



刘政凯 瞿建雄 编著

数字图象恢复与重建

中国科学技术大学出版社



数字图象恢复与重建

刘政凯 瞿建雄

中国科学技术大学出版社

1989·合肥

内 容 简 介

本书介绍数字图象恢复与重建的基本原理和实际应用。全书共分十三章：绪论、频域图象恢复、线性代数恢复、非线性代数恢复、相位恢复、反卷积恢复、频谱外推、遥感图象的恢复、运动模糊的恢复、变质参数的测定、模糊集合图象恢复、图象重建的数学理论基础和图象重建的技术和方法。

本书介绍的理论和方法，属于根据已获得的有关目标的某些信息进行最佳反演的问题。许多学科都涉及到这类问题。因此本书可作为物理、电子技术、生物医学、图象处理、计算机应用等专业高年级学生和研究生的教材和教学参考书，也可供上述领域的科技工作者参考。

数字图象恢复与重建

刘政凯 瞿建雄

责任编辑：于文良 封面设计：王瑞荣

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路 96 号)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32 印张：9.25 字数：237千

1989 年 4 月第1版 1989 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—2500册

ISBN7-312-00092-4/TN·3 定价：3.00元

前 言

数字图象处理已成为现代科学之一，它已发展并形成了一套完整的理论体系；数字图象处理又是现代技术之一，它在数学、物理、化学、生物医学、天文气象、地质地理等许多学科以及在工业、农业和军事上获得了广泛应用。数字图象恢复和重建是数字图象处理中的一个重要分支。我们知道，在图象的形成、传输存贮、记录和显示过程中不可避免地存在程度不同的变质和失真。数字图象恢复就是研究从所获得的变质图象中恢复出真实图象。数字图象重建是研究从所获得的有关目标的投影数据中重建出原始目标。二者都是研究从所获得的信息中反演出有关真实目标的信息。从数学上讲，二者都属于对积分方程求解的数学反演问题。世界上许多学者正从事这方面的研究，发表了许多论文，但是有关这方面的专著并不多。本书力图系统地归纳总结数字图象恢复和重建的基本理论及最新研究成果和发展方向。全书共分十三章。第一章绪论、第二章频域图象恢复、第三章线性代数恢复、第四章非线性代数恢复、第五章相位恢复、第六章反卷积恢复、第七章频谱外推、第八章遥感图象的恢复、第九章运动模糊的恢复、第十章变质参数的测定、第十一章模糊集合图象恢复、第十二章重建的数学理论基础-雷当变换、第十三章图象重建的技术和方法。

本书是在通信与电子系统专业研究生讲义的基础上修改而成的。在编写本书过程中，肖锦玉同志给予了很大帮助，王春涛同志提供了不少实验结果，孙瑛如同志做了许多抄写工作，图象处理实验室的许多同志也给予很多帮助，在此一并致谢。

由于作者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

作 者

1988年1月

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 图象变质的原因及模型.....	(1)
§ 1.2 图象恢复中的病态特性.....	(2)
§ 1.3 非线性系统和线性系统.....	(5)
§ 1.4 离散公式.....	(9)
§ 1.5 循环矩阵和分块循环矩阵的对角线化.....	(14)
第二章 频域图象恢复	(19)
§ 2.1 逆滤波.....	(19)
§ 2.2 维纳滤波.....	(25)
§ 2.3 巴克斯-吉尔伯特最佳滤波.....	(29)
§ 2.4 功率谱相等准则滤波.....	(30)
第三章 线性代数恢复	(33)
§ 3.1 矢量代数基础.....	(33)
§ 3.2 线性代数滤波.....	(36)
§ 3.3 空间域滤波.....	(40)
§ 3.4 平滑.....	(42)
§ 3.5 伪逆恢复.....	(46)
§ 3.6 奇异值矩阵分解 SVD 恢复方法	(51)
第四章 非线性代数恢复	(54)
§ 4.1 正约束.....	(54)
§ 4.2 贾森恢复方法.....	(57)
§ 4.3 投影法.....	(58)
§ 4.4 最大熵恢复.....	(60)
§ 4.5 贝叶斯恢复方法.....	(62)

