SUI JI GUO CHENG LUN

〔苏〕И. И. 基赫曼 A. B. 斯科罗霍德 著

随机过程论

第二卷

科学出版社

随 机 过 程 论

第 二 卷

〔苏〕 И. И. 基 赫 曼 / A. B. 斯科罗霍德 著

周概容 刘嘉焜 译

王梓坤 校

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书共三卷．第二卷的基本内容是马尔科夫过程论．在这一卷里，研究马尔科夫过程的一般性质，齐次马尔科夫过程的半群理论，过程的可乘泛函和可加泛函以及各种重要的马尔科夫过程类：跳跃过程、半马尔科夫过程、分枝过程、独立增量过程和有离散分量的过程．书中的许多内容是以前在专著中没有介绍过的．

本书的对象是高等院校概率论及其应用专业的大学生、教师和有关科学技术工作者．

И. И. Гихман　А. В. Скороход
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
Издательство «НАУКА»
Том 2, 1973

随 机 过 程 论
第 二 卷

〔苏〕 И. И. 基 赫 曼　А. В. 斯科罗霍德　著
周概容　刘嘉焜　译
王梓坤　校

责任编辑　刘嘉善

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1986年6月第一版　开本：850×1168　1/32
1986年6月第一次印刷　印张：17 5/8
印数：0001—3,700　字数：465,000

统一书号：13031·3186
本社书号：4776·13—1

定价：4.95 元

前　　言

《随机过程论》第二卷的基本内容是马尔科夫过程．第一章和第二章是马尔科夫过程和齐次马尔科夫过程的一般理论．后三章研究重要的马尔科夫过程类：跳跃过程，半马尔科夫过程，分枝过程和独立增量过程．

本卷中相当大的一部分结果在专著文献中尚未介绍过．

马尔科夫过程论的部分内容（如扩散过程及其它若干问题），没有写进这一卷．作者准备将这些内容放到第三卷中介绍．第三卷还包括随机微分方程论和可控随机过程．

И. И. 基　赫　曼

A. B. 斯科罗霍德

目　　录

引　论

马尔科夫过程在随机过程论中占有特殊的地位. 这是因为在马尔科夫过程的定义中本质上使用了概率论的概念，而正是这些概念使概率论从一般测度论中分离出来，成为一门独立的学科. 以独立性概念为基础的概率论的直观，在马尔科夫过程论中体现得最完整.

马尔科夫过程论的另一个重要特点，是它可以用不多的构造性的特征量，来描述过程的全部有穷维分布，从而可以计算过程各种泛函的分布.

注意，对于其它一般过程类(高斯过程类除外)，通常只能确定概率为 0 或 1 的事件.

最后，马尔科夫过程的一个最重要的特点就是它发展的进化性：过程现时的状态完全决定它将来的概率状态. 因此，在很多场合，如果适当地扩充过程的相空间，就可以把所要研究的过程化为马尔科夫过程. 另一方面，由过程发展的进化性可以导出递推关系式(对离散时间情形)或进化方程(对连续时间情形)，从而决定过程的概率特征.

当前，在随机过程论中很大程度上是研究各种马尔科夫过程类.

作为马尔科夫链的推广产生了马尔科夫过程的概念. 马尔科夫链是一种试验序列，最初由 A. A. 马尔科夫所研究. 和 Bernoulli 概型不同，对马尔科夫所研究的序列，将来试验中事件出现的概率依赖于过去试验的结果. A. H. Колмогоров 在《概率论的解析方法》(1931 年)一文中提出了马尔科夫过程的一般概念. 在这篇文章中 A. H. Колмогоров 研究了随机决定体系，也就是现时状态能完全决定将来概率状态的体系：这些体系是由函数

$P(s, x, t, B)$ 描述的，其中 $P(s, x, t, B)$ 是《体系在时刻 s 处于状态 x，而在时刻 t $(t > s)$ 的状态属于 $B \in \mathfrak{B}$ ≫ 的概率，$\mathfrak{B}$ 是相空间 $\mathscr{X}$ 的子集的 σ 代数. $P\{s, x, t, B\}$ 称做转移概率. 由全概率公式和随机决定性可知，转移概率满足下列关系式:

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B) \cdot$$
$$(s < u < t), \tag{1}$$

其中 $\mathscr{X}$ 是体系的相空间. 上式称做 Колмогоров-Chapman 方程.

