

數 學 譯 叢

單葉函數論中的一些問題

Г. М. 戈魯辛

科 學 出 版 社

數 學 譯 叢

單葉函數論中的一些問題

Г. М. 戈魯辛 著

陳 建 功 譯

科 學 出 版 社

1956年1月

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ
Г. М. ГОЛУЗИН
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР МОСКВА ЛЕНИНГРАД
1949

內 容 提 要

原書分三章,每章各用一個特殊的方法——第一章是積分平均法,第二章是參數表示法,第三章是變分法——來處理各式各樣的有關單葉函數的極值問題。

單葉函數論中的一些問題

翻譯者	陳	建	功
出版者	科	學	出 版 社
	北 京 東 皇 城 根 甲 42 號 北京市書刊出版業營業許可證出字第061號		
印刷者	上海永祥印書館印刷廠		
總經售	新	華	書 店
書號: 0381	1956 年 1 月 第 一 版		
(譯) 236	1956 年 1 月 第 一 次 印 刷		
(滬) 0001—1,435	開本: 787×1092 1/25		
字數: 99,000	印張: 4 18/25		
定價: (8) 0.75 元			

緒 言

單葉的共形映照，具有許多值得重視的性質，這些性質，當着實行這種映照的時候，表現在對於映照函數的各種估值。在這些性質之中，其重要的是在映照函數的偏差定理和係數估計。

在1916—1937年的時期中，關於這方面成就，著者已經把它們收集在“單葉函數論中的域內問題”一篇論文中^{[3]1)}。本書將這些問題近時得到的結果敘述出來²⁾。關於這些問題的研究，有三個不同的方法——積分平均估計法，單葉函數的參數表示法，變分法。每一個方法，有它的優點；對於這個問題利用此法，對於別的問題，可能要用他法；所以三個方法互有短長，不可偏廢。第一個方法是最初等的，它能引到許多定性的估計；但是這些估計，一般地說，並不是最終的。第二個方法給大串的極值問題以優秀而不是無聊的解答。最後，第三個方法——變分法——對於一大類的極值問題，給予極值函數的解析特徵以強有力的定性結果；在許多情況中，它也能引到問題的最後解決。這些方法相應地劃分這本書做三章。著者必須指出：本書所採取的材料，大部分係著者自己已經發表過的結果，還有一部分是在尚未發表過的論文中。

1) 方括號中的數目字是指書末文獻中的號碼。

2) 但是和當前的問題直接有關係的材料，雖然“古老”的結果，也把它收進。本書，如書名所示，專論單葉函數；單葉函數的種種的拓廣，置之度外而不論；例如局部單葉函數，平均 p -葉函數，雖然也可以從偏差和係數估計的着眼點來從事研究，但是不納入本書範圍之內。

配 號

對於單葉函數的族類，下文所用的記號，規定於下：

S 表示 $|z| < 1$ 中正則而且單葉的函數 $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$ 的全體所成之族；

Σ 表示在區域 $|\zeta| > 1$ 中半純且單葉的函數 $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots$ 的全體所成之族；

S_p 是 S 之一子族，其中任一函數的展開，光是含有乘幂 z^{pk+1} ($k=0, 1, 2, \cdots$) 的項；

Σ_p 是 Σ 之一子族，其中任一函數的展開，光是含有乘幂 ζ^{pk+1} ($k=0, -1, -2, \cdots$) 的項；

Σ^0 也是 Σ 之一子族，其中任一函數在 $|\zeta| > 1$ 中沒有零點；

S' 和 Σ' 分別是 S 和 Σ 的子族，其中任何函數映照區域 $|z| < 1$ 或 $|\zeta| > 1$ 於無外點的區域，而以有限枝解析曲線為境界。 S' 中函數之像的境界的某些枝延展到 ∞ 。

