复变函数论习题集

〔苏联〕L. 沃尔科维斯基著

上海科学技术出版社

PROBLEMS IN THE THEORY

OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

L. VOLKOVYSKY, G. LUNTS,

I. ARAMANOVICH

MIR PUBLISHERS, MOSCOW, 1977

复变函数论习题集

L. 沃尔科维斯基

〔苏联〕G. 伦 茨

I. 阿拉马诺维奇

宋国栋 黄 珏 张庆德 译

李 锐 夫 审校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江西印刷公司印刷

开本787×1092 1/32 印张11.75 字数259,000

1981年年7月第1版 1981年7月第1次印刷

印数：1—40,000

统一书号：13119·918 定价：(科四)1.10元

译者的话

本书系根据苏联"世界出版社"出版的《复变函数论习题集》(Problems in the Theory of Functions of a Complex Variable)的第二版(1977 年)译出．原著者是利奥·沃尔科维斯基(LEO VOLKOVYSKY)、格雷戈里·伦茨(GREGORY LUNTS)和伊萨克·阿拉马诺维奇(ISAAC ARAMANOVICH)，由维克多·希菲尔(VICTOR SHIFFER)将 1975 年的俄文版译成英文．

本书共分十一章，前九章的内容包括了复变函数基础理论的习题，第十章是复变函数在流体力学、静电学和平面热传导问题中的应用，第十一章是解析函数的推广(拟保角变换，广义解析函数等)．全书共有习题 1425 道，其中多数是基本题，也有部分难题，还有相当数量的习题涉及复变函数在平面场论等方面的应用．我们认为，本书选题难易兼顾，理论和应用兼备，不失为一本较好的教学参考书，适用于综合性大学和高等师范院校的数学力学系、物理系和工科院校中设有高等数学课程的有关系科，可供教师、学生以及有关的工程技术人员参考．

在翻译过程中，我们尽量做到尊重原著，对个别含义似乎不够明确的地方，加译者注予以说明．对于原书中的印刷错误以及著者明显的疏忽之处，凡是所发现的，都加以纠正，在译文中不再一一加注指出了．但限于水平，译稿中不足之处在所难免，望读者批评指正．

李锐夫教授在百忙中指导了本书的翻译工作并为本书审校，我们表示衷心的感谢．张奠宙和戴崇基两位同志也审阅了部分原稿，提出了具体的修改意见．我们于此一并致谢。

译者 1980年5月

引　言

本书主要是为大学的力学数学系、物理数学系、高等师院和技术学院的学生学习高等数学课程而准备的．内容也包括一些超出标准教学大纲的习题．

我们相信，本书对于专攻流体动力学、弹性理论和电子工程学的学生也是适用的．

为了掌握必要的理论基础知识，学生必须学完有关的教科书，如阿·斯维什尼柯夫(A. Sveshnikov)与阿·季霍诺夫(A. Tikhonov)著的《复变函数论》，莫斯科，世界出版社，1971．

解题的提示都在正文中给出。最难的习题标以星号，在本书的最后部分给予解答。

目　录

第三章　积分与幂级数

第四章 劳伦级数. 单值解析函数的奇点. 残数及其应用

第五章 各种函数项级数. 参数积分

第六章 无穷乘积. 整函数与亚纯函数

第七章　柯西型积分. 泊松与许瓦尔兹积分公式

第八章　解析延拓. 具有多值特征的奇点、黎曼面

第九章　保形映射(续)

第十章　在力学和物理学上的应用

第十一章　解析函数的推广

答案和解法

第 一 章

复数与复变函数

本章以及全书除另行说明外，采用以下记号：$z=x+iy=re^{i\varphi}$，$w=u+iv=\rho e^{i\theta}$（x, y, u, v, ρ, φ 与 θ 都为实数，$r\geqslant 0$，$\rho\geqslant 0$），$\operatorname{Re} z=x$，$\operatorname{Im} z=y$，$\operatorname{Arg} z=\varphi$，$|z|=r$，$\bar{z}=x-iy$．如不附加说明，则幅角 $\arg z$ 的主值由不等式 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 给出；其点用复数 z 来表示的复平面称为 z-平面；通常，术语"复数 z"与"点 z"是同义的．