这里首先出现的一个问题，就是讨论方程(1)的各类解的问题.

当相空间 $\mathscr{X}$ 由有穷或可列个点 $x_1, x_2, \cdots$ 组成时，转移概率由一组函数 $p_{ij}(s, t) = P(s, x_i, t, \{x_j\})$ 所决定，其中 $\{x_j\}$ 是一个点 x_j 所组成的集合. A. H. Колмогоров 证明了，在一定的条件下函数 $p_{ij}(s, t)$ 满足下列微分方程组

$$\frac{dp_{ij}(s, t)}{ds} = \sum_k a_{ik}(s) p_{kj}(s, t),$$

$$\frac{dp_{ij}(s, t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(s, t)\, a_{kj}(t).$$

A. H. Колмогоров 所研究的另一个重要的过程类，是有转移概率密度 $p(s, x, t, y)$ 而相空间是有穷维欧几里得空间的过程类. 当函数 $p(s, x, t, y)$ 满足一定条件时(这些条件与体系运动的连续性的直观概念相对应)，A. H. Колмогоров 得到了函数 $p(s, x, t, y)$ 的下列偏微分方程:

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial s} + \sum_k a_k(s, x) \frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{jk}(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} [a_k(t, y)\, p(s, x, t, y)] - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial y_i y_k} [b_{ik}(t, y) p(s, x, t, y)] = 0.$$

A. H. Колмогоров 还给出了欧几里得空间中更一般过程的

方程．这些过程的状态可能连续地变化，也可能跳跃地变化．对所有上述情形，A. H. Колмогоров 成功地把非线性函数方程 (1) 化为更常见的进化型线性微分方程(对中断过程，是积分-微分方程)．这时，过程的本身由相应方程的系数来表征．而这些系数具有简单的概率含意，并且是过程的无穷小特征．

И. Г. Петровский 和 А. Я. Хинчин 曾利用马尔科夫过程来构造扩散的概率模型．后来，这种过程被称做扩散过程．结果表明，由 A. H. Колмогоров 所引进的过程的无穷小特征，不仅可以确定转移概率而且还能计算过程的各种泛函的分布（过程到达某区域的时间以及在到达区域边界时过程值的分布等）．

A. H. Колмогоров 的思想是马尔科夫过程数学理论的基础，并且指出了研究的总的方向：研究过程的无穷小特征，构造对应于给定无穷小特征的转移概率．

然而，A. H. Колмогоров 所引进的过程的无穷小特征并不是在任何情况下都存在的，而且即使存在也不是都能唯一地决定过程的．因此，W. Feller 提出的运用伴随转移概率的算子半群理论的思想是很有成效的．算子半群理论适用于时间齐次过程，也就是转移概率 $P(s, x, t, B)$ 仅依赖于时间变量之差 $t-s$ 的过程，即 $P(s, x, t, B)=P(t-s, x, B)$．这一限制并非实质性的．因为，只要适当地改变相空间，就可以很容易地把任意马尔科夫过程化为齐次马尔科夫过程．

设 $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$ 为所有 $\mathfrak{B}$ 可测的有界实函数的空间．由

$$\mathbf{T}_t f(x)=\int f(y)P(t, x, dy),\ f\in\mathscr{F}_{\mathscr{X}},\ t>0,$$

所定义的算子 $\mathbf{T}_t$ 的族称做伴随转移概率 $P(t, x, B)$ 的半群．该半群完全决定转移概率．另一方面，在很多情形下半群唯一地决定于它的无穷小算子 $\mathbf{A}$，其中

$$\mathbf{A}f(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_t f(x)-f(x)}{t},$$

只要对所有 $x\in\mathscr{X}$ 右侧的极限存在．W. Feller 提出把无穷小算

子 $\mathbf{A}$ 看作过程的无穷小特征． 他利用半群方法论述了闭区间上的全部扩散过程．这时过程的无穷小算子具有如下形式：

$$\mathbf{A}f = a\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}b\frac{d^2f}{dx^2},$$

其中 a 和 b 就是 Колмогоров 方程中的那些系数．算子 $\mathbf{A}$ 的定义域依赖于过程在边界点上的状态，并由满足一定附加（边界）条件的全体二次可微函数组成． W. Feller 和 A. Д. Вентцель 论述了各种可能的附加条件．

