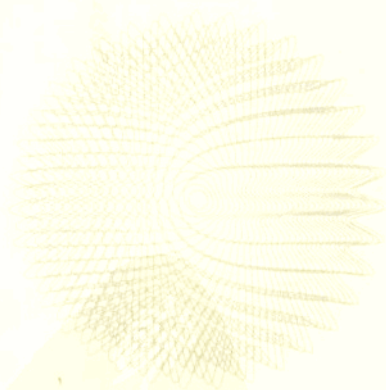


岩波講座 基礎工学 7

線形分布定数系論 III

高橋秀俊 著

岩波書店



71.21
00
26-7

岩波講座 基礎工学 7

線形分布定数系論

Ⅲ

高橋 秀俊



目 次

第4章 2次元, 3次元の波動(承前)

4. 9 源の配列のつくるポテンシャル(K_n 関数)	205
4.10 球面上の波	211
4.11 3次元の波動方程式	213
4.12 輻射される波(3次元)	220
4.13 球ベッセル関数の加法定理その他	223
4.14 層状構造の中の波	228
4.15 管中を伝わる波	239
4.16 空洞の固有振動	244

第5章 3次元のベクトル場

5. 1 渦のあるベクトル場	249
5. 2 ベクトル波動方程式(電磁波)	257
5. 3 導波管	266
5. 4 層状構造の中のベクトル波	276
5. 5 極座標によるベクトル波動方程式の解	283
5. 6 球面上の電流分布による電磁界	291
5. 7 導体球による電磁波の散乱	300

線形分布定数系論 I 目次

第1章 1次元分布定数系

第2章 2次元分布定数系

線形分布定数系論 II 目次

第3章 3次元のポテンシャル

第4章 2次元, 3次元の波動(前半)

線形分布定数系論 IV 目次

第6章 4階微分方程式であらわされる場

第7章 波動の一般的性質

第8章 過渡現象

表紙カット製作: 渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

$$u_n = I_0(2\pi n\rho/a) \quad (4.281)$$

とすれば、たしかに(4.278)の解になる。

変形ベッセル関数 $I_0(k\rho)$ は(4.29)から得られる展開式

$$I_0(k\rho) = 1 + \frac{(k\rho)^2}{2^2} + \frac{(k\rho)^4}{2^2 \cdot 4^2} + \cdots \quad (4.282)$$

でわかるように、 $k\rho$ の偶関数で、しかも $k\rho$ が増すと単調に増大する関数である。そのことは $u = I_0(k\rho)$ が

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} \right) - k^2 u = 0 \quad (4.283)$$

の解であることからわかる。すなわち $u > 0$ であれば、(4.283)から $\frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho}$ は増加関数であって、 $\rho = 0$ で 0 から出発して単調に増大し、したがって正である。したがって u も単調に増大する。しかも、 ρ の大きいところでは $u \propto e^{k\rho}$ であることもわかる。実際、 $I_0(k\rho)$ はまた積分表示(4.63)に相当する式

$$I_0(k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{k\rho \cos \alpha} d\alpha \quad (4.284)$$

からわかるように、 ρ が大きいときは

$$u \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} e^{k\rho} \quad (4.285)$$

となる。

ところで、この I_0 はいま必要としている解ではない。これは多項式解と同様、 z 方向に周期性をもつポテンシャルの、源の存在しない空間における局所的な様子をあらわすのに適した形であり、遠方で $\rightarrow 0$ になることを要求するいまの問題には、(4.283)のもう一つの解を考えなければならない。そのような性質をもった関数は、

$$u_n = K_0(2\pi n\rho/a) \quad (4.286)$$

と書かれる。実は K_0 はハンケル関数 $H_0^{(2)}(k\rho)$ の $k\rho$ が純虚数となったものである。すなわち

$$K_0(k\rho) = -\frac{\pi j}{2} H_0^{(2)}(-jk\rho) \quad (4.287)$$

で、 $\rho \rightarrow \infty$ となったときに

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{\pi a} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a} K_0\left(\frac{2\pi n \rho}{a}\right) \cos \frac{2\pi n z}{a} \\
 &= \frac{2q}{a^2} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot K_1\left(\frac{2\pi n \rho}{a}\right) \cos \frac{2\pi n z}{a} \quad (4.305)
 \end{aligned}$$