§ 4.6	蒙特卡罗恢复方法	(69)
第五章	相位恢复	(72)
§ 5.1	相位恢复问题的提出	(72)
§ 5.2	富里叶相位问题的基本理论和方法	(74)
§ 5.3	相位恢复中的难题和未来	(89)
第六章	反卷积恢复	(90)
§ 6.1	反卷积问题的提出	(90)
§ 6.2	预处理	(92)
§ 6.3	相乘反卷积	(102)
§ 6.4	减法反卷积	(104)
§ 6.5	直接反卷积	(109)
§ 6.6	一致反卷积	(112)
§ 6.7	复富里叶平面	(113)
第七章	频谱外推	(116)
§ 7.1	带宽扩展对分辨率的影响	(116)
§ 7.2	泰勒展开法	(118)
§ 7.3	哈里斯外推法	(119)
§ 7.4	长球波函数外推方法	(122)
§ 7.5	迭代外推方法	(129)
第八章	遥感图象的恢复	(131)
§ 8.1	辐射校正	(131)
§ 8.2	大气校正	(135)
§ 8.3	条带噪声的消除	(138)
§ 8.4	几何校正	(139)
§ 8.5	薄云覆盖下景物的恢复	(143)
第九章	运动模糊的恢复	(148)
§ 9.1	运动模糊模型	(148)
§ 9.2	运动模糊的差分恢复方法	(150)
§ 9.3	运动模糊的卷积恢复方法	(152)

§ 9.4	运动模糊的 SVD 恢复方法·····	(154)
§ 9.5	差分投影恢复方法·····	(156)
§ 9.6	状态空间恢复方法·····	(159)
§ 9.7	应用数学规划方法恢复运动模糊图象·····	(163)
§ 9.8	电视图象运动模糊的恢复·····	(167)
第十章	变质参数的测定·····	(175)
§ 10.1	运动模糊点扩展函数的测量·····	(175)
§ 10.2	其它变质参量的测量·····	(178)
§ 10.3	噪声功率谱的估计·····	(181)
第十一章	模糊集合图象恢复·····	(183)
§ 11.1	引言·····	(183)
§ 11.2	POCS 图象恢复方法·····	(185)
§ 11.3	模糊集合理论·····	(187)
§ 11.4	模糊集合公式·····	(191)
§ 11.5	恢复质量的度量·····	(203)
§ 11.6	实验结果的讨论·····	(208)
第十二章	图象重建的数学理论基础-雷当变换·····	(221)
§ 12.1	引言·····	(221)
§ 12.2	二维雷当变换·····	(221)
§ 12.3	富里叶投影定理·····	(224)
§ 12.4	二维雷当反变换·····	(226)
§ 12.5	反投影和求和·····	(230)
§ 12.6	算子形式的小结·····	(232)
第十三章	图象重建的技术和方法·····	(236)
§ 13.1	CT 的发展和分类·····	(236)
§ 13.2	X 射线传输 CT·····	(241)
§ 13.3	衍射 CT·····	(252)
§ 13.4	代数重建方法·····	(264)
§ 13.5	地球物理学中的图象重建方法简介·····	(268)
§ 13.6	非完全投影重建法·····	(278)

第一章 绪 论

§ 1.1 图象变质的原因及模型

在图象的产生,传输和记录过程中,不可避免地会带来某些失真和程度不同的变质,对于这些变了质的图象,进行一定的加工处理,使其恢复出真实的景物,这就是图象复原。也叫做图象恢复。

造成图象变质的原因很多,大致可分以下几个方面:

(1) 成象系统的象差、畸变、有限的带宽等造成的图象失真;

(2) 太阳辐射、大气湍流等造成的遥感照片的失真;

(3) 携带遥感仪器的飞机或卫星运动的不稳定,以及地球自转等造成的几何失真;

(4) 数字图象在采样,量化以及模-数和数-模转换时造成的失真;

(5) 拍照时,相机与景物之间相对运动造成的运动模糊;

(6) 聚焦不良造成的散焦模糊;

(7) 底片感光,图象显示时造成的记录显示失真;

