

大学数学丛书

偏 微 分 方 程

〔美〕F. 约 翰 著
朱汝金 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是美国著名数学家 F. 约翰的《偏微分方程》一书(第四版)的中译本。它不仅严谨地介绍偏微分方程的主要古典结果,而且阐述古典结果与现代发展之间的联系与转化。书中广泛使用 Fourier 变换, Hilbert 空间及有限差分等工具。书中安排了大量的习题,其中一些扩充了正文所讨论的内容。

读者对象为大学数学系学生、研究生、教师和有关专业的研究人员。

Fritz John
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
(Fourth Edition)
Springer-Verlag, 1982

大学数学丛书
偏 微 分 方 程
〔美〕F. 约 翰 著
朱汝金 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年7月第一版 开本:850×1168 1/32

1986年7月第一次印刷 印张:9 1/2

印数:0001—6,200 字数:246,000

统一书号:13031·3216

本社书号:5003·13—1

定 价: 2.70 元

目 录

第一章 一阶方程.....	1
§ 1. 引言	1
§ 2. 例	1
§ 3. 一个简单方程的解析解与近似方法	4
习题.....	9
§ 4. 拟线性方程	10
§ 5. 拟线性方程的 Cauchy 问题.....	12
§ 6. 例	16
习题.....	21
§ 7. 关于二元函数的一般一阶方程	22
§ 8. Cauchy 问题	28
§ 9. 用包络生成解	33
习题.....	35
第二章 二阶方程: 关于二元函数的双曲型方程.....	37
§ 1. 线性和拟线性二阶方程的特征	37
§ 2. 奇异性的传播	39
§ 3. 线性二阶方程	42
习题.....	44
§ 4. 一维波动方程	45
习题.....	50
§ 5. 一阶方程组	52
习题.....	58
§ 6. 拟线性方程组与简单波	59
习题.....	60
第三章 特征流形与 Cauchy 问题	61
§ 1. L. Schwartz 的记号	61
习题.....	62

§ 2. Cauchy 问题	63
习题	69
§ 3. 实解析函数与 Cauchy-Ковалевская 定理	69
(a) 多重无穷级数	69
习题	71
(b) 实解析函数	73
习题	75
(c) 解析函数与实解析函数	80
习题	82
(d) Cauchy-Ковалевская 定理的证明	84
习题	89
§ 4. Lagrange-Green 恒等式	91
§ 5. Holmgren 唯一性定理	92
习题	101
§ 6. 分布解	102
习题	106
第四章 Laplace 方程	108
§ 1. Green 恒等式, 基本解和 Poisson 方程	108
习题	116
§ 2. 极值原理	119
习题	121
§ 3. Dirichlet 问题, Green 函数和 Poisson 公式	122
习题	127
§ 4. 用下调和函数证明 Dirichlet 问题解的存在性 (“Perron 方法”)	129
习题	133
§ 5. 用 Hilbert 空间方法解 Dirichlet 问题	135
习题	144
第五章 高维双曲型方程	146
§ 1. n 维空间中的波动方程	146
(a) 球面平均法	146
习题	153
(b) Hadamard 降维法	155

习题	156
(c) Duhamel 原理和一般 Cauchy 问题	157
习题	162
(d) 初边值问题(“混合”问题)	162
习题	165
§ 2. 常系数高阶双曲型方程	167
(a) 初值问题的标准形	167
习题	169
(b) 用 Fourier 变换求解	169
习题	181
(c) 用 Fourier 变换解混合问题	182
(d) 平面波方法	184
习题	187
§ 3. 对称双曲方程组	189
(a) 基本的能量不等式	189
习题	197
(b) 用有限差分方法证明解的存在性	201
习题	211
(c) 用解析函数逼近的方法证明解的存在性 (Schauder 方法)	212
第六章 常系数高阶椭圆型方程	216
§ 1. n 为奇数时的基本解	217
习题	219
§ 2. Dirichlet 问题	222
习题	228
§ 3. 关于 Hilbert 空间 H_0^k 和 Dirichlet 问题边界值假设的进一步讨论	232
习题	235
第七章 抛物型方程	242
§ 1. 热传导方程	242
(a) 初值问题	242
习题	250
(b) 极值原理, 唯一性和正则性	252
习题	258