となる。ところで、この解では z 軸上に横向きの変極子が連続的にならんだものが存在する。それだけを取り出すと

$$u'' = -\frac{q}{2\pi a} \frac{\cos \phi}{\rho} \quad (4.306)$$

である。そこでこれを引き去って

$$u' - u'' = \frac{q}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{\rho} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a} K_1\left(\frac{2\pi n \rho}{a}\right) \cos \frac{2\pi n z}{a} \right\} \cos \phi \quad (4.307)$$

が求めるポテンシャルである。

この種のポテンシャルは結晶格子の中の静電場などの問題でしばしばあらわれる。

4.10 球面上の波

地球の表面を伝わる波のように球面上での波は、平面上の波に準じた扱いができるはずである。この場合の方程式は、球面上の点を極座標 (θ, ϕ) であらわすと、

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0 \quad (4.308)$$

となる。ただし球の半径を 1 としてある。

ところが、この方程式は 3 次元ラプラス方程式の解を

$$u = R(r) Y(\theta, \phi) \quad (4.309)$$

と書いたときに、 $Y(\theta, \phi)$ のみたす方程式 (3.125) と同じような形をしている。

ただ、 $n(n+1)$ のかわりに k^2 が入っているだけの違いである。

そのことは球面の波の固有値は

$$k^2 = n(n+1) \quad (4.310)$$

で与えられ、その場合に球面全体での固有振動が存在することを示している。

その固有関数は

$$P_n^m(\cos \theta) e^{+jm\phi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

にはかならないこともわかる。一方, k が $\sqrt{n(n+1)}$ 以外の値をとるときは固有振動と一致しないから, 強制振動, つまり

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = -\rho(\theta, \phi) \quad (4.311)$$

が解を有することになる。そうして, そのグリーン関数を求めることが問題になる。

今までと同じように, $u(\theta, \phi)$ を固有関数で展開する方法を用いれば, (4.311) のグリーン関数として

$$G(\theta, \phi; \theta', \phi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') e^{jm(\phi-\phi')}}{n(n+1)-k^2} \quad (4.312)$$

が得られる。あるいは

$$G(\theta, \phi; \theta', \phi') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi-\phi'))}{n(n+1)-k^2} \quad (4.313)$$

と書いてもよい。ここで

$$\mu = \cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi-\phi') \quad (4.314)$$

としたとき, Θ は点 (θ, ϕ) と点 (θ', ϕ') との間の球面上ではかった距離である。

ところで(4.313)はグリーン関数の意味から考えて, これ自身 (θ, ϕ) の関数として一つの特異点を除き(4.308)をみたす関数である。そのことは ν を

$$\nu(\nu+1) = k^2 \quad (4.315)$$

の根, つまり

$$\nu = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad (4.316)$$

とするとき, $G(\theta, \phi; \theta', \phi')$ は μ の関数として ν 次のルジャンドルの微分方程式をみたすことを意味する。前には n が整数でないときの(3.106)の解としての $P_n(x)$ を定義していなかったが, 適当にそのような場合の $P_n(x)$ を定義し

ておけば、解は $P_\nu(\mu)$ と $Q_\nu(\mu)$ の線形結合として得られると思われる。

実際には、整数でない ν に対する $P_\nu(\mu)$ は、たとえば積分表示

$$P_\nu(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \alpha)^\nu d\alpha \quad (4.317)$$

によって定義される。これは $\mu=1$ で正則な関数で、したがって 141 ページでのべたように $\mu=-1$ に対数的特異点があり、その主要部は

$$\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \log(1+\mu) \approx \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \log \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.318)$$

そこで、問題のグリーン関数は簡単に

$$G(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{-1}{4 \sin \nu\pi} P_\nu(-\cos \Theta) \quad (4.319)$$

