# 实变函数与泛函分析概要

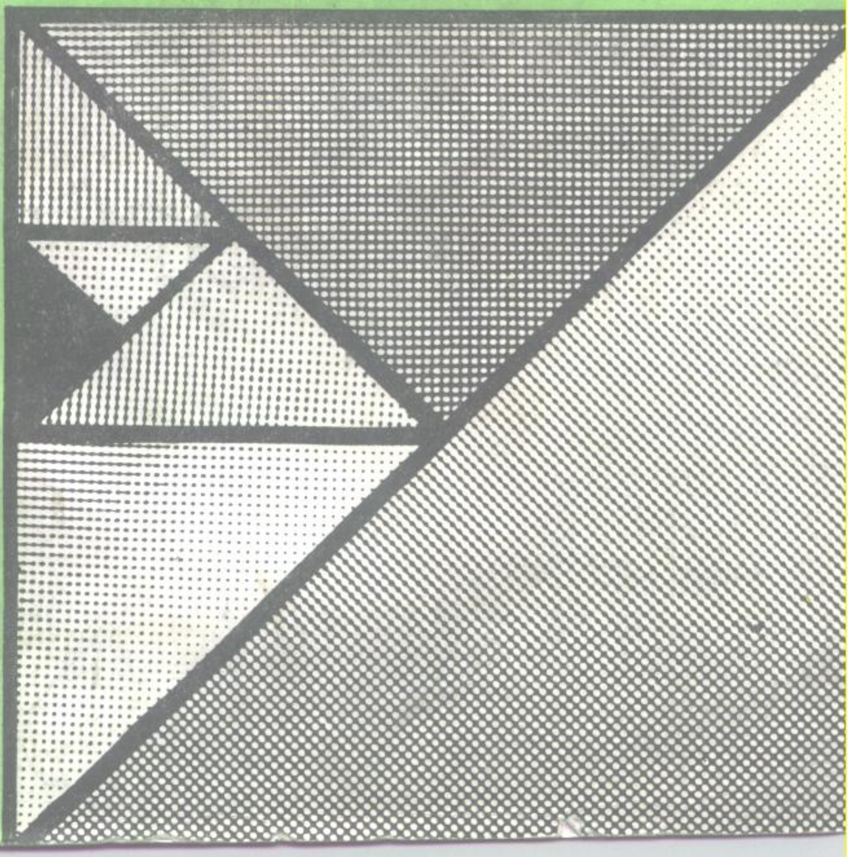
高等学校教材

（第二版）

第二册

王声望　郑维行　编

高等教育出版社



高等学校教材

# 实变函数与泛函分析概要

（第二版）

第二册

王声望　郑维行　编



高等教育出版社

(京)112 号



本书第二版是作者在第一版的基础上经过多年教学实践，吸收了国内各高等院校使用本书的教师们很多宝贵意见，并根据 1990 年 11 月在南京制订的《实变函数论》与《泛函分析》教材编写大纲修订而成。

第二版较第一版有较大程度的充实和改进. 本书用中等篇幅把泛函分析主要的基础内容系统地加以阐述，引入概念从具体例子出发，逐步抽象概括并讲述大量典型例子。每章小结颇有特色，能清晰地把握所学内容，习题也丰富。

第二册分五章，主要内容包括距离空间、赋范线性空间、Hilbert 空间、有界线性泛函及有界线性算子、非线性泛函分析初步以及广义函数论大意等.

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校的基础数学、计算数学以及应用数学等专业的教材，也可作为自学用书。凡学习过数学分析、线性代数、常微分方程、复变函数、实变函数等课程的同志都可阅读.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

（第二版）

第二册

王声望　郑维行　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 12.125　字数 290 000

1980 年 7 月第 1 版　1992 年 7 月第 2 版　1992 年 7 月第 1 次印刷

印数 0001—5 910

ISBN7-04-003756-4/O·1111

定价4.35元

# 第二版 前 言

本书自1980年出版以来，由于教育战线形势的不断发展与变化，并经过十多年的教学实践，特别是根据国内各高等院校使用本书的教师们所提出的很多重要而富有建设性的意见，感到本书在内容上需要作适当的调整与充实. 编者本着这一精神并根据高等学校理科数学、力学教材编审委员会函数论(包括数学分析)、泛函分析编审组于1990年11月在南京大学召开的会议上制订的《实变函数论》与《泛函分析》教材编写大纲，作了认真仔细的斟酌，对本书完成了第二版的修订工作。修改以后的这份教材，注意了以下几方面：

