动态电路分析

蔡宣三

清华大学出版社

动态电路分析 蔡宣三

动态电路分析

蔡 宣 三 著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了动态电路的理论分析和计算方法。内容包括线性动态电路的经典解法和状态空间分析方法、拉普拉斯变换、应用拉普拉斯变换求解线性动态电路、线性分布参数电路和非线性动态电路的理论分析方法，也介绍了动态电路的数值解法。书中有一定数量的例题和习题，并附有少量的动态电路数值分析的计算机程序。

本书可供电机、电器、电力系统、高电压技术、无线电、通信、自动化、电子、仪表、计算机等专业的本科大学生以及电视大学、职工业余大学的学生作为电路理论课的教学参考书，并可作为有一定基础的社会青年自学用书。对于报考研究生的电类专业学生，在系统复习电路理论时也可参考本书。

动态电路分析
蔡宣三　著
*
清华大学出版社出版
北京　清华园
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售
*
开本：787×1092 1/16　印张：18　字数：460千字
1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷
印数：00001—20000
书号：15235·136　定价：3.30元

序

电路理论是高等工科院校电类专业的公共理论基础课程，动态电路分析则是电路理论的一个重要内容。学生在学习专业基础课或专业课（如电子电路、计算机原理、控制理论、信号分析等）之前，应当比较牢固地掌握动态电路的基本分析方法。本书专门介绍动态电路的理论分析和计算方法。

为了分析和计算动态电路，必须首先建立它的数学模型，然后应用解析法或数值法求解。但是，数学的推导演算常常容易掩盖物理实质，使初学读者忽视从物理概念上进行探讨。所以，在编写本书时，作者力图做到数学分析与物理解释相结合。学生在学习本课程时，应着重于了解电路的物理规律与分析方法。

自本世纪30-40年代起，动态电路分析受到电工技术专家们的广泛注意与重视。近20年来，随着电子技术和数字计算机的发展，动态电路的分析和计算也有了新的发展。例如，有源（含受控源）电路的分析、状态空间分析法、动态电路的数值计算等，均已成为研究动态电路理论所必须注意的内容。另外，广义函数的引入，使得拉氏变换法分析动态电路的理论也有了新的发展。

现代电路的分析方法将动态电路按照如下方式分类：

1. 线性和非线性电路，可分别用线性和非线性微分方程描述；
2. 集中和分布参数电路，可分别用常微分和偏微分方程描述；
3. 时变和非时变电路，可分别用变系数和常系数微分方程描述；
4. 有源和无源电路，用晶体管这种有源器件组成的电路就是有源电路；
5. 连续和离散时间电路，分别由微分和差分方程描述。

本书主要介绍非时变、连续时间电路（包括有源电路）的分析。前六章以线性、集中参数电路为主要对象，后两章分别介绍线性、分布参数电路和非线性、集中参数电路的分析。

本书旨在为国内有关电类专业的大学生（包括电视大学和职工业余大学的学生）提供一本动态电路理论分析的教学参考书。为此目的，在编写本书时，作者努力做到由浅入深、循序渐进，经典理论与现代理论均有所加强。书中有120个例题和100个习题，以期帮助读者练习分析动态电路。书末还附有几个动态电路分析计算的程序（BASIC），供读者上机练习。

学习本课程时，要求学生应具备微积分与微分方程、线性代数、电阻电路分析、网络图论及Fourier变换等基本知识。

本书原稿是根据作者在清华大学讲授电路理论课的讲稿补充修改而成。改写时曾得到常迵教授的指点，承肖达川教授审阅了书稿。夏仁平同志提出不少宝贵意见，计算机程序部分参考了陆文娟同志提供的资料。在付印前，北京工业学院龚绍文同志对书稿又进行了仔细的校核。

在此，作者谨向帮助和支持编写本书的同志们表示诚挚的谢意，并恳切地希望读者对书中的缺点和错误予以批评指正。

1984.4.

