现代控制系统理论小丛书

随机递推估计

关肇直 主编

科学出版社

现代控制系统理论小丛书

随机递推估计

关肇直 主编

陈翰馥 著

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是现代控制系统理论小丛书之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实践的需要而产生，怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

本书共分七章．其中包括概率基础、随机逼近算法．最小二乘辨识的强一致性、阐述随机逼近型的辨识算法、连续时间系统的线性无偏最小方差估计、奇异问题及连续时间系统的 Gauss-Марков 估计．本书是作者近几年研究工作的总结．

本书可供从事控制理论研究的科学工作者及控制系统设计的工程人员参考，也可作为高等院校有关专业的教学参考书．

现代控制系统理论小丛书
随 机 递 推 估 计
关肇直 主编
陈翰馥 著
责任编辑 刘兴民 袁放尧
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1984年4月第一版 开本：787×1092 1/32
1984年4月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：0001—6,500 字数：229,000

统一书号：15031·557
本社书号：3487·15—8

定价： 1.60 元

现代控制系统理论小丛书编辑委员会

现代控制系统理论小丛书序言

在五十年代末六十年代初，在工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用，受到了实践的检验．

工程实践迫切需要发展理论，而一些新技术，特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制精度，数字控制逐渐代替模拟装置．这主要是利用了数字电子计算机，同时有赖于新的数学的描述与方法．

解放以来，我国科学技术得到迅速发展．我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平．我们应当本着“精益求精”的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去，并在工程实践中不断总结提高．我们撰写这一套《现代控制系统理论》小丛书，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

这套小丛书，理论与实践并重．从每一种书来说，或偏重基础理论的阐述，但也给出应用的例子；或偏重于一项工程问

题，但也把它放在坚实的理论基础之上．本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子．本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的．

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容．全套丛书计划分十几册出版．

希望这套丛书对于我国实现四个现代化作出它的贡献．

关 肇 直

1982 年 5 月于北京

前　　言

实际的动态系统，几乎都带有随机因素，虽然有时可以忽略随机因素，把系统近似地当作确定性的来处理，但从工程角度看，为了提高系统精度，把动态系统如实地当作随机系统来研究是十分必需的，同时从理论角度看，这也是富有内容并使人很感兴趣的课题.

为了控制一个随机系统，首先必须建立系统的数学模型，这就是系统辨识所要解决的问题． 有了系统的数学模型后，为了控制系统的演化，还必须随时获得系统的信息，也就是进行量测． 但是量测到的数据往往带有随机误差，所以就需要滤波或内插与外推．得到了对系统的状态估计后，才能进一步解决在一定性能指标下的控制问题，也就是随机控制问题．另外，有许多随机干扰下的跟踪、调节或适应控制等问题，往往归结为一个递推的随机逼近算法，因此算法的收敛性就显得十分重要．本书就是讨论上面这些问题的．除了为使内容具有系统性和完整性而引入的材料外，本书的主要部分，是作者在这个领域内研究结果的总结.

第一章介绍概率论的一些基本知识，我们把它限制在以后章节中要用到的范围内，内容力求精简，并且一般不加证明．有需要的读者很容易找到参考书，例如文献[1,2,3]．鞅差序列的局部收敛定理可见文献[4].

第二章讨论随机逼近算法．自从随机逼近的奠基工作出现以后[5,6]，不断引起理论和应用工作者的兴趣[7-12]． 在七十年代中期以前，多用马氏过程理论为工具，研究独立量测误差

下的随机逼近算法的收敛性问题．这方面的工作在文献[13]中有很好的总结，并附有大量文献．文献[11，12]中有随机逼近的各种应用的介绍．在七十年代中期以后，以 Ljung 和 Kushner 的工作为代表[14,15,16]，利用微分方程的方法为工具来处理算法的收敛性．这两种方法各有优缺点，概括地说，用概率方法时，对误差的概率性质要求较多，但所得到的定理比较简洁．用微分方程方法时，情况正好相反，它能处理较一般的误差，但为了使算法收敛，所要求的条件较多．我们采用把概率方法和微分方程方法相结合的方法，基本思想是用概率方法证明算法的一致有界性和一个非负函数在轨线上的以概率为一（a. s.）收敛性，然后用微分方程方法，证明算法本身的收敛性．这种处理方法适用于 ARMA 类型的相关量测误差．如果把误差限制在不相关的情形，对经典的结果也有所改善．这一章同时考察了离散时间和连续时间的随机逼近算法．主要内容取材于文献[17—20]，应用的例子取于文献[21]．