で与えられることがわかる。(4.313)が(4.319)に等しいことを(複素積分を使って)直接に証明することもできる。

ν が整数、つまり $k^2 = n(n+1)$ となるときは(4.319)の分母が 0 となり、グリーン関数は存在しないが、そのときは $\mu=1$ のところに対数的特異点のある解をつくると、どうしてもその対称点、つまり $\mu=-1$ のところにも特異点ができる。つまり一つの点から周囲に輻射される波が反対の極に四方から集まって収束されて、特異点を生じてしまうのである。

球面上の波は地球上の大洋の波などで問題になる。

4.11 3次元の波動方程式

3次元空間で $e^{j\omega t}$ に比例して振動する周期的な波のみたす方程式は

$$\nabla^2 u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (4.320)$$

である。この方程式によって記述される現象として代表的なものは、圧縮性流体の中の波、つまり音波である。その場合 u は流体の流れの速度ポテンシャルまたは圧力をあらわすと考えられる。

(4.320)を解くのに通常はラプラス方程式の場合と同様に変数分離を行なう。

a) 直角座標: x, y, z

$$u = X(x)Y(y)Z(z), \quad (4.321)$$

$$X'' = -\alpha^2 X, \quad Y'' = -\beta^2 Y, \quad Z'' = -\gamma^2 Z. \quad (4.322)$$

つまり

$$X = e^{\pm j\alpha x}, \quad Y = e^{\pm j\beta y}, \quad Z = e^{\pm j\gamma z}$$

とすると, これを(4.320)に代入して

$$-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)XYZ + k^2 XYZ = 0 \quad (4.323)$$

すなわち

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k^2 = 0 \quad (4.324)$$

となって, これから α, β, γ に対する条件がきまる. すなわち, 閉じた空間で α, β, γ が境界条件からきまるならば(4.324)から k の値が固有値としてきまるし, 逆に k が与えられていて, α, β, γ のうちの二つ, たとえば α, β が幾何学的条件から定まる場合には, (4.324)から残りの γ がきまる.

b) 円筒座標: ρ, ϕ, z

$$u = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (4.325)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi'' &= -m^2\Phi, & m: \text{整数}, \\ Z'' &= -h^2Z, & h: \text{任意}. \end{aligned} \right\} \quad (4.326)$$

つまり $\Phi = e^{\pm jm\phi}$, $Z = e^{\pm jhz}$ とすると

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(k^2 - h^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0 \quad (4.327)$$

となる. ここで, (4.327)はベッセルの微分方程式にほかならないので, その解は

$$R = \begin{cases} J_m(\sqrt{k^2 - h^2}\rho), \\ Y_m(\sqrt{k^2 - h^2}\rho) \end{cases} \quad (4.328)$$

となる. 特に $\rho=0$ つまり z 軸が領域に含まれていて, 特異点でない場合には J_m の方だけが用いられ, 境界条件からきまる λ_{mn} によって

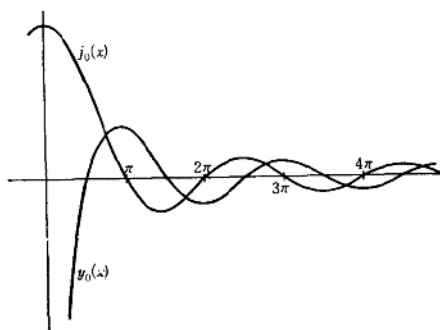
$$\sqrt{k^2 - h^2} = \lambda_{mn} \quad (4.329)$$

のように条件が与えられる場合が多い. その場合には(4.329)から固有値 k がきまるか, または k が与えられて h がきまる.