第一，将原来的三章扩充为四章并另增加了一章，共五章. 除第一版原有的内容，如距离空间，赋范线性空间、Hilbert空间，有界线性算子的几条基本定理，紧算子的 Riesz-Schauder 理论，自共轭算子的谱分解定理等外，增加的内容为：距离空间中的第一、第二类型的集，具有基的 Banach 空间，线性拓扑空间大意，有界线性算子的谱半径及谱半径公式，正常算子、酉算子的基本性质以及它们的谱分解定理，非线性泛函分析初步、广义函数大意以及 Hilbert 空间上的双线性泛函等。

第二，为了适应各种不同情况的读者的需要，在第二版中，对某些部分作了较特殊的处理，主要有：第八章定理7.13以及它前面的三条引理自成一个系统，在讲授时可以将这三条引理连同它们的证明全部略去而只介绍定理7.13的结论，至于定理 7.13 的证明自然也不必讲授。关于第九章，建议使用本书的教师与读者根据各自不同的情况采用以下几种方法：

1° 对于学时比较少的学校，可以介绍到第九章第二节或第三节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质；

2° 对于学时稍多的学校，可以介绍到第九章第四节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质，至于自共轭算子的谱分解定理的证明连同其预备知识可以考虑删去而只介绍谱分解定理的结论；

3° 对于学时比较富裕的学校，则可以介绍到第九章第四节(包括全部证明)以及第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质，至于酉算子、正常算子谱分解定理可以考虑只叙不证.

以上只是编者的建议，仅供使用本书的教师及读者参考，至于其他章节，也可根据情况适当删减. 希望使用本书的教师与读者尽可能根据自己的教学实践选择适合各自特点的教学内容与方法.

第三，本书对理论的阐述尽可能注意由浅入深、由具体到抽象. 对每个较难的新概念引入，尽可能先从比较直观的角度加以阐述，然后给以严格的定义. 例如，对有界线性算子范数的引入，我们先考虑算子沿每个方向的伸长度，然后从伸长度中抽象出算子的范数这一概念.

第四，注意内容的归纳与总结，除少数例外，在每一节或每两节的最后都有一个小结，扼要地阐述有关的内容，提出应当注意的事项. 希望这项工作对读者有所裨益. 此外，习题基本上按节安排，但都集中放在每一章的最后. 授课人可根据情况适当选择一部分作为学生的练习，以巩固课堂上所学的内容.

本书经华东师范大学程其襄、吴良森、魏国强三位教授审阅，他们在百忙中抽出宝贵时间仔细审阅了本书手稿并提出了很多宝贵意见，使本书增色很多. 编者对于他们的意见都尽可能采纳了. 尤其值得提出的是，程其襄教授作为我国泛函界的老前辈以八十高龄极其负责地审阅了本书手稿，使编者深为感动.

本书在修改过程中，得到了南京大学各级领导的关怀与支持并为编者提供了各种方便. 曾经使用过本书第一版的部分同志，如苏维宜教授、鲁世杰教授、何泽霖副教授、王崇祜副教授、宋国柱副教授等都提出了很多宝贵意见，研究生李建奎、孙国正两位同志仔细阅读了手稿并提出很多宝贵意见，编者也都尽可能采纳了. 本书每章每节均分成若干段，如第七章§3.1表示第七章第三节第一段，等等.

编者对以上所有为本书付出了辛勤劳动的同志表示由衷的感谢. 由于我们水平有限，书中错误与疏漏之处在所难免，希望使用本书的教师、读者以及同行们不吝赐教.

编者

1991年3月于南京.