最小二乘估计是一种古老的统计方法，由于它简单实用，至今仍受到统计学家的重视和研究[22,23]．但是数理统计中的设计矩阵是确定性的，而对系统辨识来讲，相应的阵是随机的，所以不能把数理统计中已有的关于最小二乘估计收敛性的现成结果，直接用到系统辨识问题中来．尽管如此，由于最小二乘法简便可行，它已广泛地用于系统辨识的参数估计问题．当然，估计出来的值是否真的接近于真值，需要专门研究，这就是一致性问题．文献[24—26]讨论不相关噪声下的最小二乘辨识的一致性．但当噪声相关时，通常的最小二乘辨识不一致．第三章对 ARMA 噪声下的系统，把通常最小二乘辨识的设计矩阵加以修改，但仍保持递推算法不变，给出了一致性定理．对不相关噪声还给出了收敛速度．这样就使最小二乘辨识的适用范围扩大到相关噪声的情形．这一章中，

还对连续时间系统，引进了最小二乘辨识的概念，得到了和离散时间系统对应的结果．这些内容取材于文献[24，27，28]．有关系统辨识的应用及其它问题，可参见文献[29—31]．

在系统辨识中除了最小二乘法外，为了对付相关噪声，工程上提出了许多递推算法[32-38]，第四章专门讨论各种辨识算法的强一致性．利用噪声模型的正实性[15,39,40]，主要采用第二章中提出的概率和微分方程结合的方法，对离散时间和连续时间的多种递推算法，给出了相关噪声下的一致性定理．这些内容主要取材于文献[32—36]．当系统需要辨识和控制同时进行时，就产生了自校正控制器和调节器，它们在工程中很有实用价值[41-44]，但已有的算法往往不够直接，对收敛性也缺乏研究．作为本章所证的系统辨识一致性定理的应用，给出了自校正控制器的一个直接算法，并证明了它的收敛性[45]．

第三章和第四章的结果，同样适用于时间序列分析[46,47]，因为我们研究的模型就是时间序列分析中的 ARMAX 模型．

本书最后三章的内容和前面的章节有相对的独立性．如果读者只对滤波和随机控制问题感兴趣，除了第一章中的一些准备知识外，可以不读前面的章节，而直接阅读这三章．这三章只研究连续时间系统，对离散时间系统相对应的结果，读者可见本丛书的另一分册[48]．

第五章讨论线性无偏最小方差估计，这章不仅包括了著名的 Kalman-Bucy 滤波，同时也包括内插外推的递推公式．这一章还讨论了二次指标下的随机控制和微分对策问题．这部分结果都包括在已知的文献[49—55]中．但本书所采用的证明方法，却有别于上面引用的结果，我们直接用配方的办法，既保证了证明的严格性，同时又使用到的数学工具尽可能地简单易懂．这一章讨论的是非退化问题，即量测噪声协方差阵和二次指标中控制作用的加权阵都非退化．主要内容参

考了文献[2,56—59].

第六章讨论量测噪声协方差阵及二次指标中控制作用的加权阵都可能退化时的滤波、内插、外推及控制问题. 当控制作用为零，量测噪声退化时，滤波值不一定连续，因此也不一定满足随机微分方程，但这时可写出次优滤波方程，当小参数 $\varepsilon \to 0$ 时，次优滤波值趋于最优滤波值，这部分内容引自文献[2]. 当控制作用加权阵退化时，性能指标的极值不一定在容许控制集内达到，叫奇异控制问题[60]. 这一章给出了对随机系统和确定性系统，奇异和非奇异情形都统一适用的最优控制序列. 在它的作用下，二次性能指标趋于它的极小值，而对非退化和非奇异的情形，它又趋于最优控制. 对二次指标下的奇异随机微分对策，也证明了类似的结果. 这部分内容主要取材于文献[61—63].