(c) 混合问题	258
习题	260
(d) 非负解	261
习题	266
§ 2. 一般的二阶线性抛物型方程的初值问题	266
(a) 有限差分法和极值原理	266
(b) 初值问题解的存在性	271
习题	274
第八章 关于无解的线性方程的 H. Lewy 的例	276
习题	280
参考文献	281
记号	283
索引	285

第一章 一阶方程¹⁾

§ 1. 引 言

关于函数 $u(x, y, \dots)$ 的偏微分方程是形如

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

的关系式,其中 F 是自变量 x, y, \dots , “未知”函数 u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数. 我们称 u 是 (1.1) 的解,如果把 $u(x, y, \dots)$ 及其偏导数代入 (1.1) 后,在 x, y, \dots 空间某区域 Q 中 (1.1) 关于这些变量恒等地成立. 除非有相反的说明,我们总是要求 x, y, \dots 是实的, u 以及在方程 (1.1) 中出现的 u 的导数在实空间的区域 Q 中都是 x, y, \dots 的连续函数²⁾. 涉及一个或几个未知函数及其导数的多个偏微分方程组成一个方程组.

偏微分方程或方程组的阶数是其中出现的最高阶导数的阶数. 偏微分方程称为线性的, 如果它关于未知函数及其导数是线性的, 并且系数仅依赖于自变量 x, y, \dots . m 阶偏微分方程称为拟线性的, 如果它关于未知函数的 m 阶导数是线性的, 并且系数仅依赖于 x, y, \dots 及未知函数的阶数低于 m 的导数.

§ 2. 例

偏微分方程遍及各个数学分支. 在这节里我们将给出若干例子. 在许多场合,有一个自变量代表时间,通常用 t 表示,而其余的自变量记作 x_1, x_2, \dots, x_n ($n \leq 3$ 时则记作 x, y, z), 表示 n 维空

1) ([6], [13], [27], [31]).

2) 为了简单起见,我们常常省略区域 Q 的明确描述. 于是所述的命题也“局部地”适用于 x, y, \dots 空间中一点的适当邻域.

间中的位置。关于空间变量的偏导数常以特殊的组合

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (2.1)$$

的形式出现，人们称它为 Laplace 算子。这个算子具有在刚性运动下保持不变的独特性质，即变换到另一个直角坐标系时，它不受影响。在描写与具体位置无关的物理定律时，很自然地会出现这种算子。

(i) 关于函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 的 n 维 Laplace 方程是线性二阶方程

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0. \quad (2.2)$$

这或许是应用最广泛的最重要的偏微分方程。解 u 称为势函数或调和函数。当 $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ 时，我们能使调和函数 $u(x, y)$ 与一个“共轭”调和函数 $v(x, y)$ 一起满足 Cauchy-Riemann 一阶方程组

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2.3)$$

(2.3) 的一对实解 (u, v) 组成复变元 $z = x + iy$ 的解析函数

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.4)$$

我们也可以把 $(u(x, y), -v(x, y))$ 看作无旋不可压缩流的速度场。此外，不可压缩无旋流的速度势，(在吸引物质或电荷外的)重力场和电场以及处于热平衡状态的温度分布均满足 $n = 3$ 时的方程 (2.2)。

(ii) 关于函数 $u = u(x_1, \cdots, x_n, t)$ 的 n 维波动方程是

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (2.5)$$

($c > 0$ 是常数)。当 $n = 1$ 时，它描述弦的振动或声波在管中的传播；当 $n = 2$ 时，它描述浅水面上的水波；而当 $n = 3$ 时，它描述声波或光波。

(iii) 在真空中关于电场向量 $E = (E_1, E_2, E_3)$ 及磁场向量 $H = (H_1, H_2, H_3)$ 的 Maxwell 方程实质上是六个一阶方程

$$\varepsilon E_i = \text{curl} H, \quad \mu H_i = -\text{curl} E. \quad (2.6a)$$

$$\text{div} E = \text{div} H = 0 \quad (2.6b)$$

所组成的线性方程组,其中 ε, μ 是常数。(作为关系式(2.6a)的推论,如果 $t = 0$ 时关系式(2.6b)成立,则它对所有的 t 均成立。)这里每个分量 E_i, H_k 均满足具有 $c^2 = 1/\varepsilon\mu$ 的波动方程(2.5).