# 目　录

## 第　二　篇

# 第 二 篇

# 第六章 距 离 空 间

## §1 距离空间的基本概念

在前面几章中，我们陆续学习了 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$，$L^2$空间，$L^p$ 空间等．以 $\mathbb{R}^n$ 为例，我们在其中定义了距离 $\rho$（见第一章17页），它满足下面三个条件：

(i) **非负性**：对任何 $x$、$y\in\mathbb{R}^n$，$\rho(x,y)\geqslant 0$，而且$\rho(x,y)=0$的充分必要条件是 $x=y$；

(ii) **对称性**：对任何$x$、$y\in\mathbb{R}^n$，有$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii) **三角不等式**：对任何$x$、$y$、$z\in\mathbb{R}^n$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

如果我们仔细分析一下 $\mathbb{R}^n$ 中的许多重要概念（如收敛概念）与结论（如极限的唯一性），就可以发现，实质上它们仅与距离$\rho$ 的性质(i)—(iii)有关．再以第五章中介绍过的空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$为例，虽然当时只在其中定义了范数，还没有明确地定义距离，但可以令

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p}\quad (x,y\in L^p[a,b]). \tag{*}$$

我们在本节例 3 中将验证(*)中的$\rho$也满足上面的性质(i)—(iii)．

我们称(*)为$L^p[a,b]$上的距离. 通过第五章的学习,读者不难发现,$L^p[a,b]$中的收敛概念以及其他与之有关的概念和结论,实质上也与他们中的距离(*)满足性质(i)—(iii)有关. 因此, 为了在一般的非空集合中引进适当的收敛概念, 一个可行的办法就是先引进适当的距离. 为了引进适当的距离,则应以性质(i)—(iii)为基础. 在一般的非空集合中引进了适当的距离后, 我们便称它为距离空间. 大家将会看到,在一般的距离空间中, 有很多与$\mathbb{R}^n$相似的性质, 但由于距离空间是一些具体空间如$\mathbb{R}^n$等的进一步抽象,故也有很多本质的不同.

### 1.1 距离空间的定义及例

**定义 1.1** 设 $X$ 为一非空集合,如果对于 $X$ 中的任何两个元素 $x$、$y$, 均有一个确定的实数记为 $\rho(x,y)$ 与它们对应且满足下面三个条件:

(i) **非负性:** $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性:** $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式:** $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, 这里 $z$ 也是 $X$ 中任意一个元素,

则称 $\rho$ 是 $X$ 上的一个距离, 而称 $X$ 是以 $\rho$ 为距离的距离空间, 记为$(X,\rho)$. 条件 (i)—(iii) 称为距离公理. 距离空间中的元素又称为点. 在不会引起混淆的情况下, 我们将 $(X,\rho)$ 简单地记为 $X$.

现在设 $X$ 为一距离空间, 以 $\rho$ 为距离, $A$ 为 $X$ 的一非空子集,则 $A$ 按照距离 $\rho$ 也是一个距离空间,称它为 $X$ 的子空间. 如$A\neq X$,则称它为 $X$ 的真子空间.

值得注意的是, 在任何一个非空集合 $X$ 上, 我们都可以定义距离. 例如对任一 $x\in X$, 规定 $\rho(x,x)=0$, 对任何 $y\in X$, 只要

$y\neq x$，便规定 $\rho(x,y)=1$．显然这样定义的 $\rho$ 满足距离公理的全部条件，因此 $X$ 按照距离 $\rho$ 成为一个距离空间，我们称这种距离空间是离散的．

**例 1**（见第一章） $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$．$\mathbb{R}^n$是所有 $n$ 维实向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

组成的集合，此处所有的$\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$都是实数．我们已经指出在 $\mathbb{R}^n$ 中如果定义向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与向量 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$之间的距离如下：

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

则 $\rho$ 满足定义 1.1 中的全部条件．在第一章中，我们没有逐一验证这些条件，为清楚起见今以三角不等式为例加以验证．为此先证明 Cauchy 不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2, \tag{2}$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$均为实数．任取实数 $\lambda$，则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