本书的最后一章，讨论连续时间系统的 Gauss-Марков 滤波、内插和外推，也就是不用初始统计特性的线性无偏最小方差估计. 由于量测噪声协方差阵可能退化，因此估计值不一定连续，当然也写不出它们的微分方程，但我们给出了一种工程上适用的近似地得到这些估计的办法. 对这种近似值，可以写出它们的递推方程. 在这一章中，我们还引进了不同于前人的随机能观测的概念[64-66]，它同时适用于确定性系统和随机系统，是确定性系统的完全能观测性的自然推广，并且它和 Gauss-Марков 估计有密切的关系. 我们给出了判别它成立的充分必要条件. 此外还讨论了和 Gauss-Марков 估计有关的控制问题. 这一章的内容取材于文献[56,58,67—71].

作者学识粗浅，错误之处请读者批评指正.

陈 翰 馥

1982年5月于北京

目　录

现代控制系统理论小丛书序言 …… iii
前言 …… v
第一章　概率基础 …… 1
§1　概率空间、随机变量、数学期望 …… 1
§2　收敛定理 …… 3
§3　独立性 …… 4
§4　条件期望及其性质 …… 5
§5　随机过程 …… 9
§6　鞅及其收敛定理 …… 10
§7　Wiener 过程 …… 12
§8　随机积分 …… 13
§9　伊藤微分公式 …… 16
§10　随机微分方程 …… 17
第二章　随机逼近算法 …… 22
§1　引言 …… 22
§2　概率和微分方程相结合的方法 …… 26
§3　相关量测误差下求回归函数的零点 …… 41
§4　求回归函数的极值 …… 64
§5　连续时间的随机逼近算法 …… 74
§6　一个应用的例子 …… 92
第三章　最小二乘辨识的强一致性 …… 96
§1　引言 …… 96
§2　最小二乘辨识 …… 97
§3　相关噪声下的最小二乘辨识 …… 112
§4　连续时间系统的最小二乘辨识 …… 129

第四章　随机逼近型的辨识算法……………………………… 146
§1　离散时间的一类辨识算法 ……………………………… 146
§2　修改了的最小二乘辨识及协方差阵估计 ……………… 162
§3　连续时间算法 ……………………………………………… 173
§4　自校正调节器 ……………………………………………… 185
第五章　连续时间系统的线性无偏最小方差估计……… 197
§1　引言 ………………………………………………………… 197
§2　Kalman-Bucy 滤波 ……………………………………… 205
§3　内插与外推方程 …………………………………………… 210
§4　带线性控制项的滤波及随机控制 ……………………… 219
§5　随机微分对策 ……………………………………………… 227
第六章　奇异问题………………………………………………… 230
§1　引言 ………………………………………………………… 230
§2　量测噪声协方差阵退化时的次优滤波 ………………… 234
§3　次优内插与外推 …………………………………………… 238
§4　对奇异和非奇异情形统一适用的控制律 ……………… 240
§5　各种奇异控制 ……………………………………………… 248
§6　统一适用的策略 …………………………………………… 259
第七章　连续时间系统的 Gauss-Марков 估计 ………… 273
§1　引言 ………………………………………………………… 273
§2　缺初值估计 ………………………………………………… 275
§3　随机能观测性 ……………………………………………… 291
§4　Gauss-Марков 内插、滤波与外推 ……………………… 300
§5　二次型 Minimax 指标下的随机控制……………………… 305
参考文献 ………………………………………………………… 310

第一章　概率基础

这一章我们叙述将要用到的有关概率论及随机过程的内容，但是一般不加证明，有需要的读者可参考文献[1—4].

§1　概率空间、随机变量、数学期望

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 表示概率空间. Ω 中的点总用 ω 表示. ω 叫基本事件，$\mathscr{F}$ 是 Ω 中的子集合类，它构成一个 σ-代数，也就是说，它具有以下性质：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$，若 $A \in \mathscr{F}$，则 A 的余集 $A^c \in \mathscr{F}$.

2. 若 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

注意到

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c}，\text{所以} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}.$$

$\mathscr{F}$ 中的集合 $A \in \mathscr{F}$ 叫随机事件. P 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的函数，它具有以下性质：

1. $P(A) \geqslant 0$，$\forall A \in \mathscr{F}$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. 若 $A_i \in \mathscr{F}$，且 A_i 两两不相交，即 $A_i \cap A_j = \phi$，那么 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} PA_i$.