(iv) 在经典理论中弹性波由线性方程组

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) \quad (2.7)$$

($i = 1, 2, 3$) 描述,其中 $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 是位移向量 u 的分量, ρ 是密度,而 λ, μ 是弹性材料的 Lamé 常数. 每一个 u_i 都满足由两个不同的波动算子所组成的四阶方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \right) u_i = 0. \quad (2.8)$$

当弹性平衡 ($u_i = 0$) 时,我们便得到重调和方程

$$\Delta^2 u = 0. \quad (2.9)$$

(v) 当密度和比热都是常数时,导热体中的温度分布满足热传导方程

$$u_t = k \Delta u \quad (2.10)$$

($k > 0$ 是常数).

(vi) 在势能为 $V(x, y, z)$ 的场中,运动的质量为 m 的单个质点所满足的 Schrödinger 波动方程 ($n = 3$) 是

$$i\hbar \phi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V\phi, \quad (2.11)$$

其中 $\hbar = 2\pi\hbar$ 是 Planck 常数.

上述例子中的方程都是线性的. 非线性方程也是常见的,但解这类问题实质上是更为困难,因此在实际中常常用线性方程近似地表示它们. 下面是几个非线性方程的例子.

(vii) 极小曲面 $z = u(x, y)$ (即通过给定周线而具有最小面积的曲面)满足二阶拟线性方程

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \quad (2.12)$$

(viii) 密度为 ρ 的二维定态绝热无旋等熵流的速度势 $\phi(x, y)$ (速度分量为 ϕ_x, ϕ_y) 满足

$$(1 - c^{-2}\phi_x^2)\phi_{xx} - 2c^{-2}\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1 - c^{-2}\phi_y^2)\phi_{yy} = 0, \quad (2.13)$$

其中 c 是速率 $q = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}$ 的已知函数。例如，对于状态方程为

$$p = A\rho^\gamma \quad (2.14)$$

的多方气体，

$$c^2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2. \quad (2.15)$$

(ix) 关于不可压缩液体的粘性流的 Navier-Stokes 方程是速度分量 u_k 和压力 p 之间的一组关系式：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \Delta u_i, \quad (2.16a)$$

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.16b)$$

其中 ρ 是常密度而 ν 是运动学粘性系数。

(x) 函数 $u(x, t)$ 的三阶非线性方程的一个例子是 Korteweg-de Vries 方程

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.17)$$

它是在水波的研究中被首先遇到的。

通常我们将试图描述偏微分方程的解流形。不同类型的方程的结果是十分不同的。偏微分方程的有意义的“适定”问题常常受具体的物理解释及应用所启示。

§ 3. 一个简单方程的解析解与近似方法¹⁾

我们考虑关于函数 $u = u(x, y)$ 的一个最简单的方程

$$u_t + cu_x = 0, \quad (3.1)$$

其中 $c > 0$ 是常数，以说明将在后面起重要作用的某些概念。沿着线族

1) ([18],[20],[25],[29]).

$$x - ct = \text{const} = \xi \quad (3.2)$$

中的任意一条线 (x, t 平面上的“特征线”), 方程(3.1)的解 u 满足

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} u(ct + \xi, t) = cu_x + u_t = 0.$$

因此沿着这样的一条直线 u 是常数, 它仅与区分线族中不同直线的参数 ξ 有关. 于是(3.1)的通解具有下面形式

$$u(x, t) = f(\xi) = f(x - ct). \quad (3.3)$$

公式(3.3)表明通解 u 由初始值

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.4)$$

唯一确定. 反之, 如果 f 属于 $C^1(\mathbf{R})$ 类, 则任何形如(3.3)的函数必是(3.1)的具有初始值 f 的解. 我们注意到 u 在任意点 (x, t) 处的值仅与初始函数 f 在单个变元 $\xi = x - ct$ 时的值有关, 而这个 ξ 值正是过 (x, t) 点的特征线与初始曲线 x 轴交点的横坐标. $u(x, t)$ 关于初始值的依赖区域由单个点 ξ 组成. 在点 ξ 处的初始值只影响特征线(3.2)上解 $u(x, t)$ 的值 (图 1.1).

