高等学校试用教材

高等数学

上册

黄正中 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

上 册

黄正中编

人民教育出版社

内 容 简 介

本书是在1961年出版的《高等数学》基础上修订再版的．此第二版仍分上、下两册．上册内容包括函数与极限，一元函数的微积分，无穷级数，空间解析几何等．可供综合大学和师范学院物理类专业高等数学课程作为试用教材或参考书．

高 等 数 学

上　册

黄 正 中 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

1961年7月第1版

1978年3月第2版　1978年7月第1次印刷

书号 13012·095　　定价 0.91 元

第 一 版 序

这是编者在1958—1960年对南京大学物理系学生授课的讲稿. 此稿曾在该系试用过三次，在每次讲授时均进行了必要的修改.

全书共十九章，分上下二册出版. 其中解析几何两章，数学分析部分十章，微分方程三章，线性代数四章. 解析几何的内容主要是为了学习数学分析部分做准备工作，将平面部分(第一章)和空间部分(第七章)分段讲授，一方面便于接受，另一方面也符合学以致用的原则. 微分方程在讲完不定积分(第四章)后就已开始介绍，这是为了同学可以借此熟练不定积分的公式和技巧，又可扩大力学中做题的范围；但正式对微分方程作较系统性的介绍，系自第十三章开始. 这时候，同学已学完数学分析的基本理论和方法，可用微分方程作为这些理论和方法的综合利用. 线性代数放在最后四章(第十六章到第十九章). 作者认为空间概念宜从二维到三维，再到n维，逐步引入，这是符合认识过程，容易讲授的一种方法. 傅里叶级数，变分法，积分方程和二阶偏微分方程都当作数学物理方法的内容，本书没有编入. 希望读者学完本书后，再读南京大学梁昆淼所著数学物理方法，估计内容衔接，在学习上没有困难.

本书在编写时曾力求简明扼要，重点突出，特别在运算技巧和方法上，给予足够重视，所以例题很多(尤其是第四章不定积分)；据编者讲课经验，这些例题对同学是有帮助的，但不必全在课堂上讲授. 有些过分繁难的定理，例如柯西关于数列极限存在的准则，隐函数存在定理，无穷级数的乘法定理等等，本书则述而未证，但

都指明参考书，读者如感需要，可以自行翻阅；其他重要定理的证明，估计在大学一二年级同学接受能力以内者，都详细写出．这些证明一方面可使同学加深对内容的理解，另一方面证明本身也是一种数学训练；就个人浅见，对于综合性大学物理系四五年制的毕业生来说，具有较高的数学理论水平是有益的．

本书第一次编写时，是一面讲课，一面写稿，因此任务重，时间紧，在教材处理和文字修饰等方面都是十分不够的．嗣经南京大学叶彦谦，王明淑，吴中海，仇庆久等同志在第二次使用后，承提出许多修正意见；最近又承北京大学邵士敏同志，北京师范大学朱鼎勋同志，中国科学技术大学龚升同志提供许多改进意见；这些意见都非常重要，此次修订时，都已尽可能采用；编者谨此致谢．

此次出版承唐述钊、吴中海、张天岭、陈翔炎、黄开斌等同志在百忙中代为整理、修订、校对、验算和绘图，使此书能早日付印，深情硕谊，编者永志不忘．

当然，本书因付印匆促，同时限于编者的水平，可能还存在许多缺点和错误，请读者发现后，立即投函指正，编者实感激不已．

黄正中

1961 年 4 月 16 日于南京大学

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

再 版 序

这本书1961年以交流讲义印行，弹指间十七年了. 在使用过程中，承各方面的同志提出许多重要的改进意见，修订似乎刻不容缓，苦于种种原因，直到去年秋季，这愿望才能见诸行动，扪心自问惭愧无已.

在修订过程中，按照各方要求，作了一些变动，其中主要的有下列几点.

(1) 平面解析几何与三级以下的行列式按规定为中学教材，已自本书中全部删去. 为了平衡上下册的内容，空间解析几何移入上册.

(2) 全书各章都配备了习题，以便读者练习，固可检查阅读效果，又可熟练运算技巧，加深内容的理解. 部分习题附有答案，以便核对. 附有 * 号的习题比较困难，要费一番思索才能做出，学生可根据具体情况酌量选做，或全部不做.

(3) 个别地方作了补充解释，以便于自学. 特别是线性代数部分增添了例题，将有助于概念的巩固.