函数 P 叫概率测度，PA 叫随机事件 A 的概率.

我们把 $\mathscr{F}$ 中任意概率为零的集合 A 的任意子集 $B \subset A$

1111666

都算作随机事件，即 $B \in \mathscr{F}$，并设 $PB = 0$. 这样扩充后的概率空间叫完备概率空间. 下面我们讨论的都是完备概率空间.

我们总用 R^l 表示 l 维欧氏空间，$\mathscr{B}^l$ 是 Borel σ-代数.定义在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上,取值于 $(R^l, \mathscr{B}^l)$ 的可测函数 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\omega)$ 叫 l 维随机矢量. 设 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 是两个 l 维随机矢量,如果

$$P(\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\eta}) = 0,$$

那么我们说以概率为 1 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 相等,记作

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} \quad \text{a.s.}.$$

设 ξ 是一维的非负随机变量. 记

$$A_{ni} = \{\omega : i2^{-n} < \xi \leqslant (i+1)2^{-n}\},$$

那么 $A_{ni} \in \mathscr{F}$. 非负随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$ 就是函数 ξ 的 Lebesgue 积分

$$E\xi = \int_\Omega \xi dP = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n2^n} i2^{-n}PA_{ni} + nP(\xi > n)\right],$$

这个值也可能无穷. 对任意的随机变量 ξ，定义

$$\xi^+ = \max(\xi, 0), \quad \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

由于 ξ^+ 和 ξ^- 都是非负随机变量，所以遵照上述方法，$E\xi^+$ 和 $E\xi^-$ 都有定义. 注意到

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

所以很自然地把 $E\xi$ 定义成

$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-.$$

当然为了上述定义有意义,必需要求 $E\xi^+$ 或 $E\xi^-$ 有穷.

如果 $E|\xi| = E\xi^+ + E\xi^- < \infty$，那么称随机变量 ξ 是可积的,也称期望有穷.

设 $\boldsymbol{\xi} = [\xi^1, \cdots, \xi^l]^\tau$ 是 l 维随机矢量,定义函数

$$F_{\boldsymbol{\xi}}(x^1, \cdots, x^l) = P[\xi^1 < x^1, \cdots, \xi^l < x^l],$$

称它为 $\boldsymbol{\xi}$ 的分布函数,如果存在函数 $f_{\boldsymbol{\xi}}(x^1, \cdots, x^l)$ 使

$$F_\xi(x^1,\cdots,x^l)=\int_{-\infty}^{x^1}\cdots\int_{-\infty}^{x^l}f_\xi(\lambda^1,\cdots,\lambda^l)d\lambda^1\cdots d\lambda^l,$$

那么 $f_\xi(x^1,\cdots,x^l)$ 叫 $\boldsymbol{\xi}$ 的分布密度,或简称密度.

当 ξ 是一维时，分布函数和密度就记作 $F_\xi(x)$ 及 $f_\xi(x)$。数学期望还可以写成 Lebesgue-Stieltjes 积分的形式

$$E\xi=\int\xi dP=\int_{-\infty}^{\infty}x dF_\xi(x).$$

§2 收 敛 定 理

随机变量序列 ξ_n 收敛到 ξ，有以下各种不同的形式:

1. 以概率 1 收敛: $P(\xi_n\to\xi)=1$. 也就是说，除了一个零概率集 A 外，对每个 $\omega\notin A$，都有 $\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$. 这时记作 $\xi_n\to\xi$, a.s..

2. 依概率收敛: 对任何 $\varepsilon>0$ 都有

$$P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

这时记作 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

3. 依分布收敛或弱收敛: 对 $F_\xi(\cdot)$ 的任一连续点 x,

$$F_{\xi_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F_\xi(x),$$

这时记作 $\xi_n\xrightarrow[n\to\infty]{W}\xi$.

