 (619)
- 习题 (630)

第四篇 粘性液体动力学——紊流

第十八章 层流的稳定性问题 (635)

- §18-1 层流和紊流 层流的稳定性问
题 (635)
- §18-2 判别层流稳定性的两种方法 (636)
- §18-3 层流不稳定的两种类型 (647)
- §18-4 基本流动 $\bar{V}_x = \frac{\bar{V}}{h} y$ 的稳定性
问题 (651)
- §18-5 两个同心圆柱面间Couette 流动
的稳定性问题 (661)
- §18-6 基本流动流速分布是抛物线的
稳定性问题 (667)
- §18-7 Ланцау, Л. П 的紊流发生学
说 (674)

习题 (677)

第十九章 紊流基本概念和基本方程 (678)

- §19-1 紊流的特点 时均运动和脉动
运动 (678)
- §19-2 不可压缩粘性液体紊流连续性
方程 (682)
- §19-3 不可压缩粘性液体紊流运动方
程 脉动应力 (683)
- §19-4 不可压缩粘性液体紊流能量方
程 (692)
- §19-5 推广的Lamb-Громека 方程
及其积分 (697)
- §19-6 推广的Helmholtz 方程 (699)
- §19-7 紊流的力学相似 (700)

习题	(701)	§22-4 两股平行流动的汇合	(821)
第二十章 恒定均匀紊流 脉动应力	(703)	§22-5 单个物体后的尾流	(829)
§20-1 恒定均匀紊流的特点和基本方程	(703)	§22-6 一排物体后的尾流	(840)
§20-2 脉动应力的假设 Reynolds 方程的直接封闭法	(705)	§22-7 平面射流与轴对称射流	(842)
§20-3 圆管中的恒定均匀紊流	(717)	§22-8 平面贴壁射流与轴对称贴壁射流	(855)
§20-4 明槽中的恒定均匀紊流	(731)	习题	(868)
§20-5 笔者对脉动切应力 $-\rho \overline{u_y' u_x'}$ 的探讨	(741)	第二十三章 紊流统计理论基础	(869)
§20-6 笔者的假设在矩形管和矩形明槽、椭圆管和椭圆明槽中恒定均匀紊流的应力	(748)	§23-1 紊流瞬时量的概率分布与概率密度	(869)
§20-7 脉动应力方程 采用脉动应力方程的封闭法	(748)	§23-2 紊流瞬时量的统计平均值、脉动强度、偏态系数、峰态系数	(872)
习题	(759)	§23-3 紊流脉动量的相关和相关系数	(876)
第二十一章 紊流边界层	(761)	§23-4 脉动应力 $\overline{u_i' u_j'}$ 和相关系数 R_{ij}	(880)
§21-1 紊流边界层基本方程	(761)	§23-5 自相关函数 $b_i(\tau)$ 和自相关系数 $R_i(\tau)$	(881)
§21-2 紊流边界层动量和能量积分方程	(767)	§23-6 两点处同一时刻两个脉动流速分量的相关	(884)
§21-3 平板紊流边界层	(768)	§23-7 相关方程 均匀各向同性紊流相关方程	(889)
§21-4 外流速 $\overline{U} = \overline{U}(x)$ 的情形	(782)	§23-8 Karman-Howarth 方程及其成果	(895)
§21-5 边界层方程转换为常微分方程的条件	(791)	§23-9 频谱 时间相关的 Fourier 分析	(899)
§21-6 边界层内紊流的结构	(795)	§23-10 波谱 纵向、横向相关的 Fourier 分析 Taylor 假设	(906)
§21-7 紊流边界层方程的直接封闭法	(801)	§23-11 三维能谱	(910)
§21-8 采用脉动能量方程的封闭法	(805)	§23-12 均匀各向同性紊流能谱方程	(915)
§21-9 采用脉动应力方程的封闭法	(812)	习题	(920)
习题	(815)	参考文献	(921)
第二十二章 自由紊流	(816)		
§22-1 概述	(816)		
§22-2 自由紊流基本方程	(818)		
§22-3 间断面的流速分布光滑化过程	(819)		