此外，在第二章中我們還要考慮到函數族 S^* ，它的定義詳第二章 § 10。

目 錄

緒言

記號

第一章 積分平均估計法	1
§ 1. 有限增量之比的估計	1
§ 2. 偏差定理的加強	5
§ 3. 有關平均模數的引理	8
§ 4. 係數的估計	13
§ 5. 係數敘列之相互增高的牽制	15
§ 6. 對於相鄰兩係數相互增大的限制	19
§ 7. 對於實數係數之函數的估計	24
§ 8. 係數估計的根本的改進	28
第二章 參數表示法	35
§ 9. 單葉函數的參數表示	35
§ 10. 開始幾項係數的估計	46
§ 11. 函數的模與其導函數的模相互增長的限制	53
§ 12. 函數模之和的估計	59
§ 13. 對於商式 $\frac{F(\zeta) - F(\zeta')}{\zeta - \zeta'}$ 的估計和偏差定理的加強	61
第三章 變分法	66
§ 14. 單葉函數的變分	66
§ 15. 係數的極值	76
§ 16. 係數的相對極值	86
§ 17. 極值和偏差定理的優越形式	94
§ 18. 一種平均直徑的極值	105
參考文獻	115

第一章

積分平均估計法

§ 1. 有限增量之比的估計

定理 1. 設 $z = F(\zeta) \in \Sigma$; $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ 是區域 $|\zeta| > 1$ 中任意的 n 個點, $n \geq 1$, 那末成立如下的估值^[10]:

$$\prod_{\nu, \nu'=1}^n \left| 1 - \frac{1}{\zeta_\nu \bar{\zeta}_{\nu'}} \right| \leq \prod_{\nu, \nu'=1}^n \left| \frac{F(\zeta_\nu) - F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu - \zeta_{\nu'}} \right| \leq \frac{1}{\prod_{\nu, \nu'=1}^n \left| 1 - \frac{1}{\zeta_\nu \bar{\zeta}_{\nu'}} \right|}, \quad (1)$$

但是中間的乘積中相當於 $\zeta_\nu = \zeta_{\nu'}$ 的因子, 其意義是 $|F'(\zeta_\nu)|$.

證. 引入記號

$$j_1(\zeta, \zeta') = (\zeta - \zeta') \left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}' \zeta} \right), \quad j_2(\zeta, \zeta') = \frac{\zeta - \zeta'}{1 - \frac{1}{\bar{\zeta}' \zeta}}. \quad (2)$$

對於 $|\zeta'| > 1$ 中任一 ζ' , 這些函數都單葉地映照區域 $|\zeta| > 1$ 於 z 平面上。第一個是一具有線段割線的平面, 線段在從點 $z=0$ 射出的射線上; 第二個是一具有圓弧割線的平面, 圓弧的圓心是 $z=0$, 兩函數都有這種性質: $\zeta = \infty$ 映到 $z = \infty$, 而 $\zeta = \zeta'$ 映到 $z=0$ 。

作兩個函數 $G_1(\zeta)$ 和 $G_2(\zeta)$:

$$G_s(\zeta) = \frac{\prod_{\nu=1}^n (F(\zeta) - F(\zeta_\nu))}{\prod_{\nu=1}^n j_s(\zeta, \zeta_\nu)}, \quad (s=1, 2). \quad (3)$$

首先假設函數 $z = F(\zeta)$ 在圓周 $|\zeta| = 1$ 上是正則, 單葉, 且 $F'(\zeta) \neq 0$, 那末 $z = F(\zeta)$ 映照區域 $|\zeta| > 1$ 於以解析的莊檀曲線為

境界之一區域。在此條件下，函數 $G_s(\zeta)$ 在 $|\zeta| \geq 1$ 中是正則的並且沒有零點。寫

$$\prod_{\nu=1}^n (F(\zeta) - F(\zeta_\nu)) = r e^{i\varphi}, \quad \prod_{\nu=1}^n j_s(\zeta, \zeta_\nu) = r_s e^{i\varphi_s},$$

$$G_s(\zeta) = R_s e^{i\Phi_s} \quad (4)$$

的話，就得到

$$\log r = \log R_s + \log r_s, \quad \varphi = \Phi_s + \varphi_s. \quad (5)$$

考察積分

$$L = \int_{|\zeta|=1} \log r d\varphi,$$

但其中積分路線係反時針方向的圓周 $|\zeta| = 1$ 。由函數 $z = F(\zeta)$ 將圓周 $|\zeta| = 1$ 映成曲線 l 的話，那末

$$L = \int_l u dv,$$

但

$$u = \log \left| \prod_{\nu=1}^n (z - F(\zeta_\nu)) \right|, \quad v = \arg \prod_{\nu=1}^n (z - F(\zeta_\nu)).$$