ここで $k^2 - h^2$ は正である場合も負である場合もあり得る. 正であれば ρ 方向の関数(4.328)は J_m, Y_m でよいが, 負であると $\sqrt{k^2 - h^2}$ は虚数となり, 4.9節でのべた I_m, K_m をかわりに使う必要がある.

$$\left. \begin{aligned} y_0(kr) &= -\frac{\cos kr}{kr}, \\ y_1(kr) &= -\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}, \\ y_2(kr) &= -\frac{3-(kr)^2}{(kr)^3} \cos kr - \frac{3}{(kr)^2} \sin kr, \\ y_3(kr) &= -\frac{15-6(kr)^2}{(kr)^4} \cos kr - \frac{15-(kr)^2}{(kr)^3} \sin kr, \end{aligned} \right\} \quad (4.354)$$

$$\left. \begin{aligned} h_0^{(2)}(kr) &= \frac{j}{kr} e^{-jkr}, \\ h_1^{(2)}(kr) &= \left\{ -\frac{1}{kr} + \frac{j}{(kr)^2} \right\} e^{-jkr}, \\ h_2^{(2)}(kr) &= \left\{ -\frac{j}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} + \frac{3j}{(kr)^3} \right\} e^{-jkr}, \\ h_3^{(2)}(kr) &= \left\{ \frac{1}{kr} - \frac{6j}{(kr)^2} - \frac{15}{(kr)^3} + \frac{15j}{(kr)^4} \right\} e^{-jkr}. \end{aligned} \right\} \quad (4.355)$$

図 4.14 $j_0(x)$, $y_0(x)$ のグラフ

スカラー波動方程式の例——音波の方程式

本節のはじめにのべた 3 次元の波動方程式 (4.320) によって記述される現象の最も典型的なものは圧縮性流体の中の波, つまり音波である. 管の中の音波については第 1 章で触れたが, あらためて, 3 次元空間での一般の音波についてのべる.

さらに ρ, κ が場所によって変わらない様な媒体の中では

$$\nabla^2 u + \omega^2 \kappa \rho u = 0 \quad (4.365)$$

で

$$\omega^2 \kappa \rho = k^2 \quad (4.366)$$

と置けば(4.320)となる。

4.12 輻射される波(3次元)

(4.355)の形の解は、まず、座標原点に何か振動する源があって、それが原因となって周囲にひろがって行く波を与える。まず $n=0$ のときは $Y_0(\theta, \phi)=1$ であるので

$$u = -\frac{jk}{4\pi} h_0^{(2)}(kr) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (4.367)$$

がそのような解であって、これは原点に強さ1の振動する源があったときに輻射される波である。具体的には、小さい球状の物体の半径が角周波数 ω でのびたり縮んだり脈動をくりかえすときに輻射される音波の圧力波を与えている。もう少し現実的な条件としては、無限に広い平板があり、そこに1個の小さい孔があって、そこから周期的に空気を吹き出したり吸い込んだりしているとき、あるいは、板の一部が小さい振動膜になっていて、それが何かの力で強制振動をさせられているときに板の表側の半無限空間に輻射される波をあらわす。その場合、平板の片側でだけ(4.367)が成立するのであるが、平板上では u の法線微係数が0であるので、鏡像の原理によって場を平面の裏側にまで拡張して考えることができ、そうした場合は、場は球対称の場と考えることができるのである。いずれにしても、(4.367)は波長 $2\pi/k$ にくらべて極めて小さい源によって生ずる波について成り立つ式である。

3次元波動方程式のグリーン関数

以上の結果はただちに自由空間で外力(右辺)のある場合の3次元波動方程式

$$\nabla^2 u + k^2 u = -\rho(x, y, z) \quad (4.368)$$

の解を求めることに応用される。ただし(4.368)の解は無限遠で u の満たす条件をきめなければ一義的にきまらない。そこで u に課すべき自然な条件は、遠方($r \rightarrow \infty$)で

u_n は減衰して遠方までとどかない。したがって ρ が大きいところでは、(4.373) は有限個の項だけから成ると考えてよい。

特に $k < 2\pi/a$ であると $n=0$ 、つまり z 軸を軸とする円筒の波面をもつ波(円筒波)だけが伝わり、 $n \neq 0$ の成分はすべて減衰してしまう。