§1. 复 数

复数的几何解释

1. 完成下列运算：

1) $\dfrac{1}{i}$；2) $\dfrac{1-i}{1+i}$；3) $\dfrac{2}{1-3i}$；4) $(1+i\sqrt{3})^3$．

2. 求出下列复数（a 与 b 为实数）的模与幅角：

1) $3i$；2) -2；3) $1+i$；4) $-1-i$；5) $2+5i$；

6) $2-5i$；7) $-2+5i$；8) $-2-5i$；9) $bi\,(b\neq 0)$；

10) $a+bi\,(a\neq 0)$．

3. 解方程 $\bar{z}=z^{n-1}$（n 为自然数，$n\neq 2$）．

4. 求出下列根式所有的值，并用图解标出：

1) $\sqrt[3]{1}$；2) $\sqrt[3]{i}$；3) $\sqrt[4]{-1}$；4) $\sqrt[6]{-8}$；5) $\sqrt[8]{1}$；

6) $\sqrt{1-i}$；7) $\sqrt{3+4i}$；8) $\sqrt[3]{-2+2i}$；

9) $\sqrt[5]{-4+3i}$．

5. 证明 $\sqrt{z^2-1}$ 的两个值位于一条通过坐标原点的直

线上，此直线平行于以 -1, 1 与 z 为顶点的三角形中过顶点 z 的内角平分线.

6. 设 n, m 为整数. 证明 $(\sqrt[n]{z})^m$ 有 $n/(n, m)$ 个不同的值，其中 (n, m) 是数 m 与 n 的最大公约数. 证明，当且仅当 $(n, m)=1$, 即 n 与 m 互质时，$(\sqrt[n]{z})^m$ 与 $\sqrt[n]{z^m}$ 的值集相同.

7. 用几何方法证明下列不等式：

1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

试用代数方法证明同样的不等式. 在每个不等式中确定等号何时成立.

8. 用几何方法证明下列不等式：

1) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\leqslant|\arg z|$;

2) $|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|$.

9. 证明恒等式：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

并说明其几何意义.

10. 证明恒等式：

$$|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

11. 证明不等式：

$$|z_1+z_2|\geqslant\frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

12. 设 z_1 与 z_2 为任意复数，a_1 与 a_2 为实数 $(a_1^2+a_2^2\neq0)$，证明不等式：

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2|\leqslant2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}$$
$$\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

提示：引进辅助角 α 使 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_1}{a_2}$；将表达式写成形如

$A+B\sin 2\alpha+C\cos 2\alpha$ 的估计式，并求出其极大值与极小值。

13．证明下列恒等式：

1) $(n-2)\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k+a_s|^2$;

2) $n\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k-a_s|^2$。

14．证明：

1) 若 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，则点 z_1，z_2，z_3 为一内接于单位圆的等边三角形的顶点；

2) 若 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$，则点 z_1，z_2，z_3，z_4 或者为一矩形的顶点，或者两两重合．

15．若一正 n 边形的中心位于点 $z=0$ 上，其一个顶点 z_1 为已知，试求此正 n 边形的诸顶点．

16．点 z_1 与 z_2 为一正 n 边形的两个相邻顶点，试求与 z_2 相邻的顶点 $z_3(z_3\neq z_1)$．

17．已知一平行四边形的三个顶点 z_1，z_2，z_3，试求与 z_2 相对的第四个顶点 z_4．

18．在什么条件下，两两不相重合的三点 z_1，z_2，z_3 为共线？

19．在什么条件下，两两不相重合的四点 z_1，z_2，z_3，z_4 位于一个圆周上或一条直线上？

20*．点 z_1，z_2，…，z_n 都位于一条通过坐标原点的直线一侧．证明：点 $1/z_1$，$1/z_2$，…，$1/z_n$ 也具有同样性质（试指出满足此性质的有关直线是哪一条），且有

$$z_1+z_2+\cdots+z_n\neq 0,\quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

21．证明：若 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$，则通过坐标原点的任何直线都将点 z_1，z_2，…，z_n 隔开，只要这些点不落在此直线上．

22. 设质点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 分别带有质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，则通过此质点系重心的任何直线将这些点隔开，只要它们不落在此直线上。

在题 **23** 至 **34** 中，要求说明所述关系式的几何意义。

23. $|z-z_0|<R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|=R$.

24. $|z-2|+|z+2|=5$.

25. $|z-2|-|z+2|>3$.