第一篇 液体运动学

第一章 液体运动的表达方法

§1-1 连续介质假设

肉眼看到的液体是连成一片没有空隙的、充满在所占空间的连续物体，它可以任意分割、至少在想象上可以分割为任意小的液滴，直到可以看作是一个质点而不失去液体的各种宏观特性。这样，人们一开始研究液体运动，就不言而喻地把液体默认为连续介质。然而，把连续介质作为液体的物理模型，直到1755年，才由 Euler, L. (1707—1783) 提出。

把液体看作由无数液体质点组成的连续介质，有利于运用高等数学研究液体的运动。液体质点与它所占的空间点处相对应，所研究的全部液体则与它所占的空间区域相对应，于是可用连续函数作为研究液体运动的工具，把液体运动的规律表为一组偏微分方程。Euler 就是这样奠定古典流体力学的基础的。

随着物理学的发展，我们已知液体是由大量分子组成的，液体分子的排列并不是一个紧挨着一个没有空隙的。并且，即使在我们看来是静止的液体，例如杯中的水，每个液体分子也不是呆在一个地点不动的。液体分子既在某个暂时的“定居”点作振动运动，又不断变换它的暂时的“定居”点作迁移运动。那末，原先把液体看作连续介质的物理模型是否仍能适用？

如果我们研究的是微观现象，即液体的分子运动，连续介质的物理模型当然不适用。如果我们研究的是宏观现象，即大量分子的统计平均现象，那末连续介质这一物理模型不但适用，而且还是必要的，理由如下：

从宏观来看，液体有一定的体积，体积为 V 的液体，有相应的质量 m ，于是可用比值 $\frac{m}{V}$ 表示液体的平均密度。一般说来，质量 m 在体积 V 中的分布不一定是均匀的，如果我们要求确定某一液体质点 M 的密度 ρ ，必须选取较小的体积 ΔV ，如图 1-1 所示，把质点 M 包含在 ΔV 内，相应的液体质量为 Δm ，于是比值 $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 可以近似地

看作液体质点 M 的密度。选取的体积 ΔV 越小，比值 $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 越能代表液体质点 M 的实际密度，严格说来，应使 $\Delta V \rightarrow 0$ ，于是可得液体质点 M 的密度

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1-1)$$

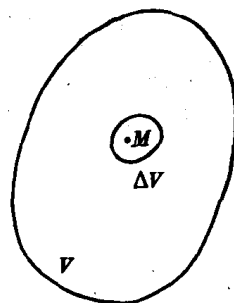


图 1-1

从高等数学方面来看，表达式 (1-1) 的成立是以液体质量 m 能够表为体积 V 的连续且可求导的函数为前提的，即当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时， $\Delta m \rightarrow 0$ ，且当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时，比值 $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 有一定的

极限。这就要求我们把液体看作连续介质，把微小体积 ΔV 中原来分配在各个液体分子中的质量 Δm 看作连续地分布在这一微小体积 ΔV 中，包括分子间的空隙在内。

我们这样定义液体质点的密度 ρ 是否能反映液体这一宏观特性的真实情况呢？

通常在 1 立方厘米的水中含有约 3.34×10^{22} 个水分子，所以即使在非常微小的体积 ΔV_i 中，例如在 1 立方微米的体积中（1 微米 = 1×10^{-4} 厘米），也还有约 3.34×10^{10} 个水分子。在这一级大小的 ΔV_i 中，既然有这样大量的水分子，那末少量水分子由于分子运动而进入或离开，从宏观来看，已经毋须考虑，这是因为如果有个别水分子由于偶然原因而离开，同时也会有个别水分子由于偶然原因而进入，作为大量分子的平均现象来看，在 1 立方微米这样一级大小的 ΔV_i 中，所含的质量 Δm_i 相当于分子个数 3.34×10^{10} 与分子质量的乘积，已经可以看作是确定的量，于是相应的比值 $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ 也可以看作确定的量，而这样一级大小的 ΔV_i ，和水

动力学中接触到的尺寸相比，已经可以看作一个质点，所以比值 $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ 也就是这样一级大小的液体质点的密度 [129]。至于 ΔV_i 中所含的质量 Δm_i ，究竟是实质上分配在各个水分子中，还是假定连续分布在 ΔV_i 中，对于计算比值 $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ ，已经没有影响，因此不妨看作连续分布的，即把液体看作连续介质。