4. 平方收敛:

$$E|\xi_n-\xi|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

这些收敛性之间有如下关系:

$$\begin{array}{ccccc}\text{a.s. 收敛} & \Longrightarrow & \text{依概率收敛} & \Longrightarrow & \text{依分布收敛}\\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{平方收敛.} & & \end{array}$$

设 $E|\xi_n|<\infty$，并且在某种意义下 $\xi_n\to\xi$，但是否成立

$E\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi$?

定理 1.1（单调收敛定理） 设 $\xi_n \uparrow \xi(\xi_n \downarrow \xi)$ a.s.，并且 $E\xi_1^- < \infty(E\xi_1^+ < \infty)$，那么 $E\xi_n \uparrow E\xi(E\xi_n \downarrow E\xi)$.

定理 1.2（Fatou 引理） 设存在可积随机变量 η，使 $\eta \leqslant \xi_n(\xi_n \leqslant \eta)$，那么

$$E\varliminf_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E\xi_n \left(\varlimsup_{n\to\infty} E\xi_n \leqslant E\varlimsup_{n\to\infty}\xi_n\right).$$

定理 1.3（控制收敛定理） 设 $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ a.s.，并且存在可积随机变量 η，使 $|\xi_n| \leqslant \eta$，那么

$$E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

§3 独 立 性

设 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$，如果对任意的足标集 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 成立 $P\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \prod_{j=1}^{k} PA_{i_j}$，那么称随机事件 $A_1, A_2,\cdots$ 相互独立.

若 $\mathscr{F}_1$ 是 Ω 中集合的一个 σ-代数，并且只要 $A \in \mathscr{F}_1$，必有 $A \in \mathscr{F}$，那么称 $\mathscr{F}_1$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ-代数. 设 $\mathscr{F}_i$，$i = 1, 2, \cdots$是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数. 如果对任意的足标集 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 以及任意的 $A_k \in \mathscr{F}_{i_k}$，随机事件 $A_1,\cdots,A_k$ 相互独立，那么称 σ-代数 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2,\cdots$相互独立.

设 $\boldsymbol{\eta}_i$ 为 l_i 维随机矢量，$i = 1,2,\cdots$. 用$\mathscr{F}^{\eta_i}$ 表示包含一切形如

$$\{\omega: \boldsymbol{\eta}_i^{-1}(B),\ B \in \mathscr{B}^l\}$$

的集合的最小 σ-代数，那么称它是 $\boldsymbol{\eta}_i$ 生成的 σ-代数.

如果 σ-代数$\mathscr{F}^{\eta_i}$ 相互独立，那么就称随机矢量 $\boldsymbol{\eta}_i$，$i = 1,2,\cdots$相互独立.

如果 $\{\boldsymbol{\eta}_i\}$ 相互独立，相同分布，$E\|\boldsymbol{\eta}_i\| < \infty$，那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\eta}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} E\boldsymbol{\eta}_i \quad \text{a.s.}, \tag{1.1}$$

这就是强大数法则.

定理 1.4 (Borel-Cantelli 引理) 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是随机事件. 如果 $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i < \infty$，那么 $P\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j = 0$. 当 $A_i, i = 1, 2, \cdots$ 相互独立时，如果

$$\sum_{i=1}^{\infty} PA_i = \infty, \text{那么} P\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j = 1.$$

集合 $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$ 一般记作 $\overline{\lim_{j\to\infty}} A_j$，它由一切同时属于无穷个 A_j 的 ω 组成.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 为 l 维随机矢量，$\boldsymbol{\lambda}$ 为 l 维确定性矢量，函数

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = Ee^{i\boldsymbol{\lambda}^\tau\boldsymbol{\eta}}$$

叫 $\boldsymbol{\eta}$ 的特征函数，它是 $\boldsymbol{\eta}$ 的分布函数 $F_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x})$ 的 Fourier-Stieltjes 变换

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{\lambda}^\tau\boldsymbol{x}} dF_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}).$$

分布函数和特征函数之间一一对应. 即特征函数被分布函数唯一地确定，反过来，分布函数也被特征函数唯一确定.

设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$ 为三个随机矢量，$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{x}^\tau \boldsymbol{y}^\tau]^\tau$. $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相互独立的充分必要条件是 $\boldsymbol{w}$ 的特征函数等于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的特征函数的乘积.

§4 条件期望及其性质

下面两个随机量之间的关系式，总意味着可能有一个例