目　录

第一章　概　论

§1　动态电路及其过渡现象

仅由电阻和电源（包括受控源）组成的电路称为电阻电路，包含动态元件(如电容、电感）的电路称为动态电路，电阻电路可用一组代数方程来描述，动态电路要用微分方程来描述。动态电路的特点是：任一时刻电路的响应不仅与当前作用于电路的激励有关，而且与过去作用于电路的激励有关。电路也可称为网络。

电路的工作状态可分为稳定状态（简称稳态）和过渡状态（简称瞬态或动态)。动态电路分析就是专门研究电路的过渡过程。例如，设有一个RLC串联电路，当未加激励时，电路储能为零，称该电路处于一种稳态。如果在电路上加恒定电压激励，用示波器观察电容C的电压，便可以发现电容电压有一个增长过程，电路储能逐渐增加，直到储能不再变化，电路到达另一个稳态，各支路的电压可能也都不再是零。电路储能变化的过程就是过渡过程。

如果激励为正弦交流电压，用示波图可以观察到，在过渡过程开始时电容电压并不是按照正弦规律变化的，只有经过一段时间，过渡过程将结束时，电容电压波形才接近正弦。我们说，这时电路从初始的稳态过渡到正弦稳态，经历了一个过渡状态。

这种过渡现象不但在电路中有，在力学系统、热系统、控制系统以及日常生活中也都可以看到。

由上述两个例子，我们可以粗略地定义稳定状态和过渡状态：

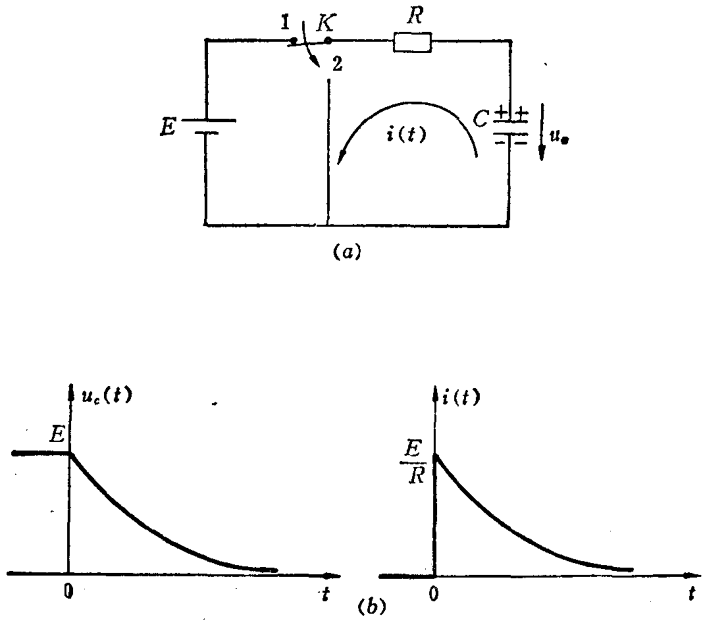
稳定状态——电源为直流时，电路的变量不随时间而变；电源为周期交流时，电路的变量是时间的周期函数。在上述情况下，我们说电路工作在稳定状态。

过渡状态——电路从一个稳态变化到另一个稳态的中间状态，称为电路的过渡状态（或称瞬态)。从一个稳态过渡到另一个稳态需要一定时间，在这个过渡时间内发生的现象称为过渡现象，过渡时间内经历的过程称为过渡过程。

电路的稳态过程和过渡过程是两种不同的工作过程，有不同的变化规律。但两者间也有联系，例如，稳态是过渡过程的最终状态，多数情况下过渡过程是从稳态开始的；求解一个电路的过渡过程所得结果包含了稳态过程的解。

前面所举的例子说明：电路中激励或电源突然接通或中断会产生过渡现象。此外，电路中某个支路的开关突然断开或闭合；直流电源电压值突然增大或减小；电路中某个元件的参数发生波动（参数值增大或减小)，都会使电路中产生过渡现象。

我们以RC串联电路为例(图1-1(a))，进一步说明电路中的过渡现象。设图1-1(a)电路中开关K原来合在位置1，电路处于稳态，电容电压$u_C=E$，电流为零，电容贮能为$\frac{1}{2}CE^2$。在某一时刻t_0，不失一般性，假设$t_0=0$，突然将开关K合向位置2，(图中用开关K上的箭头表示其运动方向)，从$t=0$起，过渡过程开始。电容放电，电