由于各校各专业对数学要求的深度和广度难于一致，本书把部分章节附上 * 号，以便教学时数不足时删去，不会影响课程的进行. 部分内容列入附录，以供学生需要时课外阅读. 若将本书一字不漏地照讲，时间可能会不够的. 事实上，在大学阶段，应该培养学生自己钻研的能力，完全靠教师讲授是不好的. 只要基本内容讲清楚，学生完全掌握，其它部分，学生可以举一反三，无师自通.

在修订过程中得老同学李立柔同志的帮助甚多，许多数字计算与习题答案，承她反复核算，避免了不少错误．微分方程与线性代数中部分习题是南京大学王现同志、韩继昌同志代为挑选的，并蒙提供答案，使我省去不少劳动．全书插图承傅瑜明同志精心重画，南京大学气象系积极支持．倘使没有这些同志的热情帮助，及时交稿是不可能的．

在本书付印之前，又蒙北京大学张顺燕同志，复旦大学魏国华同志，武汉大学阮荆州同志，福州大学杨信安、林可容两同志，湘潭大学陈锐深同志，江西大学袁斯诚同志细心审阅，提供许多改进意见，对本书质量提高极有帮助，编者都尽可能采用，谨此一并致谢．

这次修订仍感时间匆促，可能还有多处错误未能发现，请读者看出后，立即投函指正，以便于下次修订为感．

编者

1978 年 2 月

上册目录

33597

第三章 不定积分

第四章　定积分

第五章　无穷级数

第六章　空间解析几何 · 矢量

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　函数与极限

§1. 函数概念

日常习见的数学问题尽管多种多样，其中出现的量大体可分为两种．一种量的值在问题的讨论中保持不变，我们称它为**常量**，习惯上以拉丁字母 $A,B,C,\cdots$；或 $a,b,c,\cdots$ 表之，另一种量是它的值可以变动，我们称它为**变量**，通常用 $x,y,z,\cdots$ 表之．当若干个变量 $x,y,z,\cdots,u$，w 之间不存在任何关系，它们所取的值不互相牵连，我们称这些变量是相互**独立**的．如果在某一过程中变量 w 与独立变量 $x,y,z,\cdots,u$ 之间存在某种关系，当变量 $x,y,z,\cdots,u$ 之值给定时，变量 w 之值亦随之确定，我们便说变量 w 与变量 $x,y,z,\cdots,u$ 之间存在**函数**关系，以符号

$$w=f(x,y,z,\cdots,u)$$

表之，并称 $x,y,z,\cdots,u$ 为这函数的**自变量**，w 为**因变量**．如函数只有一个自变量，便称为**单元函数**，否则称为**多元函数**．例如：

(i) 一定量的理想气体的体积 V 是它的压强 P 和它的绝对温度 T 的函数：

$$V=\frac{RT}{P}\ (R\text{为常数}).$$

(ii) 电力用户所耗电能 Q 是电压 U，电流 I 和时间 t 的函数：

$$Q=UIt,$$

或者引入电阻 R，则藉欧姆定律：$U=IR$，得

$$Q=RI^2t$$

这些例均为多元函数．为简单起见，本阶段暂以讨论一个自变量

(往往记为x)的函数为限．在上述例(i)中，如果一定量的气体的温度不变，则其体积只是压强P的函数．

读者已经熟知的函数有：

(1) 多项式 $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $(a_0\neq 0)$,

(2) 有理函数 $g(x)\equiv\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, $(a_0, b_0\neq 0)$,

(3) 三角函数 $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ 等，

(4) 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arc\,tg} x$ 等，

(5) 指数函数 a^x $(a>0)$,

(6) 对数函数 $\lg x$,

等等．这些函数的自变量x所能取之值并不完全一致．事实上，就多项式$f(x)$而言，自变量x可取任何值．有理函数则不然，自变量x不能取使分母

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m=0$$

之值．同样，反三角函数$\arcsin x$的自变量x须满足条件$-1\leqslant x\leqslant 1$, $\lg x$的自变量x必须大于零，所以自变量x所能取之值有时候有所限制．

我们把一个函数的自变量x所能取的值的全体，称为函数$f(x)$的**定义域**．当x的值属于函数$f(x)$的定义域时，这函数必有确定的与x相对应的值．例如x^2-x+2的定义域为$-\infty<x<\infty$;

$\dfrac{x+1}{x-2}$的定义域为$x=2$以外的一切实数；

$\arcsin x$的定义域为$-1\leqslant x\leqslant 1$;

$\operatorname{arc\,sec} x$的定义域为$x\geqslant 1$和$x\leqslant -1$;

$\lg x$的定义域为$x>0$.