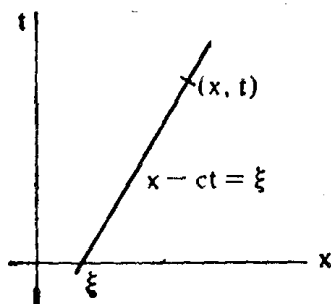


图 1.1

如果对每一个固定的 t , 用 xu 平面上的图象表示函数 u , 我们会发现在 $t = T$ 时的图象是由 $t = 0$ 时的图象沿平行于 x 轴的方向平移 cT 而得:

$$u(x, 0) = u(x + cT, T) = f(x).$$

解的图象描述了一个以速度 c 向右传播而不改变形状的波 (图 1.2).

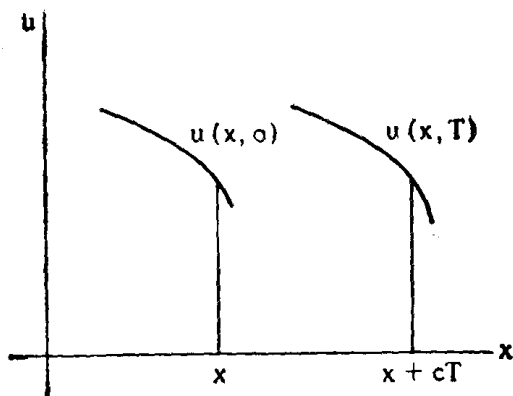


图 1.2

我们用这个具有显式解的例子引出用有限差分方法求偏微分方程数值解的某些概念。用 x 方向步长为 h , t 方向步长为 k 的矩形网格覆盖 xt 平面。换句话说, 即只考虑 x 是 h 的整数倍, t 是 k 的整数倍的点 (x, t) 。为了求数值近似, 用差分方程

$$\frac{v(x, t+k) - v(x, t)}{k} + c \frac{v(x+h, t) - v(x, t)}{h} = 0 \quad (3.5)$$

代替偏微分方程(3.1)是自然的。当 $h, k \rightarrow 0$ 时, 这个方程在形式上就变成 $v_t + cv_x = 0$ 。我们要问: 当 h, k 很小时, 在网格点上(3.5)的具有初始值

$$v(x, 0) = f(x) \quad (3.6)$$

的解 v 与初值问题(3.1), (3.4)的解相差多少?

令 $\lambda = k/h$, 把(3.5)写成递推公式

$$v(x, t+k) = (1 + \lambda c)v(x, t) - \lambda c v(x+h, t), \quad (3.7)$$

用 t 时刻 v 的值表示 $t+k$ 时刻 v 的值。引进用

$$Ef(x) = f(x+h) \quad (3.8)$$

定义的位移算子 E , (3.7) 就变成

$$v(x, t+k) = ((1 + \lambda c) - \lambda c E)v(x, t), \quad (3.8a)$$

其中 $t = nk$, 由此, 通过迭代就得到关于(3.5)的初值问题的解

$$v(x, t) = v(x, nk) = ((1 + \lambda c) - \lambda c E)^n v(x, 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (1 + \lambda c)^m (-\lambda c E)^{n-m} f(x) \\
&= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (1 + \lambda c)^m (-\lambda c)^{n-m} f(x + (n - m)h).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

显然 $v(x, t) = v(x, nk)$ 的依赖区域是 x 轴上的点集

$$x, x + h, x + 2h, \dots, x + nh, \tag{3.10}$$

它们均在 x 和 $x + nh$ 之间。微分方程解的依赖区域是由单点 $\xi = x - ct = x - c\lambda nh$ 组成，它在区间 $(x, x + nh)$ 外。当 $h, k \rightarrow 0$ 时，我们显然不能指望 v 收敛到微分方程的精确解，因为在构造 $v(x, t)$ 时我们没有用到对确定 $u(x, t)$ 至关重要的值 $f(\xi)$ ，反而用到了与 $u(x, t)$ 毫无关系的 f 在区间 $(x, x + (t/\lambda))$ 上的值。这个差分格式违背了 Courant-Friedrichs-Lewy 准则：差分方程的依赖区域的极限必须包含微分方程的依赖区域。

差分格式 (3.5) 的严重不稳定性也说明它是不适当的。在应用问题中数据 f 不是完全精确的，而且在数值计算的每一步我们也不易用精确值而总有小的舍入误差。从 (3.9) 显然可以看出 f 的绝对值为 ε ，而有适当交错符号的误差将导致 $v(x, t) = v(x, nk)$ 的大小为

$$\varepsilon \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (1 + \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} = (1 + 2\lambda c)^n \varepsilon \tag{3.11}$$