(8) 在图象系统中始终存在的噪声干扰。

图象恢复必须首先建立图象变质模型,也就是说首先必须了解、分析图象变质的机理并用数字模型表示出来。由于图象变质原因很多,变质机理比较复杂,因此,要提供一个完善的数学模型是非常复杂和困难的。但是,在很多通常遇到的实例中,变质系统能够用线性系统模型来近似描述。

例如 $f(\xi, \eta)$ 和 $g(x, y)$ 分别代表真实景物目标和变质图象。那么, 图象变质模型可用图 1.1.1 表示

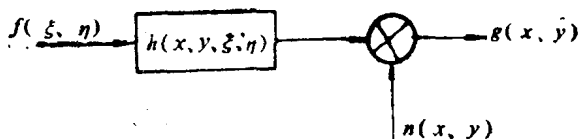


图 1.1.1 图象变质模型

并可用数学式表示为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + n(x, y) \quad (1.1.1)$$

这里, $h(x, y, \xi, \eta)$ 代表系统的点扩展函数, 它也就是通常所说的系统的二维冲激响应函数。 $n(x, y)$ 表示系统中的噪声干扰。它以相加的形式出现在 (1.1.1) 式中, 我们称之为加性噪声。在有些情况下噪声 $n(x, y)$ 是以相乘形式出现, 这时, 我们称之为乘性噪声。

假如系统的点扩展函数与景物平面上各点位置无关, 那么 (1.1.1) 式可改写为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + n(x, y) \quad (1.1.2)$$

此时称 $h(x - \xi, y - \eta)$ 为位移不变点扩展函数。而称 (1.1.1) 式中的 $h(x, y, \xi, \eta)$ 为位移变化点扩展函数。

因此, 图象恢复的任务就是从已知的变质图象 $g(x, y)$ 中, 根据 $n(x, y)$, $h(x, y, \xi, \eta)$ 和 $f(\xi, \eta)$ 的某些先验信息, 对 $f(x, y)$ 作最佳的估值。

§ 1.2 图象恢复中的病态特性

图象恢复中的最困难的问题是在解原方程时经常碰到的病态问题和奇异问题。

忽略传感器噪声及非线性等因素的影响, 成象公式为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, \xi, y, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.2.1)$$

上式的一般分析方法是采用算符理论, 即给定函数 f 的某一定义空间和函数 g 的定义空间, 寻找一变换或算符 T , 对 f 进行 T 变换得到 g , 即

$$T\{f\} \rightarrow g \quad (1.2.2)$$

对于 (1.2.1) 式所示的成像公式, 显然

$$g = T\{f\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, \xi, y, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.2.3)$$

图象恢复的问题就是找到一个逆变换 T^{-1} , 使得

$$T^{-1}\{g\} \rightarrow f \quad (1.2.4)$$

从数学意义上说, 图象恢复的问题是讨论逆变换的存在性和单一性问题。

逆变换的存在性和单一性, 两者都很重要。如果逆变换不存在, 那么从纯数学理论上说, f 是不能从 g 中恢复出来的。但从实际应用上说, 还是可以从 g 中恢复出尽量接近于函数 f 的估值。我们称逆变换 T^{-1} 不存在的问题为奇异问题。另一方面, 即使 T^{-1} 可能存在但不单一, 这就是说可能有很多个逆变换 T^{-1} 。最后, 即使 T^{-1} 存在和单一, 但它可为病态。这就是说, g 中一个很小的扰动可能造成 f 中一个很大的扰动。数学上表示为

$$T^{-1}[g + \varepsilon] = f + \delta \quad (1.2.5)$$

其中, ε 为一任意小的扰动值。 δ 为造成 f 的相应扰动。病态时, $\delta \gg \varepsilon$, 即 δ 不再是可忽略的任意小量。因此, 病态问题意味着从原始图象中存在的某些固有扰动可能造成逆变换中不可预料的影响。图象恢复中经常碰到病态问题和奇异问题。

图象恢复中病态问题可借助于黎曼-勒贝格定理来证明。根据这个定理, 如果 $h(\xi, \eta)$ 是一个可积函数, 那么可以证明

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} h(\xi, \eta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.2.6)$$