在本书内，恒假定自变量所取之值为实数，这类函数简称为**实变函数**．除特别声明外，一般都假定函数的值也是实数．

通常在有向直线$\overrightarrow{Ox}$上建立坐标，借此把它上面的点和实数一

一对应，然后一个函数的定义域便可用有向直线上的某些点的集合来代表．特别是，我们说满足条件：$a\leqslant x\leqslant b$ 的一切点 x 组成一个**闭区间**，以记号$[a,b]$表之．满足条件 $a<x<b$ 的点组成一个**开区间**，以记号(a,b)表之．开区间不包含区间的端点．此外

$[a,b)$　表示满足条件 $a\leqslant x<b$ 的一切点 x 的全体，

$(a,b]$　表示满足条件 $a<x\leqslant b$ 的一切点 x 的全体．

为醒目起见，通常用平面上的曲线来表示一个自变量的函数．以自变量 x 为动点 P 的横坐标，因变量 y 为 P 点的纵坐标，当(x,y) 按照函数关系 $y=f(x)$ 变化时，P 点的轨迹便是函数 $y=f(x)$ 的图．读者在高中已经学过三角函数、指数函数和对数函数的图，它们分别如下图所示：

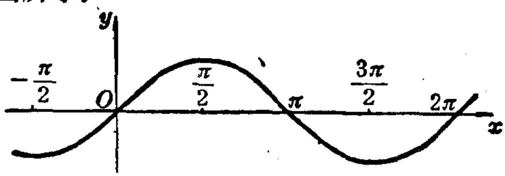

图 1-1　$y=\sin x$

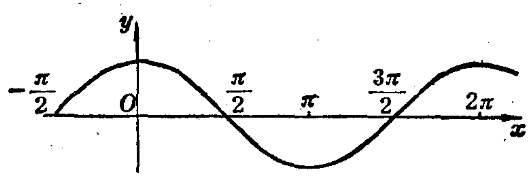

图 1-2　$y=\cos x$

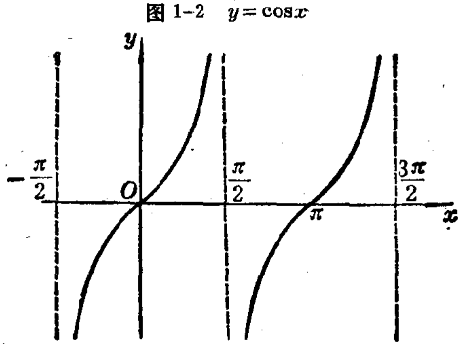

图 1-3　$y=\operatorname{tg}x$

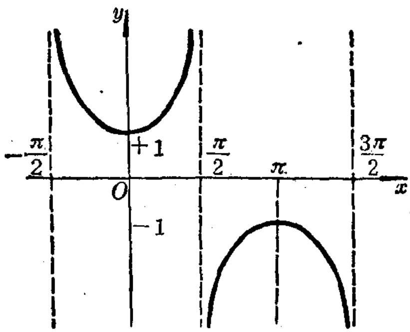

图 1-4　$y=\sec x$

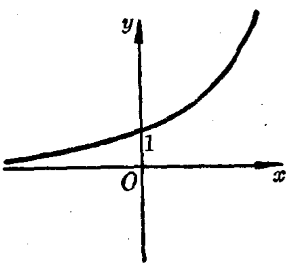

图 1-5　$y=a^x\,(a>1)$

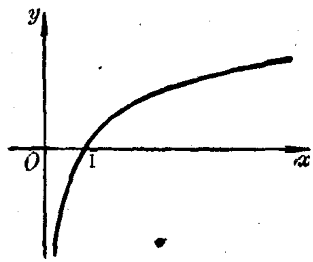

图 1-6　$y=\lg x$

要说明一个函数，必须明确指出：(1) 自变量变化的范围，(2) 因变量依赖于自变量的关系，两者缺一不可．前者是函数的定义域，后者是函数的刻画，将其译成数学语言，便成为函数的表达式．在一个函数的定义域内，不必要求函数可用一个式子表示，换句话说，可能定义域分为几部分，在每一部分中函数的表达式是一个式子，这些式子未必相同．例如我们定义

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ (x-2)^2, & 1<x<3; \\ \dfrac{x-3}{4-x}, & 3\leqslant x<4. \end{cases}$$

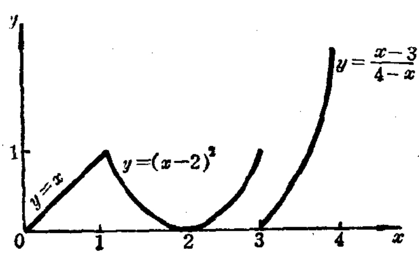

图　1-7

$f(x)$ 代表一个函数，它的定义

域为 $0\leqslant x<4$，因为当 x 之值在 $[0,4)$ 内时，$f(x)$ 都有完全确定的对应值.