この種の問題は格子状にならんだ物体による波の回折などであられる。

4.13 球ベッセル関数の加法定理その他

2次元の場合に円筒座標による解が平面波の重ね合せとなった(4.3節)と同様に、球座標による波動方程式の解も平面波の重ね合せでつくることができる。また逆に平面波を球座標による解で級数に展開することもできる。さらに、1点から輻射される波を別の点を原点とする球座標による解で展開すると、加法定理と呼ばれる関係式が得られる。それらは円筒座標について行なったのと同様と同じように導かれるが、 $e^{jm\phi}$ のかわりに $P_n(\cos \theta)$ が入ってくるために、やや面倒になる。これらを導き出すにはいろいろな方法があるが、ここでは球面上に分布した源からの輻射の問題の解を基礎として扱おう。これは4.6節(191ページ)のやり方である。

球面に分布する源からの輻射

3.7節で扱った球面に分布する電荷によるポテンシャルの問題を波動の問題にうつして、半径 a の球面上に源が面密度 $\sigma(\theta, \phi)$ で分布しているときに、これによってできる波動場を求めよう。すなわち、波動方程式(4.320)を

- (1) $r \rightarrow \infty$ で輻射条件 $\partial u / \partial r + jku \rightarrow 0$ をみたし、
- (2) $r=a$ で u は連続、 $\partial u / \partial r$ は不連続で

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a-0} - \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a+0} = \sigma(\theta, \phi)$$

という条件で解くことである。

(3.210) にならって

$$u = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{mn} \frac{j_n(kr)}{j_n(ka)} P_n^{(m)}(\cos \theta) e^{jm\phi}, & r \leq a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{mn} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} P_n^{(m)}(\cos \theta) e^{jm\phi}, & r \geq a \end{cases} \quad (4.378)$$

となる。これが $h_0^{(2)}$ に対する加法定理の普通の形である。なお $r \geq a$ なら j_n と $h_n^{(2)}$ とが交換される。なおこれは (4.388) で $\theta' = 0$ としても得られる。これは図 4.15 で点 A からの輻射を点 O を中心とした球ベッセル関数で展開した形にほかならない。

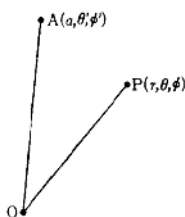


図 4.15

(4.389) の実数部をとると

$$j_0(k\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr) j_n(ka) P_n(\cos \Theta) \quad (4.390)$$

を得る。これは J_0 に対するゲーゲンバウエルの加法定理 (4.81) に相当し、 $j_0(kr)$ に対する原点移動の公式である。

平面波と球面波との関係

(4.389) で a が非常に大きくなると、左辺は平面波とみなせるようになる。すなわち

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta} \approx a - r \cos \Theta. \quad (4.391)$$

また,

$$h_n^{(2)}(ka) \approx j^{n+1} \frac{e^{-jka}}{ka} \quad (4.392)$$

であるから

$$j \frac{e^{-jk(a-r \cos \Theta)}}{ka} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr) j^{n+1} \frac{e^{-jka}}{ka} P_n(\cos \Theta),$$

あるいは

$$e^{jkr \cos \Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \Theta). \quad (4.393)$$

左辺は平面波の式で、これが球座標による解によって展開されたわけである。これは (4.67) に相当する。

これから逆に球座標による解を平面波の重ね合せとしてあらわすこともできる。(4.393) を $e^{-jkr \cos \Theta}$ を Θ の球関数で展開した結果であると考えて、係数

$$\tan \delta_n = \frac{j_n(ka)}{y_n(ka)} \quad (4.400)$$

で与えられ, これを使った散乱の式((4.250)に相当)は, r の大きいところで

$$u \simeq e^{-jkr \cos \theta} - \frac{j e^{-jkr}}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} (1 - e^{-2j\delta_n}) P_n(\cos \theta) \quad (4.401)$$

となるが, これは δ_n として個々に計算したものを使えば一般の球対称な散乱体に対して成り立つ式である. また散乱断面積は

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{1}{k^2} \left| \sum (2n+1) e^{-j\delta_n} \sin \delta_n P_n(\cos \theta) \right|^2 \quad (4.402)$$

で与えられ, これから全散乱断面積

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2n+1) \sin^2 \delta_n \end{aligned} \quad (4.403)$$

が得られる.