（a） RC电路 （b） 过渡过程中电容电压及电流波形

图 1-1

流 $i(t)$ 方向如图所示。电容中能量释放出来消耗在电阻 R 中。电容电压 u_C 从初始值 $u_C(0)=E$ 开始衰减，而电流 $i(t)$ 则从初始值 $i(0)=0$ 突然跳变为 E/R，紧接着逐渐衰减，如图1-1(b）所示，按指数规律下降。当电容贮能全部释放后，电容电压及电流均降到零，于是过渡过程结束，电路进入了新的稳态。

图1-1(a）电路中包含贮能元件——电容，这是动态电路。开关动作使电路产生过渡过程的原因是：电容能量的释放需要一定时间，因此，使电路中各支路的电压和电流的变化持续了一定时间。假如，在 $t=0$ 瞬间，电容贮能 w 会完全释放掉，已知功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta t}$，$\Delta w$ 为 Δt 时间内电容贮能的变化量，则 $t=0$ 瞬间，功率 P 必须为无穷大，这是不可能的，因此电路的过渡状态要持续一段时间。

如果电路中不含有贮能元件，如图1-2(a)的电阻电路。开关 K 原来是断开的，电路的原稳态电流为

$$I_1=\frac{E}{R_1+R_2}$$

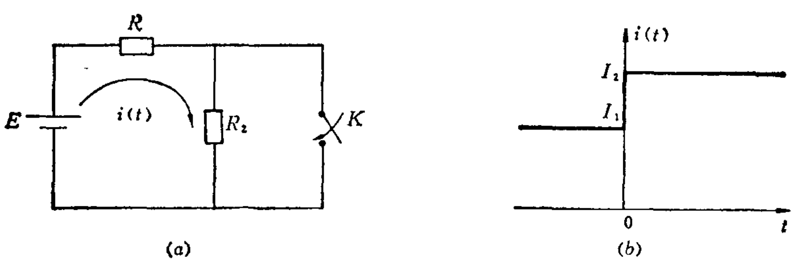


图1-2 电阻电路

设 $t=0$ 时，开关K闭合，将电阻R_2短路，根据欧姆定律，电路电流为

$$I_2=\frac{E}{R_1}$$

如图1-2(b)，这是新的稳态电流。

显而易见，电阻电路中开关有开闭现象时，从一个稳态过渡到另一个稳态可以瞬时完成，这是因为这个电路中只含有耗能元件而没有贮能元件。设 Δt 时间内能量变化量为 Δw，则有：

$$\Delta w=P\Delta t=i^2R\Delta t$$

图1-2中，由于开关K合闸是瞬时完成的，故有 $\Delta t=0$，但功率P为有限值，因此在 $t=0$ 的瞬间，电阻消耗能量为零，既未贮存，也未释放。所以，电阻电路在过渡过程中，各支路的电压和电流是可以突变的。

在一般情况下，对于任意一个动态网络，设在 $t=0$ 时刻接上电源电压 $e(t)$(如图1-3)。则该电路从 $t=0$ 起，在 $e(t)$ 作用下，某一支路的电压 $u(t)$ 既可能是单调变化的（如图1-4中曲线1），也可能是衰减的振荡变化过程（如曲线2）。

图1-3中的独立源 $e(t)$，也即激励，又可称为输入变量，而待求的某一支路的变量如 $u(t)$，则称为对激励 $e(t)$ 的响应，也可称为输出变量。

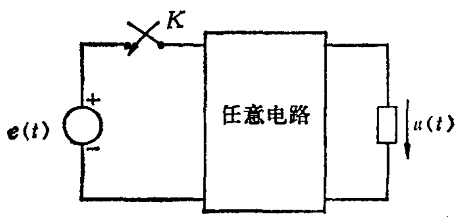


图1-3　任意电路接通电流

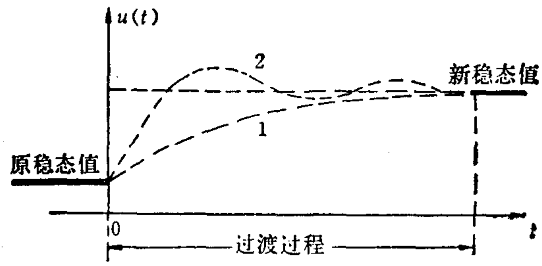


图1-4　变量的过渡过程曲线

在许多情况下，电路过渡过程的持续时间虽然很短，例如只有几毫秒到几百毫秒或几秒，但在过渡过程中产生的某些物理现象，有时会使电路元件受到损伤或破坏。例如，半导体电路的过渡过程中产生的过电压或过电流（超过正常的额定电压或额定电流），可能会使半导体器件损坏；大电机接入电力系统可能产生严重的冲击电流，造成设备事故等等。