的误差。如此，当网格比 λ 固定时， v 的可能产生的误差将按 t 方向的步数 n 的指数函数增长。

一个更为适当的差分格式是用向后差商写出的：

$$\frac{v(x, t + k) - v(x, t)}{k} + c \frac{v(x, t) - v(x - h, t)}{h} = 0. \tag{3.12}$$

或者用记号写成

$$v(x, t + k) = ((1 - \lambda c) + \lambda c E^{-1})v(x, t). \tag{3.13}$$

(3.13) 的初值问题的解变成

$$v(x, t) = v(x, nk)$$

$$= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (1 - \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} f(x - (n-m)h). \quad (3.14)$$

在这个格式中, $v(x, t)$ 关于 f 的依赖区域由点

$$x, x - h, x - 2h, \dots, x - nh = x - \frac{t}{\lambda} \quad (3.15)$$

所组成. 令 $h, k \rightarrow 0$, 而网格比 λ 保持不变, 则集合(3.15)的极限点充满 x 轴上的区间 $\left[x - \frac{t}{\lambda}, x\right]$. 当这个区间包含点 $\xi = x - ct$, 即当网格比 λ 满足

$$\lambda c \leq 1 \quad (3.16)$$

时, 这个格式符合 Courant-Friedrichs-Lewy 准则. 在条件(3.16)之下格式的稳定性也可以从下述事实看出: 由(3.14), 初始函数 f 的绝对值不超过 ε 的误差, 将使 $v(x, t) = v(x, nk)$ 产生的最大可能误差是

$$\varepsilon \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (1 - \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} = \varepsilon ((1 - \lambda c) + \lambda c)^n = \varepsilon. \quad (3.17)$$

可以证明, 只要稳定性条件(3.16)满足并且 f 有一致有界的二阶导数, 则当 $h, k \rightarrow 0$ 而且 $k/h = \lambda$ 保持不变时, 由(3.14)描述的 v 确实收敛到 $u(x, t) = f(x - ct)$. 为此, 我们注意到 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned} & |u(x, t + k) - (1 - \lambda c)u(x, t) - \lambda c u(x - h, t)| \\ &= |f(x - ct - ck) - (1 - \lambda c)f(x - ct) - \lambda c f(x - ct - h)| \\ &\leq Kh^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中

$$K = \frac{1}{2} (c^2 \lambda^2 + \lambda c) \sup |f''|, \quad (3.19)$$

在 $x - ct$ 点展开函数 f 就可以看出这一点. 如此, 令 $w = u - v$ 我们就得到

$$|w(x, t + k) - (1 - \lambda c)w(x, t) - \lambda c w(x - h, t)|$$

$$\leq Kh^2,$$

因此

$$\begin{aligned} \sup_x |w(x, t+k)| &\leq (1-\lambda c) \sup_x |w(x, t)| \\ &\quad + \lambda c \sup_x |w(x-h, t)| + Kh^2 \\ &= \sup_x |w(x, t)| + Kh^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

因为 $w(x, 0) = 0$, 所以重复应用估计式(3.20), 便推出当 $t = nk$ 时

$$\begin{aligned} |u(x, t) - v(x, t)| &\leq \sup_x |w(x, nk)| \\ &\leq \sup_x |w(x, 0)| + nKh^2 = \frac{Kth}{\lambda}. \end{aligned}$$

于是 $h \rightarrow 0$ 时 $w(x, t) \rightarrow 0$, 即差分格式(3.12)的解 v 收敛到微分方程的解 u .

习 题

1. 在 f 仅是连续函数的假设下, 证明对于固定的 $\lambda \leq \frac{1}{c}$, 当 $h \rightarrow 0$ 时(3.12)的具有初始数据 f 的解 v 收敛到 u . (提示: 利用当 f 的改变不超过 ε 时, u 和 v 的改变均不超过 ε 这一事实.)

2. 考虑到可能的舍入误差, 代替(3.13), 而假设 v 满足

$$|v(x, t+k) - (1-\lambda c)v(x, t) - \lambda cv(x-h, t)| < \delta.$$

假设(3.16)成立并且 $v(x, 0) = f(x)$, 证明对于所述的 δ 及由(3.19)给出的 K , 有估计

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \frac{Kth}{\lambda} + \frac{t}{\lambda h} \delta. \quad (3.21)$$

根据这个公式求出使 $u(x, t)$ 的最大计算误差取最小值的 λ 及 h .