在图象恢复中 h 为 x, y 的函数, 同样

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.2.7)$$

这时，图象恢复公式可写成

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) [f(\xi, \eta) + \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)] d\xi d\eta \\ = \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

这意味着，如果在原目标分布上，加上一个具有无穷大频率的正弦分量，其成象结果相同。

上述结论是要求点扩展函数是可积的。

当 α, β 为有限时，对于所选定的一個很小值 $\varepsilon_1 > 0$ ，总存在一数值 A ，满足

$$\int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta) d\xi d\eta < \varepsilon_1 \quad (1.2.9)$$

其中 $\alpha, \beta \geq A$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) [f(\xi, \eta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)] d\xi d\eta \\ = \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \varepsilon = g(x, y) + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

上式对于 $\alpha, \beta \geq A$ 的所有 α, β 都成立。而且 $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ 。

上式说明，一个无限小的数值加在模糊图象 $g(x, y)$ 中，无异于在原目标分布中加上具有频率为 $\alpha, \beta \geq A$ 的正弦分量。由于 ε 可为无限小，这就意味着在模糊图象中的一个非常小的扰动。可造成原目标分布的很大扰动，这就是图象恢复中病态问题在数学上的证明。

在实际成象过程中，(1.2.10) 式中的 ε 项是始终存在的。例如，实际成象和记录系统中传感器的噪声是始终存在的，而图象恢复的任务就是在始终存在某些不固定因素的情况下，去得到目标的分布 f 。

图象恢复问题可能是奇异的。这取决于点扩展函数的特性。下面举一例子。

假设两个函数在区间 $[a, b]$ 内正交, 即

$$\int_a^b \int_a^b h(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.2.11)$$

如果函数 h 还包括参量 x, y , 那么, $h(x, y, \xi, \eta)$ 与 $f(\xi, \eta)$ 在区间 $[a, b]$ 正交, 则

$$\int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.2.12)$$

这时, 称 $h(x, y, \xi, \eta)$ 对 $f(\xi, \eta)$ 奇异。这就意味着从无任何信息的 $g(x, y) = 0$ 的图象中恢复目标 $f(x, y)$ 是不可能的。

如果一个目标分布是由一系列与 η 正交的函数 f 及非正交函数 c 组成, 那么

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) [f(\xi, \eta) + c(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ = \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) c(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y) \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

这说明正交分量是不能从模糊图象 $g(x, y)$ 中分析出来的。

下面讨论单一性感。当成象和记录系统是非线性的, 而且只存在记录系统引入的噪声时, 成象公式可表示为

$$g(x, y) = \int_a^b \int_a^b h(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + n(x, y) \quad (1.2.14)$$

在无噪声情况下, $n(x, y) = 0$ 。假若系统为非奇异, 那么图象 g 与目标 f 之间可能存在单一的关系。但是当噪声存在时, 二者就不会是单一的关系了。任何一个随机噪声过程 $n(x, y)$ 都可能加于图象 $g(x, y)$ 上。因此, 可能有无穷多个目标分布函数 $f(x, y)$ 。

上述介绍的奇异、病态、单一性等问题是图象恢复中普遍存在的问题。也正是图象恢复需要解决的问题。在实际工作中要根据掌握的先验知识, 寻找最佳判据, 以求出最佳解。

§ 1.3 非线性系统和线性系统

在图象恢复中, 成象模型的建立是借助于点扩展函数 PSF

的概念、它代表在所研究的目标中点源在记录图象中的影响。

根据点扩展函数与目标函数之间的依赖关系，可以把成象系统分为线性系统和非线性系统。所谓线性系统是指点扩展函数与目标函数无关；而非线性系统是指点扩展函数与目标函数有关。由于非线性系统的复杂性，在实际应用中，往往把非线性系统简化为线性系统来分析。这样我们便可借助于成熟的线性系统理论，富氏光学、线性代数、数值分析等理论来研究图象恢复问题。