然而，在工业或科学实验中，人们却又常利用电路的过渡现象，产生人们所需要的各种波形（如方波、正弦波或脉冲等)。

我们研究过渡过程的目的是要分析电路的过渡现象，定量计算动态电路各支路的电压、电流，估算过渡过程时间，避免损害电路元件，或利用电路的过渡现象产生所需要的各种波形，等等。

§2　动态电路的分析方法

分析动态电路的一般步骤如下：

1．根据动态电路的物理规律，用数学方程来描述动态电路。这一步称为数学模型的

建立。

2. 用解析法或数值法求解数学方程。

3. 分析讨论结果，判断是否符合电路物理过程和实际情况。

我们用小写字母 i 、u 表示电流、电压瞬时值，这些变量应当满足动态电路的基本定律：

KCL　　$\Sigma i(t)=0$　　(1-1)

KVL　　$\Sigma u(t)=0$　　(1-2)

电阻 R、电感 L、电容 C 等电路元件也应满足下述特性关系：

$$u_R(t)=Ri_R(t) \qquad \text{即欧姆定律} \tag{1-3}$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{1-4}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{1-5}$$

对于任意的n阶线性电路（如图1-5），假设参数是集中的，$f(t)$ 为激励(输入)，可以是电压或电流，$x(t)$ 为电路中某个待求的变量(例如某一支路的电压或电流、某个节点的电位或者电容的电荷、电感的磁链等)，亦即响应（输出)。根据式（1-1)—式（1-5）五个基本关系式，我们总可列出描述这个n阶电路的数学方程如下：

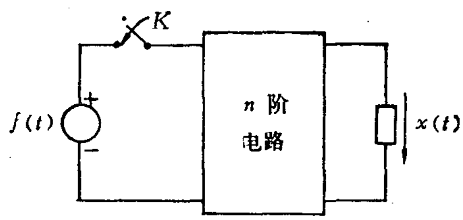


图1-5　任意n阶线性电路框图

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{1-6}$$

(1-6) 式为n阶常系数微分方程，方程的阶数n小于或等于电路中包含的贮能元件个数。$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数系数，与电路参数等有关。

目前，对线性集中（又可称为集总）参数电路常用的分析方法有以下三种：

1. 经典法

对（1-6）式所示的常微分方程进行积分，得到响应变量 $x(t)$，这种分析计算动态电路的方法称为经典法。对于n阶常微分方程，求解时，为了确定n个积分常数，需要知道n个 $t=0$ 时的 x 及其各阶导数值，即 $x(0)$、$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$、$\cdots\left.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$，这些值称为变量 $x(t)$ 的初始值，也就是电路的初始条件。对于一阶或二阶电路，需要知道的初始值比较少，所以用经典法求解一阶或二阶线性常微分方程还是比较方便的。

经典法是一种比较古老的基本方法，其优点是：在分析计算低阶电路时，物理意义较清楚，容易掌握电路过渡过程的规律。但是，用经典法分析高阶电路时就要困难一些，这是因为 $x(t)$ 的高阶导数的初始值常常是未知的，需要从已知的其它初始条件导出。另外，当 $t=0$ 时，$\frac{d^nx}{dt^n}$的物理意义一般无法说明。

2. 拉普拉斯（Laplace）变换法

这种方法简称为拉氏变换。方法的大意是：引入复频率 $s=\sigma+j\omega$，将线性常微分方程变换为代数方程，其变量为 $X(s)$，是 s 的函数。求解代数方程是比较容易的。在得到 $X(s)$ 以后，经过反变换，就可解出响应变量 $x(t)$。这一方法可以避免经典法中初始条件的换算过程，因此，在求解高阶电路时，用拉氏变换法比较方便。