表达式 (1-1) 把液体质点 M 的密度 ρ 定义为 $\Delta V \rightarrow 0$ 时比值 $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 的极限，这是物理概念的数学抽象，实际测定时我们总是把上述 ΔV_i 这样一级大小的液滴看作液体质点，并用相应的比值 $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ 来计算这一极限，只要比值 $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ 确定以后，便可得到液体质点 M 的密度 ρ 。

从上面的分析可见，连续介质这一物理模型，对于液体质点的密度是适用的。事实上，只要我们把液体质点的大小，限定在这样的范围内：它既不很小，已经含有大量的分子，能够研究它们的统计平均现象；又不很大，和液体动力学中接触到的尺寸比较起来，已经可以看作是“点”状的，那末连续介质这一物理模型，对于其它宏观特性量也是适用的。例如液体质点 M 的速度 u 就可以定义为质点中所有分子动量的总和与分子质量的总和之比。我们把含有大量分子的液体质点，既看作连续介质的一个组成部分，又看作微小的相对独立的液滴，就能运用高等数学研究液体的宏观运动，表示出它的真实情况。

反之，如果我们把液体看作由大量分子组成的物体，把液体分子看作独立的个体，尽管在微观中这是真实情形，用来确定宏观特性量却反而发生了困难。仍以密度为例，这时随着体积 ΔV 的减小，质量 Δm 的改变却不是连续的，它是按减少的分子个数减少的，特别是如果这一点处正好落在液体分子间的空隙中，那里既没有液体质量，也没有相应的液体体积，也就谈不到液体密度；如果再注意到分子运动，问题更为复杂，该点处在某一时刻可能是分子间的空隙，而另一时刻却会有液体分子来到，这样，该点处就不会有一个确定的密度。由此可见，研究液体的宏观运动，连续介质这一物理模型，不但适用，而且还是必要的。

我们再进一步提出，是否还有其它方法研究液体的宏观运动呢？例如我们是否可以把每一个液体分子的运动都表达出来，而后求出这些分子运动的平均值？答案是否定的。首先，单个分子的运动有偶然性，是无法确定的；其次，即使知道了每个分子的情况，想确定即使1立方微米中大约 3.34×10^{10} 个水分子的平均情形在实际运算中也是难以做到的，更不用说我们研究的液体尺寸要大得多。

这样，研究液体的宏观运动时，把液体看作由无数液体质点组成的连续介质。并把液体质点理解为既具有“点”状的尺寸，又含有大量液体分子，可以看作相对独立的微滴，它能显示出宏观的特性。这是合理的科学抽象。

自然，连续介质这一物理模型也是有局限性的，例如流速超过某一限度，水流会出现掺气现象，压强小于汽化压强，也会使局部地区发生空化，在这些区域，连续介质的物理模型就不能原封不动地适用。

§1-2 液体运动的两种表达方法

有两种表达液体运动的方法：质点的方法和场的方法。

质点的方法是由 Euler, L. 提出经 Lagrange, J.L. (1736—1813) 发展的，在习惯上就叫 Lagrange 方法。这种方法要求把每一个液体质点的运动过程表达出来。为此，首先得识别各个液体质点，例如把每一个液体质点染上不同的颜色，或者象对待运动员那样，编上不同的号码。实际处理时，Lagrange 建议采用某一指定时刻 $t=t_0$ 时每一个液体质点在空间的位置 $x=a, y=b, z=c$ 作为识别不同液体质点的号码， (a, b, c) 通常叫 Lagrange 变量。这样，用 Lagrange 方法表达液体运动时，要求把任意一个液体质点 (a, b, c) 随着时间 t 的改变，它在空间所处的位置 (x, y, z) 表达出来，也就是确定下面三个函数：

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c; t) \\ y &= f_2(a, b, c; t) \\ z &= f_3(a, b, c; t) \end{aligned} \right\} r = f(a, b, c; t) \quad (1-2)$$

只要上举三个函数已知，每一个液体质点 (a, b, c) 的运动也就确定，整个液体的运动也就确定。(1-2)式是 Lagrange 于 1781 年在他的著作《分析力学》中提出的，是液体质点的迹线方程 [73]。

为了求出液体质点的速度，可将 (1-2) 式对时间 t 求偏导数：

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(a, b, c; t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(a, b, c; t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(a, b, c; t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} u = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (1-3)$$

