高等学校教材

Chuanbo Jisuan
Jiegou Lixue

船舶计算结构力学

金在律 谢祚水
古长江 吕和祥 编著

船舶计算结构力学

金在律　谢祚水　古长江　吕和祥　编著

大连理工大学出版社

内 容 介 绍

V2-44/55
18

本书阐述近代计算结构力学基本理论及其应用，共10章。内容包括变分法、有限元、组合结构分析、动力问题有限元、迁移矩阵法、加权残值法、广义变分原理、多变量有限元、边界元法、结构非线性理论及解法。书中既有理论分析，又有工程应用实例。

本书对造船、航空、土木、桥梁、起重等从事于钢结构工程的研究生、工程技术人员和高等院校师生适用。学力学的有关人员也有参考价值。

船 舶 计 算 结 构 力 学

Chuanbo Jisuan Jiegou Lixue

金在律 谢祚水 古长江 吕和祥 编著

大连理工大学出版社出版 辽宁省新华书店经销
(大连市甘井子区凌水河) 大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：20 1/4 字数：487千字
1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷
印数：0001—1400册

责任编辑：李鸽 封面设计：葛明
责任校对：焉儒芬

ISBN 7-5611-0319-0/U·12 定价：4.34 元

出 版 说 明

根据国务院国发[1978]23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量面努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年——1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规化的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次、多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学“的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年 3月

前　　言

电子计算技术的迅猛发展促使结构分析中各种方法的发展，形成了计算结构力学的新学科。李兹法、伽辽金法、能量法、有限元法(包括多变量有限元法)、加权残值法、边界元法、迁移矩阵法、结构优化、结构可靠性等都可列入为计算结构力学的内容。上述每一种方法都可写成一本书。而本书中阐述了工程力学工作者必须掌握的近代计算力学各种方法。由于篇幅所限，结构优化法和结构可靠性理论没有纳入本书中。

工程实际问题的计算是很复杂的。往往仅靠单一方法不一定能解决，而是通过多种途径采用多种方法解决。这就要求从事工程实际的力学工作者和工程技术人员灵活地掌握近代计算力学中各种方法，并应用于工程实际，真实反映结构力学现象，可靠地预报和分析结构响应，并使计算和分析简易可行。

本书的宗旨是使工程界的力学工作者和工程技术人员领会和理解各种计算力学方法的实质、内在联系和它们之间的共性和特性，以便灵活、机动地解决实际工程问题；反过来，以工程实际中的力学问题来推动力学的发展。所以，本书是以数学问题力学化、力学问题工程化，使工程技术人员容易接受、容易掌握为指导思想的。有限元法为计算力学的数值解法做出了划时代的贡献，很多领域中的力学问题可以用有限元离散技术得到解决。所以本书重点介绍有限元法在静力、动力问题和结构非线性解法及多变量有限元内容，除此之外还介绍其它数值计算方法。加权残值法为阐明各种力学方法的实质和内在关系将会起重要作用。几十年来孤立的、单一发展的各种力学方法，通过加权残值法，可以互相贯通、互相补充，发展更新的力学方法。所以用加权残值法阐明和解析各种力学方法的实质和内在联系，使内容繁多、容易混淆、难以理解的力学概念变得推导简单、容易理解、一目了然。