3. 状态空间分析法

一个n阶微分方程描述n阶电路中某一变量 $x(t)$——可称为状态变量——与激励 $f(t)$ 间的关系。适当地选择电路中n个状态变量，可以将一个n阶微分方程变换为n个一阶微分方程。它表示n个状态变量间以及它们与激励间的关系。用向量形式表示，得到一阶向量微分方程，称为电路的状态方程。

用一阶向量微分方程描述电路，其优点是求解比高阶微分方程容易，尤其是用数值法在计算机上求解时更方便。列写和求解状态方程来分析动态电路的方法称为状态空间分析法。其优点是：求解简单，并可以帮助人们直接了解电路内部各状态变量随时间变化的规律。不象经典法那样，只能求解输出（响应）变量，其余变量要另外计算。

§3　线性动态电路数学模型的建立

用解析法决定电路在给定激励下的响应包括两个重要步骤：

1. 建立描述动态电路的数学方程；
2. 求出该方程满足起始条件的解。

现在，我们来讨论如何根据电路基本定律建立微分方程式。因为它反映了输入（激励）和输出（响应）间的动态关系，所以又称为输入—输出方程。在这里，我们还将介绍对偶电路和等效电路的概念，应用这些概念将有助于建立数学模型。

一、用微分方程描述动态电路

建立数学模型是正确求解动态电路的第一步。与分析电阻电路一样，在建立动态电路的数学模型时，应首先给定电路的参考方向（或称假定正方向），再应用各元件的基本关系式和电路基本定律建立微分方程式。

下面我们举例说明。

〔**例1-1**〕 RC串联电路

设有一个RC串联电路，在 $t=0$ 时刻接入恒定电压E，如图1-6所示。图中给出了电容电压u_C、电阻电压u_R及电路电流 i 的参考方向。设电容电压的初始值$u_C(0)=0$，即电容原来没有存贮电荷。求$u_C(t)$、$u_R(t)$ 及 $i(t)$。

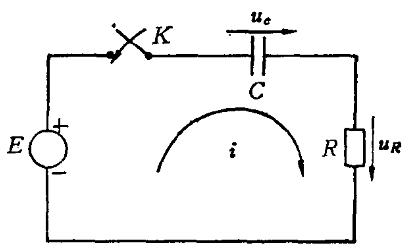


图1-6　例1-1电路

解：设电流 i 为待求变量（响应），由KVL可得积分方程为

$$E=Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\tau \tag{1-7}$$

当待求变量为u_C时，得一阶微分方程

$$E=RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C \tag{1-8}$$

这两个式子都是描述RC串联电路的数学模型。有时用（1-8）式分析更方便些。（1-8）式所示非齐次线性微分方程的通解由下述两部分组成：

1．齐次方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

的通解或瞬态解为

$$u_t=A\mathrm{e}^{pt} \tag{1-9 a}$$

式中　$p=-\frac{1}{RC}$为特征方程

$$RCp+1=0$$

的解；A为待定常数，将由初始条件决定。

2．（1-8）式的特解或稳态解为

$$u_s=E \tag{1-9 b}$$

因此（1-8）式的通解为

$$u_C(t)=u_s+u_t=E+A\mathrm{e}^{-t/RC}$$

已知$t=0$时$u_C(0)=0$，代入上式可求得$A=-E$，则

$$u_C(t)=E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}),\quad t\geqslant 0 \tag{1-10}$$

$$\tau=RC \tag{1-11}$$

R的单位为Ω，C的单位为F。τ的单位为秒，称为时间常数。

当$t\to\infty$时，$u_C(\infty)=E$，即电路的稳态值。（1-10）式说明，图1-6电路的解包括稳态解u_s和瞬态解$u_t=-E\mathrm{e}^{-t/\tau}$。

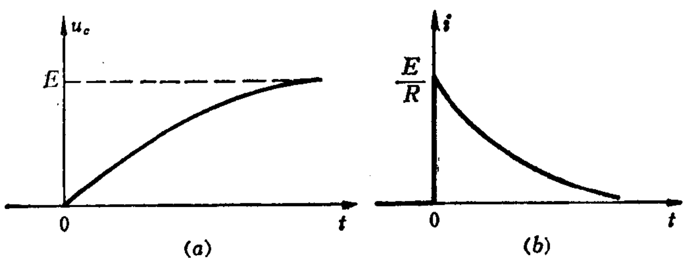


图1-7　RC电路（例1-1）的$u_C(t)$与$i(t)$波形

电容电流的解为

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau},\quad t\geqslant 0 \tag{1-12}$$