右端是 $\lambda$ 的二次三项式，以上不等式表明，这个二次三项式对 $\lambda$ 的一切实数值都是非负的，故其判别式不大于零，即

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

Cauchy 不等式成立．由这个不等式，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\end{aligned}$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2. \qquad (2')$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中任取点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, 并在(2′)中令 $a_k=x_k-z_k$, $b_k=z_k-y_k(k=1,2,\cdots,n)$, 立即得到三角不等式:

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此 $\mathbb{R}^n$ 按距离(1)是一个距离空间.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中,我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|, \qquad (1')$$

$\rho_1$ 也满足距离公理的全部条件,故 $\mathbb{R}^n$ 按照 $\rho_1$ 也是一个距离空间(见本章习题第 1 题).

上述例 1 告诉我们,在一个集合中,定义距离的方式不是唯一的. 一般地说,如果在一个非空集合 $X$ 中定义了距离 $\rho$ 与 $\rho_1$, 当 $\rho(x,y)\neq\rho_1(x,y)$时,那么 $X$ 按照距离 $\rho$ 与 $\rho_1$所成的两个距离空间必须看成是不同的. 因此, $\mathbb{R}^n$ 按照(1)及(1′)是两个不同的距离空间.

类似于例 1 中的 $\mathbf{R}^n$, 我们还可以考虑复数的情形. 假设 $\mathbf{C}^n$ 是由所有 $n$ 维复向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

组成的集合,这里 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是复数. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, 我们仍旧用(1)定义它们之间的距离,即

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2}. \qquad (1'')$$

与实数情形一样,可以证明复数情形的 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2, \qquad (2'')$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为复数.

由 $(2'')$ 可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}. \qquad (2''')$$

于是又可得到三角不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

这里 $x$、$y$、$z$ 均属于 $\mathbf{C}^n$. 因此按照 $(1'')$ 定义的距离 $\rho$, $\mathbf{C}^n$ 是距离空间.

当 $n=1$ 时, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$ 分别记为 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

今后凡不特殊声明时, 均取 (1), $(1'')$ 分别作为 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 中的距离.

**例 2** 空间 $C[a,b]$. 考虑定义在 $[a,b]$ 上所有实(或复) 连续函数构成的集合 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 中任意两个元素 $x$、$y$ 之间的距离定义如下:

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \qquad (3)$$

则 $C[a,b]$ 按照 (3) 中的 $\rho$ 是一个距离空间. 距离公理中的条件 (i) 与 (ii) 是明显的. 我们仅验证三角不等式. 设 $x$、$y$、$z\in C[a,b]$, 则

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

三角不等式成立. 故 $C[a,b]$ 按照 (3) 是一个距离空间.

**例 3** $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$. 在第五章中, 我们已比较详细地讨论了空间 $L^p[a,b]$, 这里不打算重复. 大家知道, 两个几乎处

处相等的 $p$ 幂可积函数在 $L^p(E)$ 中视为同一元素. 现在指出, 如果对$L^p[a,b]$中任意两个元素$x$、$y$, 令

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p}, \tag{4}$$

则 $\rho$ 满足距离公理的全部条件, 因此 $L^p[a,b]$按照距离 $\rho$ 是一个距离空间. $\rho$ 满足距离公理中的条件(i)、(ii)是明显的, 故只需验证三角不等式. 任取 $x$、$y$、$z\in L^p[a,b]$. 在第五章定理 1.3 的 Minkowski 不等式$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ 中令 $f=x-z, g=z-y$, 便得

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\|x-y\|_p\\ &\leqslant\|x-z\|_p+\|z-y\|_p=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

因此三角不等式成立. 故 $L^p[a,b]$按照 $\rho$ 确实是一个距离空间.

**例 4　空间 $L^\infty[a,b]$.** 在第五章中也已介绍了空间 $L^\infty[a,b]$. 现在我们对它进行比较详细的讨论, 主要目的在于证明按照由下面(5)式定义的距离 $\rho$, $L^\infty[a,b]$是一个距离空间.