本书内容包括

第一章变分原理。有限元及其它力学方法的数学基础是变分原理。本章通过杆、梁、板、动力学等问题的变分式来展开变分原理。

第二章弹性理论中的有限元法。在初等有限元的基础上进一步研究等参元、形状函数及多维问题的有限元法。

第三章讨论有限元在工程计算中具有实用意义的组合结构模型化和计算技巧，介绍船舶结构计算中的特种单元。

第四章是动力问题有限元法。静力问题有限元法进一步推广到动力问题，并介绍动力问题解法。

第五章是迁移矩阵法。迁移矩阵法对杆系结构是有效方法。介绍了船体振动和船舶纵横强度分析问题迁移矩阵法的应用。

第六章是加权残值法的概念。这一章是为后继章节的需要而编写的。

第七章、第八章是弹性理论变分原理和广义变分原理及多变量有限元、弹性力学中各种

能量原理和广义变分原理是用加权残值法的概念来阐明各种方法之间的内在联系和力学意义的。阐述多变量有限元——混合元、杂交元、杂交混合元、拟协调元等。

第九章是边界元法。通过弹性二维问题来展开边界元法的计算技巧。

第十章是结构非线性问题。讨论了材料非线性、几何非线性、材料及几何非线性理论及非线性有限元解法。

本书第二章、第四章由谢祚水编写，第十章由吕和祥编写，第三章和第五章由古长江编写，第一章、第六章、第七章、第八章和第九章由金在律编写，全书由金在律主编，本书插图由董惠新绘制。

本书主要是为船舶结构力学专业硕士研究生编写的。也可供从事于钢结构，如航空、土木、车辆、桥梁、起重机结构分析的研究生、工程技术人员及大学生参考。

本书是在中国船舶总公司教材编审室和船舶工程教材委员会指导下编写的。各院校同行们和教材委员会委员们在编写过程中提供了宝贵意见和建议。主审杨永谦教授在编写大纲、修改内容、建立体系等各方面多次提出了极宝贵意见和建议，甚至文字、符号修改等方面也一丝不苟地审核和校对。在此一并表示衷心的感谢。

编　者

1989年 5 月

目　　录

第一章　变分原理

变分原理是力学分析中重要数学工具之一。能量法、有限元法、加权残值法等力学方法都是以变分原理为数学工具的。本章中通过微分与变分的相似关系，初步了解变分原理，学习泛函的积分方程与微分方程的关系。

§1.1　泛函的概念

在函数论中，自变量 x 对应着另一变量 y，则变量 y 称为自变量 x 的函数 $y(x)$。假如自变函数 $y(x)$ 对应着另一个函数 $\Pi[y(x)]$，$\Pi[y(x)]$ 称为泛函。就是说，泛函是函数的函数，是函数的广义函数。如图1.1.1 所示，通过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 的曲线长度 $L[y(x)]$ 是函数 $y(x)$ 的函数

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \tag{1.1.1}$$

于是这一问题的泛函是通过两点的长度。通过两点的函数很多，因此泛函值也很多，然而其中最短的只有一个，这就是泛函极值问题。变分原理就是研究泛函极值问题或驻值问题。

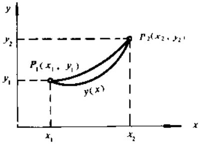

图　1.1.1

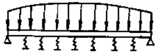

图 1.1.2

如图1.1.2 所示弹性基础梁受分布载荷 $q(x)$，其边界条件是在 $x=0$ 和 $x=l$ 处

$$w(x)=\frac{d^2w(x)}{dx^2}=0 \tag{1.1.2}$$

总势能由三部分组成：梁弯曲变形能 Π_b、弹性基础的变形能 Π_f 及载荷势能 Π_q，它们的表达式分别是

$$\begin{aligned}\Pi_b&=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2dx\\ \Pi_f&=\frac{1}{2}\int_0^l kw^2dx\\ \Pi_q&=-\int_0^l qw\,dx\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

总势能是

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^l k w^2 dx-\int_0^l qw\,dx \tag{1.1.4}$$

在这里，自变函数是$w(x)$，泛函是总势能$\Pi[w(x)]$，弹性基础梁的力学问题成为在$0\leqslant x\leqslant l$的区间找一个函数$w(x)$，使它满足边界条件式(1.1.2)，并使由式(1.1.4)定义的泛函$\Pi[w(x)]$取最小值。

以上两个例子中泛函是用积分方程描写的，但也可以用微分方程描写。在固体力学领域，泛函都是积分形式表达，而且绝大部分泛函式是自变函数及其导数的二次整式，这类泛函叫作二次泛函。