电阻上电压u_R的解为

$$u_R=iR=E\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad t\geqslant 0 \tag{1-13}$$

（1-9 a）、（1-12）、（1-13）式分别表示u_C、i、u_R的瞬态分量（或称自由分量），其中都包

含了指数项 $e^{-t/\tau}$，而且具有相同的时间常数。瞬态分量随时间 t 逐渐衰减，最后消逝。(1-9 b）式表示 u_C 的稳态分量，又称强制分量。$i(t)$ 及 $u_R(t)$ 的稳态分量为零。图 1-7(a）及（b）为RC电路对激励E的响应变量$u_C(t)$ 及 $i(t)$ 的波形。(1-10）式为u_C的全解。

上述RC电路的动态分析结果具有典型意义。所得到的规律如：各变量的瞬态分量有相同的变化形式；改变激励时，各变量的过渡过程时间常数都一样；等等。这些规律对于其它电路也是适用的。

〔例1-2〕 负载为RLC串联的互感耦合电路。

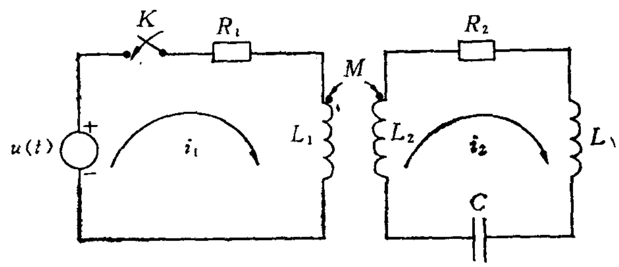


图1-8 例1-2的电路图

设一互感耦合电路，负载由电阻、电感、电容串联组成。设负载中电感L与两线圈电感L_1及L_2间没有耦合关系，回路电流 i_1 及 i_2 参考方向如图 1-8 所示，求电路的特征方程。

解：应用回路电流法，根据KVL，可建立如下微分方程

$$R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = u(t)$$

$$-M\frac{di_1}{dt} + (L_2+L)\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int_0^t i_2 d\tau = 0$$

这是一个二元微分-积分方程组。

应用算子符号 p，令 $p=\frac{d}{dt}$，$\frac{1}{p}=\int dt$，则以上两式变为

$$(R_1+L_1p)i_1 - Mpi_2 = u$$

$$-Mpi_1 + \left[(L_2+L)p + R_2 + \frac{1}{Cp}\right]i_2 = 0$$

解得

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} u & -Mp \\ 0 & (L_2+L)p+R_2+\frac{1}{Cp}\end{vmatrix}}{H(p)} \tag{1-14}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+L_1p & u \\ -Mp & 0\end{vmatrix}}{H(p)} \tag{1-15}$$

式中 $H(p) = \begin{vmatrix} R_1+L_1p & -Mp \\ -Mp & (L_2+L)p+R_2+\frac{1}{Cp}\end{vmatrix} = (R_1+L_1p)\left(L_2p+Lp+R_2+\frac{1}{Cp}\right) - M^2p^2$

$$p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

(1-14)、(1-15) 式可写成

$$i_1H(p)=(L_2p+Lp+R_2+\frac{1}{Cp})u \tag{1-16}$$

$$i_2H(p)=Mpu \tag{1-17}$$

$H(p)$ 称为特征多项式，它是三阶多项式。i_1及i_2或电容电压u_C均可选作响应，所建立的电路方程都是三阶微分方程，其特征方程都是：

$$H(p)=(R_1+L_1p)\left(R_2+L_2p+Lp+\frac{1}{Cp}\right)-M^2p^2=0 \tag{1-18}$$

由图1-8可知，互感耦合电路本身有两个贮能元件，是二阶的。负载中含有L和C两个贮能元件，其中 L 和 L_2 串联，可以合并。因此，图 1-8 电路中实际有三个贮能元件L_1、C、(L_2+L)，是三阶电路。