由於一切點 $F(\zeta_1), \dots, F(\zeta_n)$ 都落在 l 的外部，所以 u 和 v 在 l 的內部和 l 的上面是互相共軛的調和函數。由是應用葛林公式並且利用柯西-黎曼的條件，獲得

$$L = \int_l u dv = \int_l u \frac{\partial v}{\partial x} dx + u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \iint \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dy =$$

$$= \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (6)$$

此地二重積分所取的範圍是 l 的內部區域。由是即得 $L > 0$ 。另一方面，從(5)得到

$$L = \int_{|\zeta|=1} \log R_s d\Phi_s + \int_{|\zeta|=1} \log R_s d\varphi_s + \int_{|\zeta|=1} \log r_s d\Phi_s +$$

$$+ \int_{|\zeta|=1} \log r_s d\varphi_s. \quad (7)$$

由於 $\log R_s$ 和 Φ_s 在區域 $|\zeta| > 1$ 中是互相共軛的調和函數，當 $\zeta = \infty$ 時，都等於 0 (Φ_s 不能不有這樣的規定)，因此對於 (7) 中第一個積分，在區域 $|\zeta| > 1$ 上仍可應用葛林公式。由是考慮到積分路線的方向，如等式 (6) 的證明，知道此積分是負的。至於最後的積分， ζ 在圓周 $|\zeta| = 1$ 上的話：1) φ_1 等於常數，因此 $d\varphi_1 = 0$ ，2) $\log r_2 = \text{常數}$ ，當 ζ 在 $|\zeta| = 1$ 上移動一周時， φ_2 回到出發點的數值，此積分當 $s=1$ 時等於 0，當 $s=2$ 時也等於 0。根據着上面所說，我們從等式 (7) 斷定

$$\int_{|\zeta|=1} \log R_s d\varphi_s + \int_{|\zeta|=1} \log r_s d\Phi_s > 0. \quad (8)$$

分離積分給出

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=1} \log R_s d\varphi_s + \int_{|\zeta|=1} \log r_s d\Phi_s &= \int_{|\zeta|=1} \log R_s d\varphi_s - \int_{|\zeta|=1} \Phi_s d \log r_s = \\ &= R \left(i \int_{|\zeta|=1} \log G_s(\zeta) d \sum_{\nu=1}^n \overline{\log j_s(\zeta, \zeta_\nu)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

由於，依照函數 $j_s(\zeta, \zeta')$ 在 $|\zeta| = 1$ 上的幾何意義，

$$\arg j_1(\zeta, \zeta') = \text{常數}, \quad \log |j_2(\zeta, \zeta')| = \text{常數},$$

因此，

$$\overline{\log j_s(\zeta, \zeta')} = (-1)^{s+1} \log j_s(\zeta, \zeta') + \text{常數}, \quad (s=1, 2),$$

而 (9) 等於

$$(-1)^{s+1} R \left(i \sum_{\nu=1}^n \int_{|\zeta|=1} \log G_s(\zeta) d \log j_s(\zeta, \zeta_\nu) \right). \quad (10)$$

用留數定理來計算此地的積分，(9) 等於上面的式子

$$2\pi (-1)^{s+1} R \left(\sum_{\nu=1}^n \log G_s(\zeta_\nu) \right) = 2\pi (-1)^{s+1} \sum_{\nu=1}^n \log |G_s(\zeta_\nu)|,$$

而不等式 (8) 取成形式

$$(-1)^{s+1} \sum_{\nu=1}^n \log |G_s(\zeta_\nu)| > 0, \quad (s=1, 2),$$

即

$$\prod_{\nu=1}^n |G_1(\zeta_\nu)| > 1, \quad \prod_{\nu=1}^n |G_2(\zeta_\nu)| < 1. \quad (11)$$

但是從(2)和(3)得出

$$G_1(\zeta) = \prod_{\nu=1}^n \frac{F(\zeta) - F(\zeta_\nu)}{\zeta - \zeta_\nu} \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_\nu \zeta}},$$

$$G_2(\zeta) = \prod_{\nu=1}^n \frac{F(\zeta) - F(\zeta_\nu)}{\zeta - \zeta_\nu} \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_\nu \zeta}\right).$$