剛体球による音波の散乱の問題では u を圧力とすると

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (4.404)$$

が境界条件である. そこで(4.399)のかわりに

$$u = e^{-jkr \cos \theta} - \sum (-j)^n (2n+1) \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(2)'}(ka)} h_n^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad (4.405)$$

となる. そこで散乱位相 δ_n は

$$\tan \delta_n = \frac{j_n'(ka)}{y_n'(ka)} \quad (4.406)$$

できまる.

4.14 層状構造の中の波

3次元空間の中の波の重要な性質の一つとして2種の媒質の境界面による反射, 屈折の現象がある. いま, 3次元の音波についてこのことを取り扱うため

ここで、 u_2 の方を(4.413)のように置いたことは自明ではないことに注意しておこう。(4.411)は偏微分方程式だから、解は無数にあり得る。その中で特に簡単な(4.413)の形を採用したからこそ、(4.418)が単純な平面波になったのである。実をいえば、平面波が入射した場合の問題を解くのが目的であったから、 u_2 として(4.413)を採用したのである。そうすると k_y, k_z は全空間に共通になって、解は ρ, κ が一定でない部分、つまり層状構造の中に入っても依然として

$$u = u_1(x) \exp \{-j(k_y y + k_z z)\} \quad (4.420)$$

の形を保っている。もちろん、その部分では波は平面波ではないのである。すなわち、平面波が入射して、それに原因する場を問題にする限り、 ρ, κ がどんな変り方をしている、(層状であれば)いつも u は(4.420)の形になり、われわれは $u_1(x)$ だけを問題にすればよく、つまり1次元の問題に還元されるというのが重要な点である。

ここで(4.407)の解としては k_x が実数であることは必要でないが、平面波が入射したものであれば当然 k_x は実数で、したがって

$$k_y^2 + k_z^2 < \omega^2 \kappa_0 \rho_0 \quad (4.421)$$

という条件が課せられる。

次に、さらに、 x が正の側の遠方 $x > x_1$ でも ρ, κ は一定値をとるとして、その値を ρ_1, κ_1 としよう。すると、その付近では解は

$$\begin{aligned} u = & a_1 \exp \{-j(k_x' x + k_y y + k_z z)\} \\ & + \bar{a}_1 \exp \{j(k_x' x - k_y y - k_z z)\} \end{aligned} \quad (4.422)$$

という形になる。ただし

$$k_x' = \sqrt{\omega^2 \rho_1 \kappa_1 - k_y^2 - k_z^2}. \quad (4.423)$$

ここで再び k_x' が実か虚かが問題になる。そうして、 k_x が実数であったとしても、(4.423)で与えられる k_x' が実数になるとは限らない。(4.423)を書きかえると

$$k_x' = \sqrt{\omega^2 \rho_1 \kappa_1 - \omega^2 \rho_0 \kappa_0 + k_x^2} \quad (4.424)$$

であるから

$$\rho_1 \kappa_1 > \rho_0 \kappa_0$$

ならば k_x' は必ず実数になるが、

$$\rho_1 \kappa_1 < \rho_0 \kappa_0$$

であると, k_x の値によっては k_x' は虚になるかもしれない. いずれにしても k_x' は (4.424) によって $k_x, \rho_1, \kappa_1, \rho_0, \kappa_0$ によって完全に定まってしまうので, 途中 ($|x|$ の小さいところ) の $\rho(x), \kappa(x)$ の様子にはよらないということが重要である. すなわち x の負の側の方からある入射角で入射した波が, x の正の側でどういう方向に出射するか, また出射しない (k_x' が虚となる) かは, 途中の媒質の特性によらず両側の部分だけできる.