E. Б. Дынкин 通过对过程轨道的研究，改进了 W. Feller 的纯解析方法． 他引进了现在普遍使用的马尔科夫过程的一般定义，详细地研究了过程的强马尔科夫性(即关于不依赖于将来的随机时间，过程的马尔科夫性仍然成立)．E. Б. Дынкин 定义了强马尔科夫过程的特征算子 $\mathfrak{U}$． 如果 $\mathfrak{U}$ 的定义域为 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$，则在一些十分自然的条件下有 $\mathscr{D}_A \subset \mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$，并且当 $f \in \mathscr{D}_A$ 时有 $\mathbf{A}f = \mathfrak{U}f$．

和无穷小算子比较，特征算子的优越性在于：为计算特征算子，只需知道在流出初始点任意小的邻域之前（包括流出的瞬时）轨道的状态．所以，在很多场合（例如，对跳跃过程和直线上的连续过程）可以很容易地算出特征算子． 因而，如果特征算子已知，则为求无穷小算子，只需找出它的定义域 $\mathscr{D}_A$． $\mathscr{D}_A$ 是 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$ 的收缩，从而可以利用一定的附加(边界)条件将 $\mathscr{D}_A$ 从 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$ 中划分出来． 可见，在一般情形下也要出现与区间上的扩散过程类似的情形．

刻画与给定的特征算子相对应的无穷小算子定义域的一般性问题尚未解决． 结果表明，该问题的解决与对过程的调和函数和过分函数的研究有关，过程的这两种函数由 G. A. Hunt 所研究．另一方面，E. Б. Дынкин 引进的可乘泛函和可加泛函，对于构造过程的各种变换(这些变换可以大大简化对过程的研究)起着十分重要的作用． 而这些概念又与过分函数的概念有密切的联系．对过程的过分函数以及对可加泛函和可乘泛函的研究，是当前马尔科夫过程一般理论的重要组成部分．在《马尔科夫过程论基础》

和《马尔科夫过程》这两部专著中，E. Б. Дынкин 首次相当完整地阐述了这一理论.

在发展一般理论的同时，对各种专门的马尔科夫过程类进行了详细的研究. 每一个马尔科夫过程类描述一种具有更为独特性质的体系的模型. 下面列举最重要的马尔科夫过程类.

独立增量过程是重要的一类马尔科夫过程，即这样一类过程 $\xi(t)$：对任意 n 和 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，变量

$$\xi(0),\ \xi(t_1) - \xi(0),\cdots,\ \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

相互独立. 这类过程可以看作连续时间的随机徘徊，最初用来描述布朗运动. 这种类型的一般过程是作为(空间)均匀随机介质中任意体系的进化模型而应用的. B. Finetti, A. H. Колмогоров 和 P. Levy 的工作全面论述了随机连续的独立增量过程. 从一般理论的角度来看，独立增量过程就是空间齐次马尔科夫过程.

除对独立增量过程分布的解析论述之外，还研究了过程样本函数的性质. P. Levy 证明了随机连续的独立增量过程没有第二类间断点. A. Я. Хинчин 研究了独立增量过程的局部增长，特别是证明了著名的重对数定律.

为描述生物群体的数量，F. Galton 和 H. W. Watson 提出一类随机过程. 在概括这类过程的基础上，A. H. Колмогоров 和 H. A. Дмитриев 引进了一个特别的可列状态马尔科夫过程类，并称之为分枝过程. 后来，在生物学和物理学中，在描述具有个体(质点)的出现、消失和蜕变的体系时，这类过程得到了广泛的应用. 分枝过程在每一时刻的状态决定于体系中每种类型质点的个数(例如，生物群体每种性别的个数). 每个质点可以蜕变：或完全消失，或裂变为任意数量任何可能类型的其它质点. 如果体系中现有的每个质点以后的演化不依赖于它的年龄以及其它质点的演化，则这样的过程就是马尔科夫分枝过程. 灭绝概率或每种类型的一个质点在无穷小的时间段内蜕变为质点群体的概率，是过程的无穷小特征. 利用这些特征，可以列出体系中质点个数的母函数的微分方程.