由是，從不等式(11)得到估計式(1)。

我們豫先假設函數 $F(\zeta)$ 在圓周 $|\zeta|=1$ 上是正則和單葉，且 $F'(\zeta) \neq 0$ 。假如 $F(\zeta)$ 不滿足這些情況，那末我們可以應用估計式(1)時函數 $\frac{1}{\rho} F(\rho\zeta)$ ， $\rho > 1$ 。此函數屬於函數族 Σ ，且滿足上述種種條件，令 $\rho \rightarrow 1$ ，乃得關於 $F(\zeta)$ 自身的估計式(1)。定理完全證畢。

我們將在第三章證明：對於區域 $|\zeta| > 1$ 中任何 n 個點 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ，估值式(1)是準確的。

定理 2. 設 $\rho > 1$ ， $F(\zeta) \in \Sigma$ ，對於同圓周 $|\zeta| = \rho$ 上的任意兩點 ζ_1 和 ζ_2 ，我們有準確的估值式^[10]：

$$\left| \frac{F(\zeta_1) - F(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \right| \geq 1 - \frac{1}{\rho^2}. \quad (12)$$

證。設 $F(\zeta) \in \Sigma$ ， ζ_1 是 $|\zeta| > 1$ 中的一點，則函數

$$F\left(\frac{1+\zeta_1\zeta}{\zeta+\bar{\zeta}_1}\right)$$

在區域 $|\zeta| > 1$ 中是單葉的。它在 $\zeta = \infty$ 的附近，有展開式

$$F\left(\frac{1+\zeta_1\zeta}{\zeta+\bar{\zeta}_1}\right) = F(\zeta_1) + (1 - |\zeta_1|^2) F'(\zeta_1) \frac{1}{\zeta} + \dots,$$

所以函數

$$G(\zeta) = \frac{(1 - |\zeta_1|^2) F'(\zeta_1)}{F\left(\frac{1+\zeta_1\zeta}{\zeta+\bar{\zeta}_1}\right) - F(\zeta_1)} = \zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \dots$$

屬於函數族 Σ 。對於此函數應用不等式

$$|F'(\zeta)| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|\zeta|^2}},$$

這是置 $n=1$ 於(1)而得的,在 $|\zeta| > 1$ 上成立着

$$\frac{(|\zeta_1|^2 - 1)^2}{|\zeta + \zeta_1|^2} \cdot \left| \frac{F'(\zeta) F''\left(\frac{1 + \zeta_1 \bar{\zeta}}{\zeta + \bar{\zeta}_1}\right)}{\left[F\left(\frac{1 + \zeta_1 \bar{\zeta}}{\zeta + \bar{\zeta}_1}\right) - F(\zeta_1)\right]^2} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|\zeta|^2}}. \quad (13)$$

設 $|\zeta_2| > 1$, 於(13)置 $\zeta = \frac{1 - \bar{\zeta}_1 \zeta_2}{\zeta_2 - \bar{\zeta}_1}$, 得到

$$\left| F'(\zeta_1) F''(\zeta_2) \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{F(\zeta_1) - F(\zeta_2)} \right)^2 \right| \leq \frac{|1 - \bar{\zeta}_1 \zeta_2|^2}{(1 - |\zeta_1|^2)(1 - |\zeta_2|^2)}. \quad (14)$$

另一方面,當 $n=2$ 時,(1)的左方不等式可以寫成

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{|\zeta_1|^2}\right) \left(1 - \frac{1}{|\zeta_2|^2}\right) \left|1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_1 \zeta_2}\right|^2 \leq \\ & \leq \left| F'(\zeta_1) F''(\zeta_2) \left(\frac{F(\zeta_1) - F(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \right)^2 \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

將(14)和(15)兩個不等式相乘,就獲得

$$\left| \frac{F(\zeta_1) - F(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \right| \geq \sqrt{\left(1 - \frac{1}{|\zeta_1|^2}\right) \left(1 - \frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)}, \quad (16)$$