采用偏导数的符号，是因为所求的是某一指定液体质点 (a, b, c) 的速度，在对时间求导过程

中, (a, b, c) 应是指定不变的值。

为了求出液体质点的加速度, 可将 (1-2) 式对时间 t 求二阶偏导数:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1(a, b, c; t)}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2(a, b, c; t)}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3(a, b, c; t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (1-4)$$

至于液体质点的密度 ρ , 同样可用一个函数确定:

$$\rho = f_4(a, b, c; t) \quad (1-5)$$

例 1-1 已知用 Lagrange 方法表达液体运动时

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{kt} \\ y &= be^{-kt} \\ z &= c \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $y \geq 0$, 试分析液体的运动。

解: 由 (1) 式可知, 所有液体质点全在相应的平面上运动, 此平面与坐标平面 (x, y) 平行, 并且由

$$xy = ab \quad (2)$$

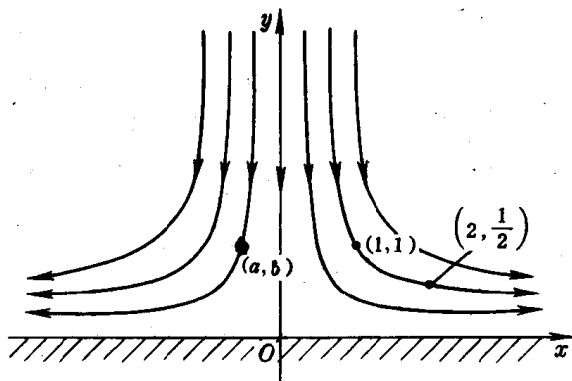
可见, 在 $z=c$ 平面上, 液体质点 (a, b) 的迹线是双曲线族, 如图中所示。一般说来, 不同的液体质点有不同的迹线, 但是乘积 ab 相同的液体质点, 却有相同的迹线, 例如 $a=1$ 厘米, $b=1$ 厘米和 $a=2$ 厘米, $b=\frac{1}{2}$ 厘米这两个液体质点, 它们的迹线是同一条双曲线 $xy=1$, 图中的坐标 (a, b) 是它们在 $t=t_0$ 时的位置。

液体质点的速度表为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = ake^{kt} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = -bke^{-kt} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

液体质点的加速度表为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = ak^2 e^{kt} \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = bk^2 e^{-kt} \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



例 1-1 图

例如对于 $a=1$ 厘米, $b=1$ 厘米这一液体质点, 有

$$\left. \begin{aligned} u_x &= k e^{kt}, & a_x &= k^2 e^{kt}, \\ u_y &= -k e^{kt}, & a_y &= k^2 e^{-kt}, \\ u_z &= 0, & a_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

若把 (x, z) 平面看作平板, (1) 式表示的液体运动便是液体流向平板受阻挡时驻点 O 附近的流动情形。

例 1-2 已知用 Lagrange 方法表达液体运动时

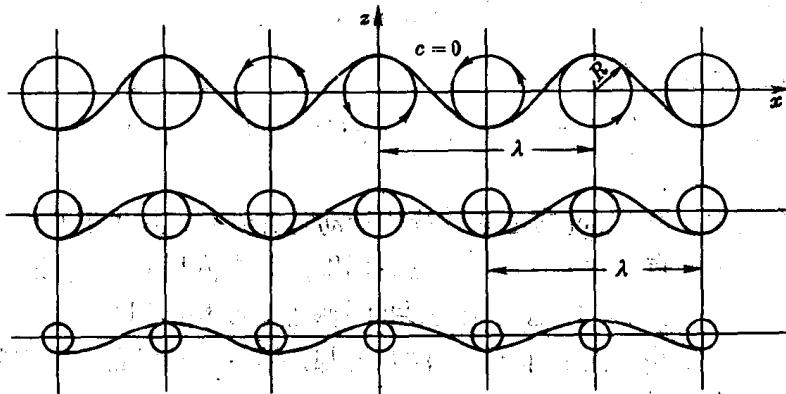
$$\left. \begin{aligned} x &= a + R e^{kc} \sin(ka + \sigma t) \\ y &= b \\ z &= c - R e^{kc} \cos(ka + \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $c \leq 0$, 试分析液体的运动。