在 (1-12) 式和 (1-13) 式中我们用符号p代替$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，得到电路的特征方程。可见只要列出特征方程就可以很快确定电路的阶次。

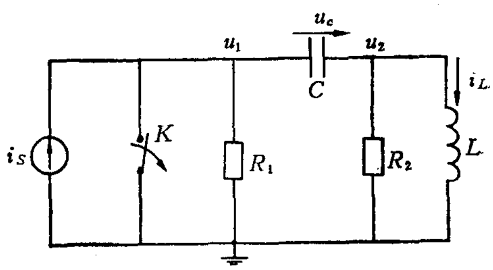


图1-9　例1-3电路

〔**例 1-3**〕设一个电路（如图1-9所示），在 $t=0$ 时，使开关K断开，电流源 i_s 接入电路。试用节点法列写电路微分方程。

解：设公共节点为参考节点，取电容两端节点电压u_1、u_2为待求变量，列写电路微分方程。

根据KCL可得：

$$C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}+\frac{u_1}{R_1}-C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=i_s$$

$$-C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}+C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{u_2}{R_2}+\frac{1}{L}\int_0^t u_2\mathrm{d}t=0$$

令 $p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，可得电路的特征多项式为

$$D(p)=\begin{vmatrix} Cp+\frac{1}{R_1} & -Cp \\ -Cp^2 & Cp^2+\frac{p}{R_2}+\frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

令 $H(p)=R_1LD(p)=LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)p^2+\left(CR_1+\frac{L}{R_2}\right)p+1$

这是二阶电路。

如果在上两式中消去变量 u_2，即只取 u_1作为待求变量，则得

$$u_1H(p)=R_1\left(1+\frac{L}{R_2}p+LCp^2\right)i_s$$

取 i_L 作为待求变量时，得

$$i_LH(p)=R_1Cpi_s$$

取 u_C 作为待求变量时，得

$$u_C H(p)=\left(R_1+\frac{LR_1p}{R_2}\right)i_s$$

i_L 及 u_C 分别表示电感电流及电容电压，其参考方向见图 1-9。由此可见，无论取哪个变量建立微分方程，特征多项式都是一样的。一般来讲，当电路的结构决定以后，其特征方程是唯一的。特征方程由齐次微分方程导得，后者决定了响应的瞬态分量性质，也就是说，决定了电路过渡过程的规律。因此，同一个电路选择不同的待求变量，一般说来并不会改变电路的过渡过程规律。

二、电路的对偶性

描述某一电路的网孔方程与描述另一个电路的节点方程，若有完全相同的数学形式，则称这两个电路互为对偶。

例如，图 1-10 表示一个接电压源 u_s 的 RLC 串联电路，只有单回路；图 1-11 表示一个接电流源 i_s 的 GCL 并联电路，只有单节点。注意，图 1-10 中开关K是串联在回路中，其运动方向是闭合，图 1-11 中开关K并联在支路上（两节点间），其运动方向是断开。

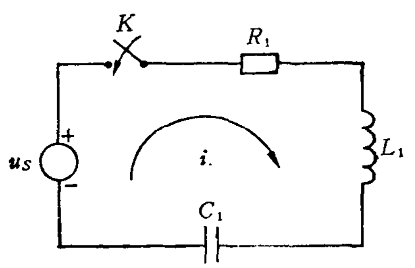


图1-10　RLC串联电路

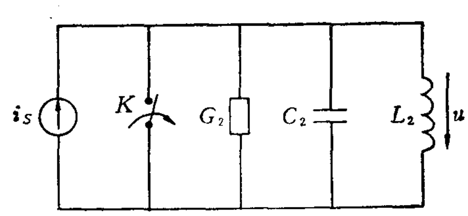


图1-11　GCL并联电路

根据 KVL，描述图 1-10 电路的方程为

$$L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_1}\int_0^t i\mathrm{d}\tau+R_1 i=u_s \tag{1-19}$$

根据 KCL，描述图 1-11 电路的方程为

$$C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L_2}\int_0^t u\mathrm{d}\tau+G_2 u=i_s \tag{1-20}$$