當 $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \rho$ 時,從(16)得到(12)。估值式(12)是準確的,因為其中的等號對於 Σ 中的函數

$$F(\zeta) = \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} + \text{常數}, \quad \alpha = \arg \zeta_1 + \arg \zeta_2$$

成立(第三章中將證等號的成立限於此函數)。定理證畢。

§ 2. 偏差定理的加強

對於函數族 $\mathcal{S}$ 中的函數 $f(z)$, 我們熟知有不等式

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^2}, \quad r=|z|, \quad (1)$$

在圓 $|z| < 1$ 上成立, 這些估計都是準確的, 其中等號光是在函數

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2}, \quad \alpha = \text{實數常數} \quad (2)$$

時成立。

前節中的定理 2 能將這些估計加強。

定理 1. 設 $0 < r < 1$, $f(z) \in S$, 對於圓周 $|z| = r$ 上的任何兩點 z_1 和 z_2 , 我們有估計^[10]

$$\min(|f(z_1)|, |f(z_2)|) \leq \frac{2}{|z_1 - z_2|} \frac{r^2}{1 - r^2}. \quad (3)$$

當 $z_2 = -z_1$ 時, 估計是準確的。

證. 置 $\zeta_1 = \frac{1}{z_1}$, $\zeta_2 = \frac{1}{z_2}$, 應用前節的(12)於函數 $F(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \in \Sigma$,

獲得

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| \frac{1 - r^2}{r^2} &\leq \left| \frac{1}{f(z_1)} - \frac{1}{f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(z_1)} \right| + \left| \frac{1}{f(z_2)} \right| \leq \\ &\leq 2 \max \left(\frac{1}{|f(z_1)|}, \frac{1}{|f(z_2)|} \right) = \frac{2}{\min(|f(z_1)|, |f(z_2)|)}, \end{aligned}$$

這就是估計式 (3)。當 $z_2 = -z_1$ 時, (3) 中等號被 S 中的函數

$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2}$ 所達到。

定理證明完畢。

系. 設 $f(z) \in S$, $0 < r < 1$, 假如在圓周 $|z| = r$ 上, $|f(z)|$ 在點 z_1 取得最大值, 那末在此圓周上, 成立着估値式

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z - z_1|} \cdot \frac{r^2}{1 - r^2}. \quad (4)$$

這是因為在 $|z| = r$ 上的任何 z , 成立着

$$\min(|f(z)|, |f(z_1)|) = |f(z)|.$$

定理 2. 設 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$, $0 < r < 1$, 對於圓周 $|z| = r$ 上的任何兩點 z_1 和 z_2 , 成立着^[10]:

$$||f(z_1) + f(z_2)| - |f(z_1) - f(z_2)|| \leq \frac{4}{|z_1 - z_2|} \cdot \frac{r^2}{1 - r^2}. \quad (5)$$

特別($z_2 = -z_1$ 的情況), 置

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1}, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n} \quad (6)$$

的話, 在圓 $|z| < 1$ 中, 有估計式

$$||f_1(z)| - |f_2(z)|| \leq \frac{r}{1 - r^2}. \quad (7)$$

證. 應用 §1 的(12)於函數 $F(\zeta) = -\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$, 置 $\zeta_1 = \frac{1}{z_1}$, $\zeta_2 = \frac{1}{z_2}$,

則得

$$|f(z_1)f(z_2)| \leq \frac{r^2}{1 - r^2} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|. \quad (8)$$

將不等式(8)寫成

$$|(f(z_1) + f(z_2))^2 - (f(z_1) - f(z_2))^2| \leq \frac{4r^2}{1 - r^2} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|;$$

由此獲得

$$||f(z_1) + f(z_2)|^2 - |f(z_1) - f(z_2)|^2| \leq \frac{4r^2}{1 - r^2} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|,$$

因之

$$\begin{aligned} & ||f(z_1) + f(z_2)| - |f(z_1) - f(z_2)|| \leq \\ & \leq \frac{4r^2}{|z_1 - z_2|(1 - r^2)} \leq \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|f(z_1) + f(z_2)| + |f(z_1) - f(z_2)|} \leq \\ & \leq \frac{4}{|z_1 - z_2|} \cdot \frac{r^2}{1 - r^2}, \end{aligned}$$

這就是估計式(5), 而由是得(7), (7)中等號對於函數 $f(z) = \frac{z}{1 - e^{ai} z^2}$ 有成立的時候. 定理證明完畢.