解: 由 (1) 式可知, 所有液体质点全在相应的平面上运动, 此平面与坐标平面 (x, z) 平行, 并且由

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = (R e^{kc})^2 = r^2 \quad (2)$$

可见, 在 $y=b$ 平面上, 液体质点全作圆周运动, 以 $r = R e^{kc}$ 为半径。在这里用来识别液体质点的, 是液体质点作圆周运动时圆心的坐标 (a, c) , 而不是 $t=t_0$ 时液体质点的位置。在 $c=0$ 处, 半径 $r=R$ 取最大值, 越向下, 半径 r 越小, 到 $c \rightarrow -\infty$ 处, $r=0$ 。至于 c 相同而 a 不同的所有液体质点, 圆周运动的半径 r 全相等, 如图所示。



例 1-2 图

由 (1) 式可见, 液体质点作圆周运动的周期 $T = \frac{2\pi}{\sigma}$, 并可看到, c 相同而 a 不同的液体质点, 如果 a_1 与 a_2 的相差为 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, 那末这两个液体质点就有相同的相, 可见 λ 就是波长。今将 $c=0$ 的液体质点总和看作水面, 它们是波状的, 就是深水波的波面。以上是 1802 年布拉格大学教授 Gerstner, F. J. (1756—1832) 在他的著作《波浪理论》中提出的余摆线波理论, 他假定深水波的波形是圆沿直线滚动时圆内一点的轨迹, 用 (1) 式表出。

液体质点的速度表为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \sigma R e^{kc} \cos(ka + \sigma t) = -\sigma(z-c) \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \sigma R e^{kc} \sin(ka + \sigma t) = \sigma(x-a) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可见液体质点作圆周运动时是反时针方向的。

液体质点的加速度表为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\sigma^2 R e^{kc} \sin(ka + \sigma t) = -\sigma^2(x-a) \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sigma^2 R e^{kc} \cos(ka + \sigma t) = -\sigma^2(z-c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

场的方法是 Euler, L. 于1755 年在他的著作《流体运动的一般原理》中首先提出的[73,], 在习惯上就叫 Euler 方法。这种方法要求把液体所占空间区域中每一个点处的液体运动情况表达出来, 即把液体质点通过空间各点处时的情况给以说明。为此, 我们可以选取一个坐标系(x, y, z)把空间各点的位置予以确定。坐标(x, y, z)通常叫 Euler 变量。显然, 某一指定时刻 t , 不同点处(x, y, z)有不同的液体质点流过, 它们的流速未必相同; 并且, 同一点处(x, y, z), 在不同时刻 t , 流过的液体质点也是不同的, 因而流速也会不同。这样, 用 Euler 方法表达液体的运动, 就要求把流速 u 表为坐标(x, y, z)和时间 t 的函数:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z; t) \\ u_y &= u_y(x, y, z; t) \\ u_z &= u_z(x, y, z; t) \end{aligned} \right\} u = u(x, y, z; t) \quad (1-6)$$

只要上举三个函数已知, 液体质点在任意时刻 t 流经空间任意点处(x, y, z)的流速就确定, 整个液体运动也就已知。

仔细一想就会发现, 用 Euler 方法表达液体运动时并没有直接告诉我们每一个液体质点的命运, 对于某一个液体质点, 它来自何处, 去向那里, 即液体质点的迹线, 由表式(1-6)是不能直接知道的。Euler 方法与 Lagrange 方法的着眼点有根本的不同。Lagrange 方法注意的是每一个液体质点的运动历史, 而 Euler 方法注意的却是液体运动时每一个空间点处情况的差别和变化。仔细一想就会发现 Euler 方法不正是我们平时观察液体运动时默默采用的方法吗? 例如对于江河的水流, 我们注意的往往并不是某些水滴的来龙去脉, 而是从水面到水底, 从河中心到两岸流速分布的情形, 某处平均流速的缓急, 流量的大小和水位的涨落等。

为了求得指定时刻 t 流过空间指定点处(x, y, z)的液体质点的加速度, 可从(1-6)式得到:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} a = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \quad (1-7)$$

式中右边第一项叫局部加速度或当地加速度, 右边后三项之和叫对流加速度或位移加速度, 全