26. $|z-z_1|=|z-z_2|$.

27. 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z < C$.

28. $0<\operatorname{Re}(iz)<1$.

29. $\alpha<\arg z<\beta$; $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ $(-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi)$.

30. $|z|=\operatorname{Re} z+1$.

31. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.

32. $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$; $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$.

33. $|2z|>|1+z^2|$.

34. 1) $|z|<\arg z$, 若 $0\leqslant\arg z<2\pi$;

2) $|z|<\arg z$, 若 $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

在题 **35** 至 **38** 中，要求确定 z-平面上由所述方程给出的曲线族。

35. 1) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=C$; 2) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=C$ $(-\infty<C<\infty)$.

36. 1) $\operatorname{Re} z^2=C$; 2) $\operatorname{Im} z^2=C$ $(-\infty<C<\infty)$.

37. $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$ $(\lambda>0)$.

38. $\arg\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\alpha$ $(-\pi<\alpha\leqslant\pi)$.

39. 1) z-平面上的一曲线族由下述方程给出：

$$|z^2-1|=\lambda \quad (\lambda>0),$$

当λ为何值时，族中的曲线由一条简单曲线组成？又当λ为何值时，族中的曲线分解为若干条低次曲线？

2）关于下述曲线族回答同样的问题：

$$|z^2+az+b|=\lambda \quad (\lambda>0).$$

40．确定从坐标原点到所给曲线的各点之间的最大与最小距离$(a>0)$：

1）$\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=a$；2）$\left|z+\dfrac{b}{z}\right|=a$.

41．若令$|z|-2\pi<\arg z\leqslant|z|$，则在任何点$z\neq0$唯一地定义函数$\arg z$．试问使函数$\arg z$连续性不成立的点的轨迹是什么？

42．由不等式$\ln|z|-2\pi<\arg z<\ln|z|$，在任何点$z\neq0$上唯一定义了函数$\arg z$，试问使其连续性不成立的点的轨迹是什么？

43．$\mathrm{Arg}\,f(z)$在$z=2$的初始值假定等于0．点z绕以原点为心的圆运动一周（逆时针方向）又回到点$z=2$．假设$\mathrm{Arg}\,f(z)$当z变动时连续变化，试对下列函数$f(z)$指出，当z沿上述回路走一周后$\mathrm{Arg}\,f(2)$的值：

1）$f(z)=\sqrt{z-1}$；2）$f(z)=\sqrt[3]{z-1}$；

3）$f(z)=\sqrt{z^2-1}$；4）$f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$；

5）$f(z)=\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

球极平面射影

44．试导出球极平面射影公式：将直径为1、在原点与z-平面相切的球面上点P的坐标(ξ, η, ζ)用对应点z的坐标

(x, y)来表示．同样，用ξ, η, ζ来表示x与y(假定ξ轴和η轴分别与x轴和y轴重合)．

注．题**44**中，对应是在复平面的点z与半径为$\frac{1}{2}$切于此平面的球面上的点之间建立的．另一种对应的方法取球面半径为1，z-平面通过球面中心．

45．点1，-1，i，$(1-i)/\sqrt{2}$在球面上的象是什么？

46．纬线$\beta\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$在平面上的象是什么？"北极"与"南极"对应于什么？

47．求出 1) 射线$\arg z=\alpha$，2) 圆$|z|=r$在球面上的象．

48．1) 关于点$z=0$，2) 关于实轴，3) 关于单位圆对称的点对，在球面上象的位置是什么？

49．在什么条件下，点z_1和z_2是球面上一直径两端点的球极平面射影？

50．在球面的什么变换下，点z的象变到点$\frac{1}{z}$的象？

51．试求由下列不等式所定义的区域在球面上的象：

1) $\mathrm{Im}\, z>0$；2) $\mathrm{Im}\, z<0$；3) $\mathrm{Re}\, z>0$；4) $\mathrm{Re}\, z<0$；

5) $|z|<1$；6) $|z|>1$．

52．平面上一族平行直线在球面上对应于什么曲线族？

53．证明：在球极平面射影下，球面上的圆射影成平面上的圆或直线．球面上的什么圆对应于直线？

54．设K为平面上对应于球面上圆K'的圆，N为球面的北极，S为沿K'(假设K'非大圆)与球面相接的圆锥的顶点．证明：圆K的中心位于射线NS上．试考虑K'为大圆的情形．

55. 证明：在球极平面射影下，球面上两条曲线的夹角等于它们在平面上的象的夹角.