当 $t\to\infty$ 时，对体系中质点个数渐近行为的研究，其中包括求全部质点从体系中消失(退化)的概率，以及求质点个数无限增长(暴发)的概率，是很有意义的.

为了更精确地描述现实中的体系，自然应考虑质点蜕变的概率依赖于质点年龄的分枝过程. 这一点是可以做到的，为此只需引进这样一个相空间：质点在相空间中可以变动位置，并且质点蜕变的概率与它在相空间中的位置有关. 这样便得到马尔科夫分枝过程的一般定义，它的状态既取决于每种类型质点的个数，也取决于它们在某一相空间的位置；并且每个质点在相空间中的运动是由一个马尔科夫过程来描述的，该过程的转移概率只依赖于质点的类型.

如果不是用个数而是用质量来表征质点的类型，并且假设质量可以连续地变化，就可以得到分枝过程另一有趣的推广. 开展对一般分枝过程研究的时间尚不很久，而且在这一理论中仅得到了一些初步的结果. 这些结果涉及求过程的无穷小特征，以及根据这些特征来构造过程等.

包括应用在内的大量文献涉及排队论的问题. 服务系统有下列一些特征：输入事件流，服务线的条数，每条服务线对每个事件的服务时间. 如果输入事件流是 Poisson 流，而服务时间服从指数分布，则这样的服务系统由可列状态马尔科夫过程来描述. 我们用一个专门的马尔科夫过程类，即所谓半马尔科夫过程来描述更为一般的服务系统. 半马尔科夫过程有可列个状态，而且由一个状态到另一状态的转移概率依赖于过程在该状态的逗留时间. 如果把半马尔科夫过程的状态连同过程在该状态的逗留时间二者同看成某一体系的状态，则这个体系就成为马尔科夫体系. 在半马尔科夫过程理论中，根据应用特点提出来的基本问题是：计算转移概率，求其在相空间中的平稳分布，确定应用遍历性定理的条件.

具有离散随机扰动的一般过程是半马尔科夫过程的自然推广. 这类过程在接连出现的两个随机扰动之间是马尔科夫过程. 随机扰动的作用，在于过程(以非马尔科夫的方式)突然改变它在

相空间中的状态. 这时，过程的状态连同上次随机扰动出现以来的时间二者构成一个马尔科夫过程.

第二卷的全部内容都是马尔科夫过程论. 在这一卷中，既阐述了一般理论，也论述了最重要的马尔科夫过程类. 但扩散过程除外，我们把它留到第三卷再做详细研究.

在第一章中给出马尔科夫过程、马尔科夫随机函数以及强马尔科夫过程的一般定义；建立强马尔科夫性准则；研究马尔科夫过程的可乘泛函和子过程；研究样本函数的性质. 在叙述一般理论之前，先介绍广义马尔科夫过程，即不依赖于过程样本函数概念的那部分基本理论. 这里导出了各种过程的 Колмогоров 方程.

第二章讲齐次马尔科夫过程. 本章中引进伴随马尔科夫过程的半群、过程的预解式和生成算子；证明 Hille-Yosida 定理，即伴随给定生成算子的半群的存在性定理. 第二章以相当大的篇幅研究紧空间和局部紧空间的 Feller 过程；找出了给定的算子是局部紧空间上 Feller 过程特征算子的条件；描述具有给定特征算子的全部过程. 研究马尔科夫过程的可加泛函. 描述了 Feller 过程的所有连续可加泛函；研究了时间的随机替换.

第三章研究跳跃过程. 给出一般定义，研究跳跃过程的构造；研究可列状态齐次过程、半马尔科夫过程、具有半马尔科夫随机扰动的过程以及有离散随机扰动的一般过程.

第四章研究独立增量过程. 研究过程样本函数的性质，局部增长和在无穷的增长. 对于一维过程得到了过程基本泛函的分布：首达某一水平的时间和通过该水平的跃度的分布以及过程的上确界、下确界和过程值的联合分布. 此外还论述了过程的一些非负的连续可加泛函类.

第五章是马尔科夫分枝过程. 研究具有有限种类型的质点的分枝过程、有连续质量的过程和有分枝的一般马尔科夫过程.

正文中很多地方没有引证原始文献，但在书末附注中一定程度地作了介绍. 在参考文献中作者尽量列入与书中所提到问题有关的马尔科夫过程的全部主要文献.