§1.2 变分的特性

通过微分学和变分学对比，可理解变分特性。

1.2.1 微分和变分

函数$y(x)$的自变量x的增量Δx是$\Delta x=x-x_1$，当x是独立变量时，x的微分等于x的增量$dx=\Delta x$；泛函$\Pi[y(x)]$的自变函数$y(x)$的增量在它很小时称为变分，用$\delta y(x)$或简单地用δy表示。变分δy等于$y(x)$与跟它相接近，并通过边界的另一个函数$y_1(x)$之差，即$\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$。特别指出的是，变分$\delta y(x)$不是常值，而是通过边界条件的函数，其几何意义如图1.2.1所示。两个自变函数相接近的意义可有不同理解。最简单的理解是在任意x值上$y(x)$和$y_1(x)$之差很小，即

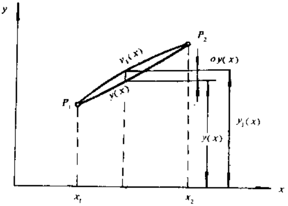

图 1.2.1

$$y(x)-y_1(x)\leqslant\varepsilon$$

这种接近称零阶接近，如图1.2.2所示。很明显，这时之差$y'(x)-y_1'(x)$不一定是微量。不仅满足零阶接近，同时还要求自变函数的斜率也很接近，即

$$y(x)-y_1(x)\leqslant\varepsilon$$
$$y'(x)-y_1'(x)\leqslant\varepsilon$$

这种接近称一阶接近，如图1.2.3所示。依此类推，k阶接近要求零阶至k阶导数之差都很小。

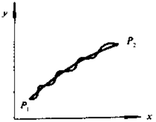

图 1.2.2

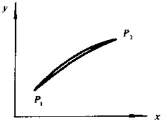

图 1.2.3

1.2.2 函数的微分和泛函的变分

函数的微分有两个定义。函数的增量

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

可展开为线性项和非线性项

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$$

其中线性项 $A(x)$ 和 Δx 无关，$\beta(x, \Delta x)$ 与 Δx 有关，是高次项，当 $\Delta x \to 0$ 时 $\beta(x, \Delta x) \to 0$，这时 $y(x)$ 是可微的

$$\Delta y = \mathrm{d}y = A(x)\Delta x = y'\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) \tag{1.2.1}$$

于是函数的微分是函数增量的主部分，即线性部分。

函数的第二个定义是 ε 为一小参数，将 $y(x+\varepsilon\Delta x)$ 对 ε 求导数，得

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\Delta x) = \frac{\partial y(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial(x+\varepsilon\Delta x)} \frac{\partial(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial \varepsilon} = y'(x+\varepsilon\Delta x)\Delta x$$

当 ε 趋近于零时

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon\to 0} = y'(x)\Delta x$$

这就说明，$y(x+\varepsilon\Delta x)$ 在 $\varepsilon=0$ 处对 ε 的导数等于 $y(x)$ 在 x 处的微分。ε 称为拉格朗日乘子，此法称为拉格朗日乘子法。

泛函的变分也有两个定义。自变函数 $y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$ 所引起的泛函的增量

$$\Delta \Pi = \Pi[y(x) + \delta y(x)] - \Pi[y(x)]$$

可以展开为线性项和非线性项

$$\Delta \Pi = L[y(x), \delta y(x)] + \beta[y(x), \delta y(x)]\delta y_{max}$$

其中 L 是对 δy 的线性泛函项，而 β 是非线性泛函项，是 δy 的同阶或高阶微量，当 $\delta y(x) \to 0$ 时 $\delta y_{max} \to 0$，同时 β 也趋近于零，这时泛函的增量等于 $\delta y(x)$ 的线性部分 $L[y(x), \delta y(x)]$，叫做泛函的变分，用 $\delta \Pi$ 来表示。

$$\delta \Pi = \Delta \Pi\big|_{\delta y\to 0} = \Pi[y(x) + \delta y(y)] - \Pi[y(x)] = L[y(x), \delta y(x)] \tag{1.2.3}$$

所以泛函的变分是泛函增量的主部，而且这个主部对于 $\delta y(x)$ 来说是线性的。

同样，也有拉格朗日的泛函变分定义。泛函的增量也可以用做小参数 ε 表示为

$$\begin{aligned}\Delta \Pi &= \Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] - \Pi[y(x)] \\ &= L[y(x), \varepsilon\delta y(x)] + \beta[y(x), \varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{max}(x)\end{aligned}$$