56. 联接球面上对应于点 z 和 a 的两点间的弦，试求此弦的长度 $k(z, a)$. 再考虑当 a 为无穷远点的情形.

57. 已知：点 z_1 与 z_2(两者之一可为无穷远点). 试求 z-平面上点的轨迹，使它在球面上对应于一个与已知点 z_1, z_2 之象等距的圆.

§2. 初等超越函数

按定义：

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y);$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z};\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2};\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2};\quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

58. 应用 e^z 的定义证明：

1) $e^{z_1}\times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; 2) $e^{z+2\pi i} = e^z$;

3) 若 $e^{z+\omega} = e^z$ 对任何 z 成立，则 $\omega = 2k\pi i$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

关系式 $\exp i\varphi = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (欧拉(Euler)公式) 使我们可用复数的指数形式 $z = re^{i\varphi}$ 代替其三角形式 $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. 从现在起，$\varphi$ 通常理解为幅角的主值，即 $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

59. 写出下列各数的指数形式：$1,\ -1,\ i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i$.

60. 求 $e^{\pm\pi i/2}$; $e^{k\pi i}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

61. 求出下列复数的模与幅角的主值：

e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ ($a>0$, $|\varphi|\leqslant\pi$);

$e^{-i\varphi}$ ($|\varphi|\leqslant\pi$); $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ ($0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 2\pi$).

62. 求出下列和:

1) $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$;

2) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$;

3) $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$;

4) $\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x$;

5) $\sin x-\sin 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$.

63. 求出下列和:

1) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$;

2) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$.

64、从相应的函数定义出发,证明:

1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; 2) $\sin z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$;

3) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$;

4) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

5) $\operatorname{tg} 2z=\dfrac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$;

6) $\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2$.

65. 证明:若对任何 z 有 $\cos(z+\omega)=\cos z$, 则 $\omega=2\pi k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

66. 证明:

1) $\sin iz=i\operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz=\operatorname{ch} z$;

3) $\operatorname{tg} iz=i\operatorname{th} z$; 4) $\operatorname{ctg} iz=-i\operatorname{cth} z$.

67. 试用实变量三角函数与双曲函数表示下列函数的实部、虚部与模:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

68. 求出下列函数值的实部和虚部:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2+i)$;

6) $\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)$.

69. 对每一个函数 e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ 找出点 z 的一个集合，使函数在此集合上取

1) 实数值； 2) 纯虚数值.

70. 求出满足 1) $|\operatorname{tg} z|=1$; 2) $|\operatorname{th} z|=1$ 的一切 z 值.

按定义，$\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi+2\pi ik$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, $\ln z=\ln r+i\varphi$ $(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$（$\ln z$ 称为量 $\operatorname{Ln} z$ 的主值）.

71. 求下列各值：

1) $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;

3) $\operatorname{Ln}\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

72. 找出导致伯努利 (Bernoulli) 谆论的推理错误：$(-z)^2=z^2$, 故 $2\operatorname{Ln}(-z)=2\operatorname{Ln} z$; 因此 $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln} z$!

73. $\operatorname{Im} f(z)$ 在 $z=2$ 的初始值取为零. 点 z 绕以 $z=0$ 为圆心的圆依逆时针方向运动一周又回到点 $z=2$. 假设 $f(z)$ 当 z 变动时为连续变化，试对下列函数 $f(z)$ 求出在绕所述回路后 $\operatorname{Im} f(z)$ 的值：

1) $f(z)=2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z)=\operatorname{Ln}\frac{1}{z}$;

3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z)=\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln}(z+1)$.

按定义，对任何复数 $a\neq 0$ 与 α,

$$a^\alpha=\exp\{\alpha\operatorname{Ln} a\} \tag{1}$$

或者如通常那样[1]，假定 $\exp z$ 即为 e^z, 则 $a^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln} a}$.

74. 求出下列幂的一切值：

1) 按照(1)，$e^z=\exp\{z\operatorname{Ln} e\}=\exp\{z(1+2\pi ik)\}$. 然而，除另行说明外，我们将假定 $k=0$，即如通常那样，$e^z=\exp z$.