第一章 马尔科夫过程的一般定义和性质

§1. 广义马尔科夫过程

定义 “无后效”过程的思想是马尔科夫过程概念的基础. 设想有一个可以处于不同状态的体系(或质点). 该体系可能的状态组成一个集合 $\mathscr{X}$,即所谓体系的相空间. 假设体系随时间而进化. 我们以 x_t 表示它在时刻 t 的状态. 如果 $x_t \in B$, 其中 $B \subset \mathscr{X}$, 则说体系在时刻 t 位于集合 B 中.设想体系的发展具有随机性,也就是说,它在时刻 t 的状态一般不是唯一地决定于它在时刻 $s(s < t)$以前的状态,而是随机的,需要用概率的规律来描述. 记 $P(s, x, t, B)$ 为在 $x_s = x$ 的条件下事件 $\{x_t \in B\}(s < t)$ 的概率.

称函数 $P(s, x, t, B)$ 为所考察体系的转移概率. 所谓无后效体系是指这样的体系: 在时刻 $s(s < t)$ 以前体系的运动完全已知的条件下, 它在时刻 t 位于集 B 中的概率等于 $P(s, x, t, B)$. 因而这个概率只依赖于体系在时刻 s 的状态. 在以后各节中将要给出完全严格的定义. 现在我们只引进这一概念的简单的、然而对一系列问题已够用的定义.

记 $P(s, x, u, y, t, B)$ 为在 $x_s = x$, $x_u = y$ $(s \leqslant u \leqslant t)$ 的条件下事件 $\{x_t \in B\}$ 的条件概率. 由条件概率的一般性质有

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, y, t, B) P(s, x, u, dy). \quad (1)$$

对于无后效体系 $P(s, x, u, y, t, B) = P(u, y, t, B)$. 这时,等式 (1) 化为

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy),$$

$$(s < u < t). \quad (2)$$

(2) 式称做 Колмогоров-Chapman 方程. 它可以作为无后效过程,也就是以后所说的马尔科夫过程的定义的基础.

设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是一可测空间. 如果函数 $P(x, B)$, $x \in \mathscr{X}$, $B \in \mathfrak{B}$, 满足下列条件:

a) 对固定的x, $P(x, B)$ 是$\mathfrak{B}$上的测度,并且 $P(x, \mathscr{X}) \leqslant 1$,

b) 对固定的 B, $P(x, B)$ 是 x 的$\mathfrak{B}$可测函数

则称 $P(x, B)$为 半随机核;如果对所有 $x \in \mathscr{X}$ $P(x, \mathscr{X}) = 1$, 则称$P(x, B)$ 为随机核.

在更为一般的场合, 当函数 $P(x, B)$ 的自变量x在不同于$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$的另一可测空间 $\{\mathscr{X}_0, \mathfrak{B}_0\}$ 取值时, 仍使用这些术语.

设 $\mathscr{I}$ 是有穷或无穷半区间. 满足 Колмогоров-Chapman 方程的半随机(随机)核族

$$\{P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B), s < t, (s, t) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}\}$$

称做马尔科夫半随机(随机)核族.

定义 1 称下列对象的全体为广义马尔科夫过程:

a) 可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$,

b) 实数轴上的区间(半区间,线段) $\mathscr{I}$,

c) 马尔科夫随机核族

$$\{P_{st}(x, B), s < t, (s, t) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}\}.$$

核族 $P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B)$ 称为马尔科夫过程的转移概率, 空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 称为体系的相空间; $\mathscr{I}$ 中的点视为时间,而把 $P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B)$ 的值看作"在时刻s($s < t$)体系位于相空间中点x的条件下, 它在时刻t位于集 B"的条件概率.

以后,我们假设核$P_{st}(x, B)$在$s = t$时也有定义. 这时, 自然规定

$$P_{tt}(x, B) = \chi(B, x),$$

其中$\chi(B, x)$是集B的示性函数: 当 $x \in B$, $\chi(B, x) = 1$, 而当$x \bar{\in} B$, $\chi(B, x) = 0$.

显然, 如果这样定义核 $P_{tt}(x, B)$, 则当 $u = s$ 或 $u = t$ 时等式 (2) 一定成立.