1.3.1 非线性系统

在图象恢复中，实际上经常碰到的是非线性系统。例如，我们考虑某些X射线图象，大气温度轮廓图以及图象的三维重建系统中都存在散射现象。而且图象能量的有效点源与目标的强度大小有关。因此，点扩展函数变为

$$h = h(\xi, \eta, x, y, f) \quad (1.3.1)$$

模型如图 1.3.1 所示。由于X射线点光源分布在整个输入平面上。因此记录图象 $g(x, y)$ 是各个独立点源成象的叠加，即

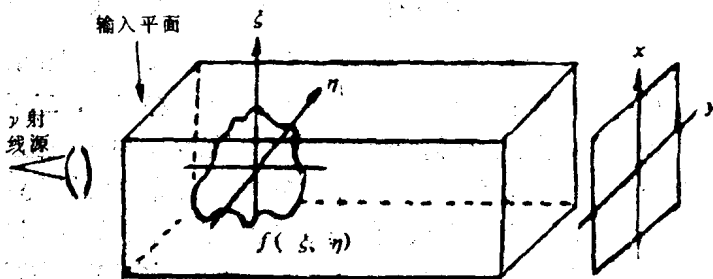


图 1.3.1 成象模型

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, \xi, \eta, f) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.3.2)$$

例如一个高斯点扩展函数，循环对称，其方差与目标强度的平方 $f^2(\xi, \eta)$ 成正比，因此，可写成

$$h(x, y, \xi, \eta, f(\xi, \eta)) = \frac{1}{2\pi f(\xi, \eta)} \exp \left\{ -\frac{1}{f^2(\xi, \eta)} ((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2) \right\} \quad (1.3.3)$$

这就是一个典型的非线性系统的点扩展函数。

1.3.2 线性系统

图 1.3.2 为线性系统成象模型。图 1.3.2(a) 为连续目标信号 $f(\xi, \eta)$ 与连续记录图象 $g(x, y)$ 的成象模型，称为连续模型。成象公式表示成

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.3.4)$$

上式中点扩展函数 $h(x, y, \xi, \eta)$ 与目标图象位置有关，因此称为位移变化点扩展函数 (SVPSF)。如果点扩展函数只与目标图象和记录图象之间的相对位置有关，则称为位移不变点扩展函数 (SIPSF)。并可表示成

$$h(x, y, \xi, \eta) = h(x - \xi, y - \eta) \quad (1.3.5)$$

这时成象公式变为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1.3.6)$$

这个等式是二维卷积公式。

上式代表连续-连续模型的成象公式，用于相干和非相干富氏光学之中。

图 1.3.2(b) 所示的连续-离散模型适合于计算机图象处理。这种模型也具有实际意义。因为原目标图象通常是连续的，但由于传感器、采样过程、矩阵处理、以及离散显示处理，所以只能获得离散的记录图象。这时的成象公式变为