可见，图 1-10 和图 1-11 两个电路的数学模型形式上是相同的微分-积分方程，而且这两个电路有对称的对应关系，我们称之为对偶关系，例如：电压源和电流源、支路串联和支路并联、电阻与电导、电感与电容等等。我们称图 1-10 及图 1-11 两个电路互为对偶，其数学模型（1-19）和（1-20）两式是互为对偶的。只要解出其中的一个电路，再根据对偶关系求参数与变量的对偶变换，另一个电路的解也就得到。如果图 1-10 和图 1-11中各对偶元件值和对偶变量值间还有下述关系：

$$R_1=G_2,\ L_1=C_2,\ C_1=L_2,\ u_s=i_s$$

则（1-19）和（1-20）两式几乎完全相同，称为正对偶。(1-19)式的解 $i(t)$与(1-20)式的解 $u(t)$ 相同，初始条件也是互为对偶的。

对偶电路间的对偶关系见表1。

应用对偶电路的概念，在求解电路过渡过程时，有时是很方便的。例如，图1-10中将C_1短路，得到R_1L_1串联电路，其对偶电路为G_2C_2并联，即相当于将图1-11中L_2开路，则两个电路的解互为对偶：

$$i=\frac{u_s}{R_1}(1-e^{-t/\tau_1}),\quad \tau_1=\frac{L_1}{R_1},\quad t\geqslant 0 \tag{1-21}$$

$$u=\frac{i_s}{G_2}(1-e^{-t/\tau_2}),\quad \tau_2=\frac{C_2}{G_2},\quad t\geqslant 0 \tag{1-22}$$

这里假设u_s及i_s为恒定。

表1-1 电路对偶关系

回路分析	节点分析	回路分析	节点分析
一个回路包含n个支路	一个节点连接n个支路	电感L	电容C
电压源	电流源	磁链ψ	电荷q
开路	短路	初始值$i_L(0)$、$\psi(0)$	$u_C(0)$，$q(0)$
独立回路电流	独立节点电压（以参考点为准）	阻抗Z	导纳Y
电阻R	电导G		

由此可见，一旦知道某个动态电路的解，利用对偶关系，甚至不必列写微分方程和求解，便可以得到对偶动态电路的解。

应当说明的是：电路的对偶性是在网孔和节点方程的基础上得出的。由于非平面电路不能用网孔方程组来描述，因此我们可以说，凡是不能用平面图表示的电路，没有对偶。

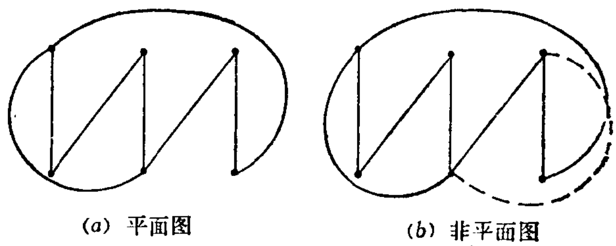


图1-12 平面图（a）和非平面图（b）

所谓平面图，图论中是指一个平面上没有任何互相交叉的支路。图1-12（a）表示一个平面图，而图1-12（b）则为非平面图。

应当注意的是：对偶和等效是两个不同的概念。互为对偶的两电路不是相互等效的电路，两电路对偶要满足表1-1的对偶关系。例如RLC串联电路（图1-10）和GCL并联电路（图1-11）互为对偶，但并不等效。两电路等效是指对外部状况而言，不能用等效电路决定电路内部特性。

〔**例1-4**〕 求图1-13（a）所示电路的等效电路与对偶电路。

解：图1-13（a）中电容两端a、b以左的等效电路可由Thevenin定理求得，如图1-13（b）。图1-13（a）与图1-13（b）两电路等效，这是指两个电路中电容两端的电压（或流过电容的电流）相等。但是，图1-13（a）的对偶电路如图1-13（c）表示，G_1'与R_1对偶、G_2'与R_2对偶，…，不一定存在$G_1'\neq\frac{1}{R_1}$，$G_2'\neq\frac{1}{R_2}$的关系。但我们也可以令对偶支路的参数值相等：$G_1'=R_1$，$G_2'=R_2$，$C'=L$，$L'=C$。另外应当注意的是，图1-13（b）与（c）并不互为对偶。