称定义在可测集$[a,b]$上的可测函数 $x(\cdot)$ 是本性有界的, 是指存在着$[a,b]$的某个零测度子集 $E_0$, 使得 $x(\cdot)$ 在集合$[a,b]\setminus E_0$上有界. $[a,b]$ 上所有本性有界可测函数构成的集用 $L^\infty[a,b]$表示, 几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素. 对$L^\infty[a,b]$中任意两个元素$x$、$y$, 令

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\inf_{\substack{mE_0=0\\ E_0\subset[a,b]}}\left\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-y(t)|\right\}\\ &=\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.\end{aligned} \tag{5}$$

需要验证 $\rho$ 满足距离公理的三个条件. 我们只验证三角不等式. 设 $x$、$y$、$z\in L^\infty[a,b]$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $E_0$、$E_1\subset[a,b]$, $mE_0=mE_1=0$, 使

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_1}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(E_0\cup E_1)=0$，于是

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|x(t)-z(t)|\\&\quad+\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]/E_0}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in[a,b]\setminus E_1}|z(t)\\&\quad-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$，得

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

三角不等式成立. 因此按照(5)式定义的距离 $\rho$，$L^\infty[a,b]$ 确为距离空间.

**例 5　空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$.** 令 $l^p$ 是由满足下列条件的实(或复)数序列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 构成的集合:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty.$$

我们的目的是证明 $l^p$ 按照下面(9)式定义的距离为距离空间. 为清楚起见，先设 $1<p<\infty$. 在第五章第 197 页的不等式 $u^\alpha v^\beta\leqslant\alpha u+\beta v(u\geqslant0,v\geqslant0)$ 中，令 $\alpha=\frac{1}{p}$，$\beta=\frac{1}{q}$，这里 $p$、$q$ 互为相伴数，即 $1/p+1/q=1$. 于是有

$$u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{u}{p}+\frac{v}{q}.\tag{6}$$

任取 $l^p$ 中的元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $l^q$ 中的元素 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 对于给定的 $n$，取

$$u=\frac{|\xi_n|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p};\qquad v=\frac{|\eta_n|^q}{\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q}.$$

将以上的 $u$、$v$ 代入(6)式，并对 $n$ 求和再经过简单的计算，便有

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

将上式左端分母中的 $k$ 换成 $n$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{1/q}, \tag{7}$$

称(7)式为 Hölder 不等式，这个不等式在第五章第 196 页中已经提到，现在只是给予严格的证明.

今任取 $l^p$ 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$ (注意$y$不再属于$l^q$)，由不等式$|a+b|^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$，这里 $a$、$b$ 均为实(或复)数，可知$\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\}$也属于 $l^p$. 于是$\{|\xi_1+\eta_1|^{p/q},|\xi_2+\eta_2|^{p/q},\cdots,|\xi_n+\eta_n|^{p/q},\cdots\}$属于$l^q$. 由Hölder 不等式(7)，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(|\xi_n+\eta_n|\right)|\xi_n+\eta_n|^{p-1}\right]$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[(|\xi_n|+|\eta_n|)|\xi_n+\eta_n|^{p/q}]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}$$

$$\leqslant\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q},$$

因此

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{8}$$

如果 $p=1$，不等式(8)显然成立．因此我们在使用不等式(8)时，既可设 $p>1$，也可设 $p=1$．称(8)式为Minkowski不等式．

在 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中定义如下的距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{9}$$

利用Minkowski不等式可以证明三角不等式，方法与例3中的完全类似，这里不详述．于是 $\rho$ 满足距离公理的条件(iii)．至于距离公理的条件(i)、(ii)，则是显然的．因此 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 按照(9)式定义的距离 $\rho$ 是一个距离空间．

当 $p=1$ 时，我们将 $l^1$ 记为 $l$．

**例6** 空间 $l^\infty$．令 $l^\infty$ 是由一切有界的实(或复)数列构成的集合．任取 $l^\infty$ 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$．令

$$\rho(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n|. \tag{10}$$

不难证明(10)中的 $\rho$ 满足距离公理的全部条件，因此 $l^\infty$ 按照(10)式定义的距离 $\rho$ 是一个距离空间．

## 1.2 距离空间中的收敛概念