$$g_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.3.7)$$

这时点扩展函数 $h_{ij}(\xi, \eta)$ 即取决于连续的目标坐标变量 (ξ, η) ,

又取决于离散的图象平面变量 (i, j) 。离散图象 g_{ij} 也可用矩阵表示。

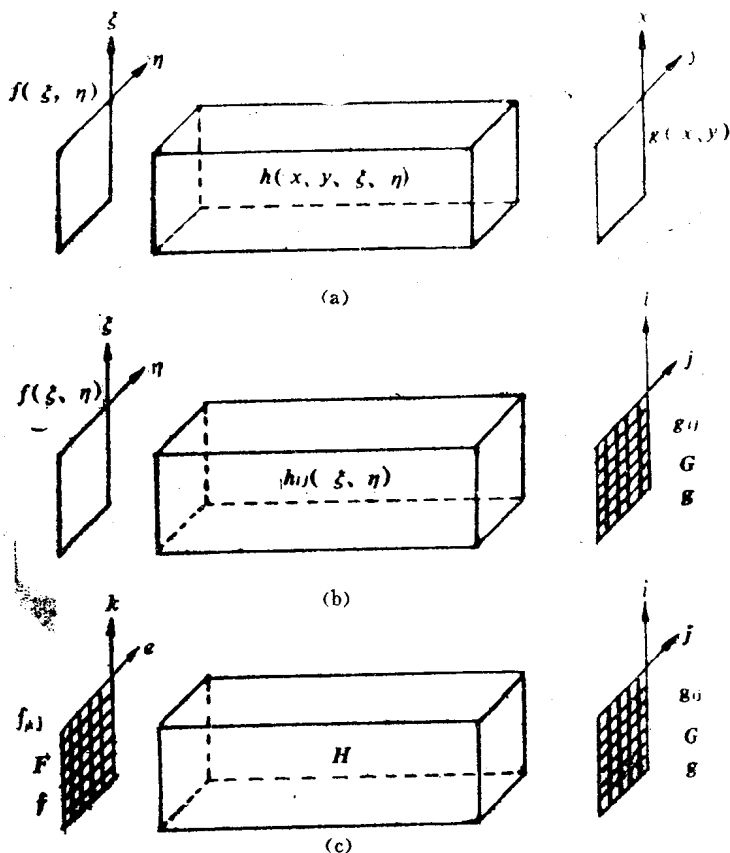


图 1.3.2 线性系统模型

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.3.8)$$

矩阵 G 是一个标量，可按次序表示成矢量形式，即

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.3.9)$$

其中 g 为 $N^2 + 1$ 维矢量。

上述连续-离散模型不论在理论上还是在实用上都具有实际意义。但是计算机不适于连续图象。因此，为了用计算机处理，需要采用离散-离散模型。如图 1.3.2(c) 所示。这时，用离散公式表示为

$$\begin{aligned} g(i, j) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) h(i-k, j-l) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(i-k, j-l) h(k, l) \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

也可写成矩阵形式，

$$G = HF \quad (1.3.11)$$

其中 H 为代表点展函数的四维运算。 F 和 G 为二维矩阵。上式也可以用矢量形式表示成

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} \quad (1.3.12)$$

$\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{f}$ 分别为 $N^2 \times 1$ 维矢量， H 为 $N^2 \times N^2$ 矩阵。

§ 1.4 离 散 公 式

为了实际计算，我们对上节谈到的离散模型的成象公式作进一步讨论。

首先研究一维情况并忽略噪声的影响，这时可假设两个函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 被均匀采样，分别形成大小为 A 和 B 的阵列。

即

$$f(x), \quad x = 0, 1, 2, \dots, A-1$$

$$h(x), \quad x = 0, 1, 2, \dots, B-1$$

为了消除二个函数卷积时的重叠现象，我们把 $f(x)$ 和 $h(x)$ 扩展到 $M \geq A+B-1$ 。这样就可把扩展后的函数 $f_e(x)$ 和 $h_e(x)$ 看作周期为 M 的周期函数。

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0, & A \leq x \leq M-1 \end{cases} \quad (1.4.1)$$

$$h_*(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0, & B \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

这时, $f_*(x)$ 与 $h_*(x)$ 的卷积为

$$g_*(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_*(m) h_*(x-m) \quad (1.4.2)$$

式中 $x=0, 1, 2, \dots, M-1$. 因为 $f_*(x)$ 和 $h_*(x)$ 的周期都等于 M , 故 $g_*(x)$ 也具有这一周期.

直接用矩阵乘法可以证明 (1.4.2) 式可表示为矢量形式.

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} \quad (1.4.3)$$

式中矢量 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 是 M 维列向量, 表示为

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_*(0) \\ f_*(1) \\ \vdots \\ f_*(M-1) \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

和

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_*(0) \\ g_*(1) \\ \vdots \\ g_*(M-1) \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

矩阵 H 为 $M \times M$ 阶矩阵

$$H = \begin{bmatrix} h_*(0) & h_*(-1) & h_*(-2) & \cdots & h_*(-M+1) \\ h_*(1) & h_*(0) & h_*(-1) & \cdots & h_*(-M+2) \\ h_*(2) & h_*(1) & h_*(0) & \cdots & h_*(-M+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_*(M-1) & h_*(M-2) & h_*(M-3) & \cdots & h_*(0) \end{bmatrix} \quad (1.4.6)$$

因为 $h_*(x)$ 为周期性的, 故有 $h_*(x) = h_*(M+x)$. 利用这一