定理 3. 設 $f(z) \in S$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1}$, 則

在圓 $|z| < 1$ 上, 有估計式^[6]:

$$|zf'(z)| \leq \frac{4}{1-r} |f_1(z)|. \quad (9)$$

證. 當 $f(z) \in S$ 時, 函數

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z_1}{1+\bar{z}_1\zeta}\right) - f(z_1)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)} = \zeta + \dots$$

也屬於函數族 S , z_1 是圓 $|\zeta| < 1$ 中的任意一點。因此, 它在 $|\zeta| < 1$ 中, 有熟知的估計 $|g(\zeta)| \geq \frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \geq \frac{|\zeta|}{4}$ 。應用此估計式於點

$$\zeta = \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}, \quad |z_2| < 1, \text{ 獲得}$$

$$|f'(z_1)| \leq 4 \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{1 - |z_1|^2} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|,$$

由是, 當 $z_1 = z$, $z_2 = -z$ 時, 從上式得到估計式(9)。

§ 3. 有關平均模數的引理

引理 1. 設 $f(z) \in S$, $\lambda > 0$, $0 < r < 1$, 則有估計^{[20], [23]}:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leq \lambda \int_0^r \frac{M(\rho)^\lambda}{\rho} d\rho, \quad (1)$$

但 $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$ 。

證. 於等式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial |f(re^{i\theta})|^\lambda}{\partial r} d\theta = \\ &= \frac{\lambda}{r} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda \frac{\partial \log |f(re^{i\theta})|}{\partial \log r} d\theta \end{aligned}$$

中最後的偏導數, 利用柯西-黎曼條件:

$$\frac{\partial \log |f(re^{i\theta})|}{\partial \log r} = \frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta},$$

且置 $f(z) = Re^{i\Phi}$, 即得

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta = \frac{\lambda}{r} \int_{\Gamma_r} R^\lambda d\Phi, \quad (2)$$

但 Γ_r 表示圓周 $|z| = r$ 關於函數 $w = f(z)$ 的映像。

設 Γ 和 Γ' 是 $w = u + iv$ 平面上的兩枝解析的莊檀閉曲線, Γ 的內部有原點 $w = 0$, 而 Γ' 的內部有 Γ 。設 w 平面上的極坐標是 R 和 Φ 。記 Γ 和 Γ' 所形成的兩連區域為 B , 在 B 上應用葛林公式且利用柯西-黎曼條件, 逐步達到如下的結果:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} R^\lambda d\Phi - \int_{\Gamma} R^\lambda d\Phi &= \int_{\Gamma' - \Gamma} R^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + R^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv = \\ &= \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(R^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(R^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right] dudv = \\ &= \iint_B \lambda R^\lambda \left[\left(\frac{\partial \log R}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log R}{\partial v} \right)^2 \right] dudv = \lambda \iint_B R^{\lambda-2} dudv, \end{aligned}$$

由是即得

$$\int_{\Gamma'} R^\lambda d\Phi - \int_{\Gamma} R^\lambda d\Phi = \lambda \iint_B R^{\lambda-2} dudv. \quad (3)$$

從這個公式, 當 $\lambda > 0$ 時 (自然當 $\lambda < 0$ 時, 也成立), 成立着不等式

$$\int_{\Gamma'} R^\lambda d\Phi \leq \int_{\Gamma} R^\lambda d\Phi. \quad (4)$$

特別當 Γ' 是圓周 $|w| = R_0$ 的話, 從(4)得到

$$\int_{\Gamma'} R^\lambda d\Phi \leq 2\pi R_0^\lambda. \quad (5)$$

我們應用不等式(5)於如下的情況: Γ 是 Γ_r 而 $R_0 = M(r) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, 然後命 $\varepsilon \rightarrow 0$, 從(2)得不等式

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leq 2\pi\lambda \frac{M(r)^\lambda}{r}.$$

關於 r 從 0 到 r 積分就得着估計式(1)。引理證畢。

引理 2. 對於 S 中的函數 $f(z)$, 當 $0 < r < 1$ 時, 我們有估計式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq \\ & \leq \frac{1}{r} \sqrt[pk]{\frac{1}{e}} \sqrt[p]{\frac{1}{1-r}} M(\sqrt{r})^{\frac{2}{p}} \int_0^r \frac{M(\rho)^k}{\rho} d\rho, \end{aligned} \quad (6)$$

此地 $k = 2\lambda + 2 - \frac{2}{p} > 0$, p 是一正整數, $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$.