3. 在小扰动下差分格式的不稳定性并不排斥在某些特殊情况下当已知数据和计算过程均没有误差时, 差分格式的解收敛到精确函数的可能性. 特别地, 设 $f(x) = e^{\alpha x}$, α 是复常数. 证明对

于固定的 x, t 及任何固定的正数 $\lambda = k/h$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 表示式 (3.9) 和 (3.14) 均收敛到正确的极限 $e^{a(x-at)}$. (这与 Courant-Friedrichs-Lewy 准则并不矛盾, 因为对于解析的 f , 它在任何区间中的值唯一确定它在 ξ 点的值.)

§4. 拟线性方程

关于函数 $u = u(x, y, \dots, z)$ 的一般的一阶方程具有下述形式

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_z) = 0. \quad (4.1)$$

在变分法、质点力学和几何光学中均出现这类方程。其主要结果是：(4.1) 形方程的通解可以通过解一个常微分方程组而得到。而这个结论对于高阶方程或一阶方程组都不成立。在下面我们将主要讨论两个自变量 x, y 的情形。所述的理论无须作本质的改变就可以推广到多个自变量的情形。

我们首先考虑较为简单的拟线性方程

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (4.2)$$

用 xyz 空间中的曲面 $z = u(x, y)$ 表示函数 $u(x, y)$. 与偏微分方程的解相应的曲面称为偏微分方程的积分曲面。给定的函数 $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ 在 xyz 空间(或这个空间的一部分 Q) 中定义了一个向量场。显然只有这些向量的方向即特征方向对于偏微分方程 (4.2) 是重要的。由于 $(u_x, u_y, -1)$ 组成曲面 $z = u(x, y)$ 的法线的方向数, 所以可以把 (4.2) 看成这样一个条件, 即积分曲面在它的任意点处的法线垂直于与该点相应的向量 (a, b, c) . 如此, 积分曲面便是处处与特征方向相切的曲面。

以 (a, b, c) 为方向数的特征方向场对应着一族处处与这个方向场相切的特征曲线。沿着特征曲线关系式

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \quad (4.3)$$

成立。在这条曲线上引进适当的参数 t (或者说, 把 (4.3) 中的公

共比记作 dt), 则定义特征曲线的条件就可以写成我们更为熟悉的常微分方程组的形式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= c(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.4)$$

这是一个“自治”方程组(即自变量 t 不明显出现). 在(4.4)中参数 t 的选取是人为的. 沿曲线采用任何其他参数相当于用一组成比例的量代替 a, b, c , 这既不影响 xyz 空间中的特征曲线也不改变偏微分方程(4.2). 假设在区域 Q 中, a, b, c 属于 C^1 类, 由常微分方程组的理论得知, 过 Q 中的任意点有且只有一条特征曲线通过. 于是在 xyz 空间存在双参数的特征曲线族(而不是(4.4)的三参数的解族 $(x(t), y(t), z(t))$, 因为对于常数 c , 用 $t + c$ 替换自变量 t 时, 解 (x, y, z) 改变了, 但作为解的值域的特征曲线并不改变).

如果曲面 $S: z = u(x, y)$ 是特征曲线的并, 那么 S 必是积分曲面. 因为过 S 上的任意点 P 均有一条包含在 S 中的特征曲线 γ . γ 在 P 处的切线必位于 S 在 P 处的切平面内, 因为 γ 的切线具有特征方向, S 在 P 处的法线便垂直于特征方向, 从而 S 是积分曲面. 反之, 我们能证明任何积分曲面 S 均是特征曲线的并, 或者说 S 上的每一点均有一条包含在 S 中的特征曲线. 这是下述定理的一个推论:

定理. 设点 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 位于积分曲面 $S: z = u(x, y)$ 上. γ 是过点 P 的特征曲线. 则 γ 整个位于 S 上.

证明. 设由 $(x(t), y(t), z(t))$ 表示的 γ 是(4.4)的解, 并且当 $t = t_0$ 时 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$. 由 γ 及 S 组成表示式

$$U = z(t) - u(x(t), y(t)) = U(t). \quad (4.5)$$

因为 P 在 S 上, 显然有 $U(t_0) = 0$. 根据(4.4)有

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dz}{dt} - u_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - u_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$