为了研究和表达一个函数的性质，画图是很重要的一种方法；因为从图上可以看出函数变化的特征和趋势，又能估计它在任何指定一点的近似值. 此外，有了图之后，便对这函数具有清晰的概念，甚至说，**才算真正认识了这函数**. 当然，要画好一个函数的图，需要耐心细致的工作，对初学者是相当麻烦的. 画图可以帮助研究函数；反过来，对函数作理论上的探索，也有助于画图，这两者互相依附的关系，读者将在第二章学到.

多值函数. 例如对于 $\sin y=x$，当给定 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的对应值不是一个，而是无穷多个：$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 当我们限制因变量 y 的值在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内时，便用记号 $\arcsin x$ 来表示这个函数关系.

有时候，变量 u 是变量 y 的函数：$u=\phi(y)$，而变量 y 又是变量 x 的函数：$y=f(x)$；并且当点 x 落在函数 $f(x)$ 的定义域 D 内时，$f(x)$ 的值落在函数 $\phi(y)$ 的定义域内. 于是当点 x 属于 D 时，函数

$$u=\phi(y)=\phi[f(x)]\equiv F(x)$$

有完全确定的值. 换句话说，$F(x)$ 是定义在 D 上的函数，我们称这样的函数为**复合函数**，因为它实际上是一个函数的函数. 例如：

$(\sin x)^2$, $\sin(x^2)$, $\cos(\omega t-\varphi)$, $\lg|\cos x|$, $(4+x^2)^{x+1}$ 等等都是复合函数.

前面已指出：函数关系 $y=f(x)$ 表示 y 之值随 x 之值而确定. 那末，当 y 之值给定后，为了适应这函数关系，x 之值也因而确定

(不过 x 的对应值可能不止一个). 换句话说, x 之值也随 y 之值而变, 因此, 这同一关系又可表示为 $x=g(y)$. 就解析表达式来说, $g(y)$ 和 $f(x)$ 可以完全不同, 习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 于是上面的关系式又可写成 $y=g(x)$. $f(x)$ 和 $g(x)$ 互称为**反函数**. 因此, 当 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, $x=g(y)$ 和 $y=f(x)$ 便表示相同的函数关系. $y=g(x)$ 的图象恰好和 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y-x=0$ 对称. 这是因为若 $P(x_1, y_1)$ 在曲线 $y=g(x)$ 上, 则 $y_1=g(x_1)$, 从而 $x_1=f(y_1)$, 故 $Q(y_1, x_1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上一点, PQ 的垂直等分线正好是直线 $y-x=0$. 例如 $y=10^x$ 和 $y=\lg x$ 互为反函数, 它们的图象关于直线 $y-x=0$ 是对称的, 见图 1-8.

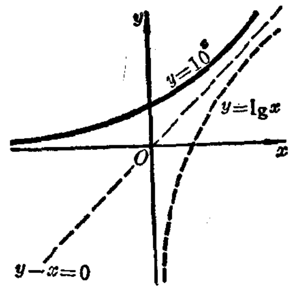

图 1-8

习 题 一

1. 设 $\triangle ABC$ (图 1-9) 的底 $AB=b$, 高 $CD=h$. 它的一个内接矩形 $KLMN$ 的高为 x, 面积为 S, 求 S, x, b, h 之间的函数关系.

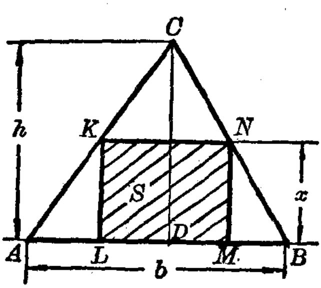

图 1-9

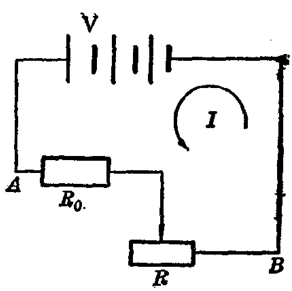

图 1-10

2. 图 1-10 表示电池组 V, 固定电阻 R_0 和可变电阻 R 组成的电路. 在一段不长的时间内, A, B 两点间的电压 V 可以看作一个常量, 求出电流 I 和可变电阻 R 之间的函数关系.

试读结束, 需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com