因为泛函导数是 $\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$ 对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] = {}& \frac{\partial}{\partial \varepsilon}L[y(x), \varepsilon\delta y(x)] + \beta[y(x), \varepsilon\delta y(x)]\delta y_{max}(x) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\beta[y(x), \varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{max}(x)\end{aligned}$$

因为线性项 $L[y(x), \varepsilon\delta y(x)]$ 对 δy 是线性的，故

$$L[y(x), \varepsilon\delta y(x)] = \varepsilon L[y(x), \delta y(x)]$$

并且当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\beta[y(x), \varepsilon\delta y(x)] \to 0$，$\delta y_{max} \to 0$，得

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]=L[y(x),\delta y(x)] \tag{1.2.4}$$

由此得拉格朗日的泛函变分定义为

$$\delta\Pi=\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\Big|_{\varepsilon\to 0}=L[y(x),\delta y(x)] \tag{1.2.5}$$

1.2.3 变分运算规则

自变函数的变分 $\delta y(x)$ 是 x 的函数，于是可以用 x 求导数

$$\frac{d}{dx}[\delta y(x)]=\frac{dy(x)}{dx}-\frac{dy_1(x)}{dx}=y'(x)-y_1'(x)=\delta y'(x)=\delta[\frac{dy(x)}{dx}]$$

即
$$\frac{d}{dx}[\delta y(x)]=\delta[\frac{dy(x)}{dx}] \tag{1.2.6}$$

因此，变分 δ 和导数 $\frac{d}{dx}$ 的运算可换，变分的导数等于导数的变分。

同理
$$\begin{aligned}&[\delta y(x)]''=\delta y''(x)\\&[\delta y(x)]^n=\delta y^n(x)\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其它运算规则如下：

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \delta(\Pi_1+\Pi_1)=\delta\Pi_1+\delta\Pi_2\\
&(2)\quad \delta(\Pi_1\Pi_2)=\Pi_1\delta\Pi_2+\Pi_2\delta\Pi_1\\
&(3)\quad \delta(\Pi_1/\Pi_2)=(\Pi_2\delta\Pi_1-\Pi_1\delta\Pi_2)/\Pi_2^2\\
&(4)\quad \delta\Pi^n=n\Pi^{n-1}\delta\Pi\\
&(5)\quad \delta(y^n)=(\delta y)^n\\
&(6)\quad \delta\int_{x_1}^{x_2}\Pi dx=\int_{x_1}^{x_2}\delta\Pi dx
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

1.2.4 极大极小——极值问题

与函数的极大、极小问题相类似，泛函也有极大、极小问题。如果任何一条接近于 $y=y_0(x)$ 的曲线 $y(x)$ 的泛函值 $\Pi[y(x)]$ 不大(或不小) 于 $y_0(x)$ 的泛函 $\Pi[y_0(x)]$，即 $\delta\Pi=\Pi[y(x)]-\Pi[y_0(x)]\leqslant 0$(或 $\geqslant 0$)，则泛函 $\Pi[y_0(x)]$ 在曲线 $y_0(x)$ 上达到极大(或极小) 值，而且在 $y=y_0(x)$ 上泛函的一阶变分等于零

$$\delta\Pi=0 \tag{1.2.10}$$

因为函数接近有零阶和高阶之分，所以变分分为强变分和弱变分。对于 $|y(x)-y_0(x)|\leqslant\varepsilon$ 的零阶接近的变分称为强变分，这样得到的极值叫强极值。如果是一阶接近，即

$$\begin{aligned}&|y(x)-y_0(x)|\leqslant\varepsilon\\&|y'(x)-y_0'(x)|\leqslant\varepsilon\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

则把这类变分称弱变分，所得到极值称为弱极值。和微分的极值条件一样，一阶变分等于零的条件 $\delta\Pi=0$ 只是存在极值(或驻值)的必要条件，而不是充分条件，只有两阶变分才能确定极大或极小。