ここで k_x が実なら, 出射波は平面波で, 出射角 θ_1 は

$$\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{k_y^2 + k_x^2}}{k_1} = \frac{\sqrt{k_y^2 + k_x^2}}{\omega \sqrt{\kappa_1 \rho_1}} \quad (4.425)$$

できる. あるいは

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0} = \frac{\sqrt{\kappa_0 \rho_0}}{\sqrt{\kappa_1 \rho_1}}. \quad (4.426)$$

ここで k_0, k_1 をきめる定数 $\sqrt{\kappa_0 \rho_0}, \sqrt{\kappa_1 \rho_1}$ はそれぞれの媒質の屈折率と呼ばれるものに相当し, また (4.426) は波の屈折のスネルの法則 (Snell's law) であることが明らかである. すなわち光の屈折についてよく知られているスネルの法則は, すべての波について成り立ち, かつ, 単一の平面でなくて連続的 (あるいは不連続的) に定数の変わる層状の構造を通して波が伝播する場合に, 一般的に成り立つものであることがわかる.

この場合 $a_0, \bar{a}_0, a_1, \bar{a}_1$ がどのような値をとるかは途中の方程式 (4.415) を解いてみなければわからない. しかし, この4個の変数の間には2個の線形の関係式があり, したがって, 2個だけが独立に与えられるものである. そうしてその関係式というのは x の負の側の遠方の解 (4.418) を x の小さい方へ延長して x の正の側までのばしたとき, x の正の側の解 (4.422) に連続的につながるための条件として出てくる. すなわち (4.418) から出発して x の負の側からのばして行った解と, (4.422) から出発して x の正の側から逆にのばして行った解とを途中のある x のところでつなぎ合わせるとき, そこで u 自身が連続となるための条件と, $\partial u / \partial x$ が連続となるための条件とで二つの線形の関係式が出るのである.

そこで, 独立な2個として a_0 と $\bar{a}_1$ とを最初に与えるとする, それは両側

から入射する波を与えたことになり、そのとき、両側に出て行く波 $\bar{a}_0, a_1$ がきまる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_0 &= s_{00}a_0 + s_{01}\bar{a}_1, \\ a_1 &= s_{10}a_0 + s_{11}\bar{a}_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.427)$$

という形の線形の式が出てきて $s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}$ はそれぞれ、入射側の反射係数、逆方向の透過係数、順方向の透過係数、出射側の反射係数と呼ぶべきものである。また s_{ij} でできた 2 行 2 列の行列は散乱行列または **S 行列** と呼ばれる。 $s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}$ は実は独立なものではなく、いろいろな関係式が成り立つのであるが、それらについては別講『線形集中定数系論』でのべることにする。

もし、 k_x' が虚、つまり

$$\omega^2 \rho_1 \kappa_1 - \omega^2 \rho_0 \kappa_0 + k_x'^2 < 0$$

であると、出射側 $x > x_1$ には平面波は存在し得ない。すなわち、波のエネルギーは全部反射されてしまって、透過波はない。そのような状態は光について**全反射**として知られるものであって、この場合も全反射と呼ぶことにする。全反射のときは $x > x_1$ で進行波、つまり x 方向に $e^{-jk_x'x}$ のように変わる波は存在し得ないが、

$$k_x' = -j\alpha \quad (4.428)$$

として、 $e^{-\alpha x}$ のように、 x 方向に指数関数的に減衰する波(減衰波 attenuated waves)は存在し得るので、その $x=0$ における振幅を a_1 とすれば、この量はある意味がある。また、 x の負の側から、適当な初期条件で(4.415)を解いて行くと、 $x > x_1$ に達したとき、 $e^{\alpha x}$ に比例して増大する項が一般にあらわれるであろう。つまり

$$u = (a_1 e^{-\alpha x} + \bar{a}_1 e^{\alpha x}) \exp \{-j(k_y y + k_z z)\} \quad (4.429)$$

の形の解が出てくるに違いない。実際は $e^{\alpha x}$ の項は存在しないと考えられるから

$$\bar{a}_1 = 0$$

でなければならない。しかし a_1 は一般に 0 ではない。とにかくこの場合にも、方程式(4.427)は成立し $s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}$ 等は計算できるものである。

κ が複素数の場合

媒質に損失(力学的媒質なら内部摩擦、電気的媒質なら伝導度、誘電損失な