證. 我們引入函數

$$f_p(z) = \sqrt[p]{f(z^p)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(p)} z^{np+1}, \quad (7)$$

這是屬於函數族 S_p 的; 因為函數 $z' = z^p$ 映照圓 $|z| < 1$ 於 p 葉的圓 $|z'| < 1$, 此多葉圓以 $z' = 0$ 為 p 重枝點; 又函數 $w = f(z')$ 將此 p 葉圓映成 p 葉黎曼面, 這是從全同的 p 葉的曲面所組成, 具有唯一的枝點 $w = 0$; 最後, 函數 $w' = \sqrt[p]{w}$ 將此 p 葉的黎曼面鋪成單葉面。

從(7)得

$$f'_p(z) = z^{p-1} f(z^p)^{\frac{1}{p}-1} f'(z^p),$$

由是

$$f'(z) = z^{\frac{1}{p}-1} f(z)^{1-\frac{1}{p}} f'_p(z^{\frac{1}{p}}).$$

記(6)中左邊的積分為 I , 以上式 $f'(z)$ 的值代入, 即得

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\lambda+1-\frac{1}{p}} |f'_p(z^{\frac{1}{p}})| d\theta,$$

由是

$$I \leq \frac{1}{r} \sqrt[p]{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^k d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_p(z^{\frac{1}{p}})|^{\frac{2}{p}} r^{\frac{2}{p}} d\theta. \quad (8)$$

現在將根號中的每一積分給它一個估計。用引理 1 來估第一個積分, 獲得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^k d\theta \leq k \int_0^r \frac{M(\rho)^k}{\rho} d\rho. \quad (9)$$

至於第二個積分,則由(7)得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_p(z^{\frac{1}{p}})|^2 r^{\frac{2}{p}} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (np+1)^2 |c_n^{(p)}|^2 r^{2\frac{np+1}{p}}. \quad (10)$$

但是對於正數 m , 當 $0 < x < 1$ 時, 我們有

$$x^m(1-x) \leq \max_{0 < x < 1} (x^m(1-x)) = \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} = \frac{1}{m} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{em},$$

即

$$m \leq \frac{e^{-1}}{x^m(1-x)}. \quad (11)$$

此地設 $m = \frac{np+1}{p}$, $x = r$, 乃得

$$np+1 \leq \frac{pe^{-1}}{r^{\frac{np+1}{p}}(1-r)},$$

而(10)給出不等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_p(z^{\frac{1}{p}})|^2 r^{\frac{2}{p}} d\theta \leq \frac{pe^{-1}}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} (np+1) |c_n^{(p)}|^2 r^{\frac{np+1}{p}}. \quad (12)$$

但是最後的級數,其和等於以 π 除由函數 $w = f_r(z)$ 映照圓 $|z| < r^{\frac{1}{p}}$ 所得映像的面積,因此它決不超過

$$\left[\max_{|z|=r^{\frac{1}{2p}}} |f_p(z)|^2 \right]^2 = \max_{|z|=\sqrt{r}} |f(z)|^{\frac{2}{p}} = M(\sqrt{r})^{\frac{2}{p}}.$$

因此得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_p(z^{\frac{1}{p}})|^2 r^{\frac{2}{p}} d\theta \leq \frac{pe^{-1}}{1-r} M(\sqrt{r})^{\frac{2}{p}}. \quad (13)$$

運用估計式(9)和(13),從(8)獲得估計式(6)。引理證畢。

引理 3. 假如 S 中的函數 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中滿足條件

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{(1-|z|)^\alpha}, \quad (14)$$

此地的 M 和 α 都無關於 $|z| = r$, 且 $\alpha > \frac{1}{2}$, 那麼^[6]