§1.3 泛函极值问题和微分方程的关系——欧拉方程

变分法的早期工作（十八世纪）是把泛函极值问题化为微分方程问题，因为微分方程发展在先，变分的积分方程发展在后，一旦将泛函极值的积分方程转化为微分方程，便认为问题得解。但实际不然，除了一些典型微分方程可解之外，还有一些微分方程是难解的。自从李兹（1908年）提出用近似方法直接解泛函极值方程之后，人们发现近似解法比微分方程法更为方便。电子计算机出现之后， 越来越多的人接受数值近似计算方法，逐渐形成计算力学。

从简单问题入手，在§1.1节中提到的例子是，通过两点的任意曲线$y(x)$的长度$L[y(x)]$求泛函$L[y(x)]$中最短的一条曲线。长度L的方程为

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.3.1}$$

上述问题进一步概括为：求泛函

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{1.3.2}$$

在边界条件
$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2 \tag{1.3.3}$$
下为极值的函数$y(x)$。其中泛函Π等价于长度L；$F(x,y,y')=\sqrt{1+(y')^2}$。我们要求$y(x)$的极值，此时$\delta\Pi=0$，即一阶变分等于零。

设正确解为$y(x)$，$y_1(x)$为接近于$y(x)$的任意函数，则

$$y_1(x)=y(x)+\delta y(x) \tag{1.3.4}$$

其中$\delta y(x)$为满足边界条件式(1.3.3)的接近于$y(x)$的变分，如图1.3.1所示，显然$\delta y(x)$在边界上等于零，即

$$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0 \tag{1.3.5}$$

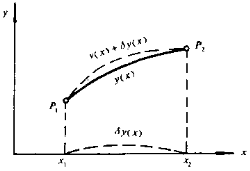

图 1.3.1

泛函增量$\Delta\Pi$为

$$\Delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_1')\,\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{1.3.6}$$

根据泰勒级数展开，有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_1')\,\mathrm{d}x&=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x+\cdots\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

令
$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{1.3.8a}$$

$$\delta^2\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.3.8b}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

这时式(1.3.6)可以写成

$$\Delta\Pi=\delta\Pi+\frac{1}{2!}\delta^2\Pi+\cdots \tag{1.3.9}$$

其中$\delta\Pi$, $\delta^2\Pi$, …称为一阶变分、二阶变分等。

根据式(1.2.10)的泛函极值条件，$\delta\Pi=0$, 即

$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=0 \tag{1.3.10}$$

关于泛函的一阶变分式（1.3.8a）或式（1.3.10）可由导数的概念获得。令$F(x, y, z)$是自变量x, y, z的函数，则其全导数为

$$\mathrm{d}F(x, y, z)=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.3.11}$$

令泛函$F(x, y, y')$是函数$y(x)$的函数。假如F不仅与y有关，同时与其导数有关，这时泛函一阶变分自变函数可视为$y(x)$和其导数$y'(x)$的函数。因此可以把微分符号d用变分符号δ来代替，而$\delta x=0$, 因泛函的变分只与$y(x)$和$y'(x)$的变分有关，故泛函变分为

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \tag{1.3.12}$$

假如泛函含有y, y', y'', 则

$$\delta F(x, y, y', y'')=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' \tag{1.3.13}$$

对式(1.3.10)的第二项进行分部积分，得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x$$

把上式代入式(1.3.10)中，得

$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{1.3.14}$$

上式第二项是边界条件式，当给定边界条件情况下在$x=x_1$和$x=x_2$处$\delta y=0$,（式(1.3.5)），即第二项等于零，这个边界条件称为基本边界条件。当没有给定基本边界条件时δy在$x=x_1$和$x=x_2$处可能不等于零，则$\delta\Pi=0$的条件必须要求在边界处$\partial F/\partial y'=0$，这一边界条件称为自然边界条件。凡在变分法中因边界值未给定而必须使一阶变分等于零而满足的边界条件，统称为自然边界条件。今后将看到弹性力学问题的基本边界条件为位移（包括转角），自然边界条件为力（包括弯矩）。

式(1.3.14)的第一项中δy是x的函数，它不能等于零，故$\delta\Pi=0$的条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1.3.15}$$

这个方程称为欧拉方程，就是说，泛函极值的积分方程转换成欧拉方程——微分方程。这是1744年欧拉提出的著名方程，后来拉格朗日用拉格朗日法简捷地得到相同结果（1755年），所